PREDNÁŠKA 22.

INTEGRAČNÉ METÓDY V URČITOM INTEGRÁLI

Posledné dva príklady v predchádzajúcej časti ukazovali výpočet určitého integrálu použitím Newton-Leibnitzovho vzorca.

Postupovali sme tak, že sme použili známe integračné metódy na výpočet neurčitého integrálu, a až na záver sme sa vrátili k integrálu určitému.

V tejto časti ukážeme, ako použiť metódu per partes a substitučnú metódu priamo v určitom integráli.

Metóda per partes.

Opäť použijeme vetu o derivovaní súčinu

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'.$$

Ak na oboch stranách rovnosti použijeme určitý integrál na tom istom intervale $[a, b]$, dostaneme sa k rovnosti

$$\int_a^b (f \cdot g)' \, dx = \int_a^b f'g + fg' \, dx.$$

Z nej, použitím Newton-Leibnitzovho vzorca na ľavej strane a linearity na pravej strane, plynie

$$[f \cdot g]_a^b = \int_a^b f'g \, dx + \int_a^b fg' \, dx.$$

Vyjadrením jedného z integrálov na pravej strane rovnosti, sa dostaneme k vete:

Veta(o metóde per partes). *Nech $f,\ g : [a, b] \to R$ sú diferencovateľné funkcie. Potom*

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx$$

Príklad 1. Vypočítajme

$$\int_1^2 \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx.$$

Riešenie. Zvoľme

$$f'(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = \ln x,$$

potom

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \qquad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Podľa vety o metóde per partes je

$$\int_1^2 \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} \cdot \ln 2 - \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} \cdot \ln 2 - \frac{4}{9} (2^{\frac{3}{2}} - 1) \doteq 0,5.$$

Poslednú, približnú rovnosť uvádzame, aby sme zvýraznili, že určitý integrál je číslo.

Príklad 2. Vypočítajme

$$\int_1^e \ln^2 x \, dx.$$

Riešenie.

Zvoľme

$$f'(x) = 1, \qquad g(x) = \ln^2 x,$$

potom

$$f(x) = x, \qquad g'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}.$$

Podľa vety o metóde per partes je

$$\int_1^e \ln^2 x \, dx = \left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x \, dx.$$

Opäť použijeme metódu per partes a zvolíme

$$f'(x) = 2, \qquad g(x) = \ln x.$$

Potom

$$f(x) = 2x, \qquad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\int_1^e \ln^2 x \, dx = \left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x \, dx = e - \left([2x \ln x]_1^e - \int_1^e 2 \, dx \right) = e - 2e + 2e - 2 = e - 2.$$

Príklad 3. Vypočítajme

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arccos x \, dx.$$

Riešenie. Zvolíme

$$f'(x) = 1, \qquad g(x) = \arccos x$$

potom

$$f(x) = x, \qquad g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Z vety o metóde per partes dostaneme

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arccos x \, dx = [x \arccos x]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{3\pi}{4} + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Zvlášť vypočítajme neurčitý integrál. Použijeme v ňom substitúciu $y = 1 - x^2$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = -\sqrt{y} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Teraz

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0,$$

a teda

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arccos x\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Znova sme potrebovali pri výpočte „odbočiť" k neurčitému integrálu.

Aby sme sa krokom tohto typu vyhli, potrebujeme preniesť aj substitučnú metódu do určitého integrálu.

Substitučná metóda.

Oba typy vety o substitúcii preformulujeme pre určitý integrál.

Veta(o substitučnej metóde I). *Nech $\varphi : [a,b] \to J$ je diferencovateľná funkcia, $f : J \to R$ je spojitá funkcia a nech $F : J \to R$ je primitívna funkcia k f. Potom*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, dy = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Veta(o substitučnej metóde II). *Nech $\varphi : I \to [a,b]$ je diferencovateľná bijekcia, $f : [a,b] \to R$ je spojitá funkcia a nech $G : I \to R$ je primitívna funkcia k $f(\varphi(y))\,\varphi'(y)$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y))\varphi'(y)\, dy = G(\varphi^{-1}(b)) - G(\varphi^{-1}(a)).$$

Príklad 4. Vypočítajme

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Riešenie. Použijeme substitúciu

$$y = 1 - x^2 \qquad dy = -2x\, dx.$$

Dostaneme

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{y}\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y}\, dy = \frac{1}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Príklad 5. Vypočítajme

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx.$$

Riešenie. Použijeme substitúciu

$$x = \sqrt{2}\sin y \qquad dx = \sqrt{2}\cos y\,dy.$$

Pretože funkcia $\varphi(y) = \sqrt{2}\sin y$ má byť bijekcia, uvažujeme premennú y len na intervale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Na tomto intervale je funkcia sínus bijektívna a funkcia kosínus nezáporná. Inverzná funkcia je $\varphi^{-1}(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$. Pretože $\arcsin\frac{0}{\sqrt{2}} = 0$ a $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, dostaneme po substitúcii integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2-2\sin^2 y}\sqrt{2}\cos y\,dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 y\,dy =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2y}{2}\,dy = \left[y + \frac{\sin 2y}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$