

INTEGROVANIE RACIONÁLNYCH FUNKCIÍ

V predchádzajúcich prednáškach o substitučnej metóde sme si mohli všimnúť, že často sme postupovali tak, aby sme sa použitím vhodnej substitúcie dostali k integrálu z racionálnej funkcie. Je to vždy úspešná stratégia?

Odpoveď je áno. V tejto kapitole ukážeme, že každú racionálnu funkciu vieme integrovať použitím elementárnych funkcií.

Predvedieme jednoznačný postup pre integrovanie racionálnych funkcií.

Pripomeňme si niektoré vedomosti o racionálnych funkciách z algebry.

Predovšetkým, každú racionálnu funkciu vieme delením polynómov previesť na súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.

Rýdzoracionálu funkciu vieme rozložiť na súčet elementárnych zlomkov. V tomto kurze použijeme rozklad nad R . (*Rozklad bez použitia komplexných čísel.*)

Pre integrovanie racionálnych funkcií teda stačí vedieť integrovať polynómy a jednotlivé typy elementárnych zlomkov. To si v nasledujúcich krokoch predvedieme.

1. Integrovanie polynómu.

Pre integrovanie polynómu stačí vzorec

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

2. Integrovanie elementárnych zlomkov typu $\frac{1}{x-a}$.

Zlomky tohoto typu sa v rozklade racionálnej funkcie objavajú, ak číslo a je koreňom polynómu v menovateli.

Použijeme elementárny výsledok

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a|.$$

Príklad 1.

Vypočítajme

$$\int \frac{x^2}{x-1} dx.$$

Riešenie.

Podelíme

$$x^2 : (x-1) = x+1 + \frac{1}{x-1}.$$

Potom

$$\int \frac{x^2}{x-1} dx = \int x+1 + \frac{1}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c.$$

Príklad 2.

Vypočítajte

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx.$$

Riešenie.

Podelfme

$$x^2 : (x^2 - 1) = 1 + \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Rozkladom na elementárne zlomky dostaneme

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1}.$$

Potom

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx &= \int 1 + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} dx = \\ &= x + \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + c = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c. \end{aligned}$$

3. Integrovanie elementárnych zlomkov typu $\frac{1}{(x - a)^n}$.

Zlomky tohoto typu sa v rozklade racionálnej funkcie objavajú ak číslo a je n násobným koreňom polynómu v menovateli.

Pre $n \geq 2$ použijeme elementárny výsledok

$$\int \frac{1}{(x - a)^n} dx = \frac{1}{1 - n} \cdot \frac{1}{(x - a)^{(n-1)}}.$$

Príklad 3.

Vypočítajte

$$\int \frac{x^2}{(x - 1)^2} dx.$$

Riešenie.

Podelfme

$$x^2 : (x - 1)^2 = 1 + \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

Rozkladom na elementárne zlomky dostaneme

$$\frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

Potom

$$\int \frac{x^2}{(x - 1)^2} dx = \int 1 + \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} dx = x + 2 \ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + c.$$

4. Integrovanie elementárnych zlomkov typu $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

Predpokladáme, že kvadratický polynóm v menovateli zlomku je už nerozložiteľný nad R , teda že $p^2 < 4q$.

Postup pri integrovaní predvedieme na sérii príkladov, ktoré sa postupne sťažujú.

Príklad 4.

Vypočítajme

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx.$$

Riešenie.

Pretože čitateľ v racionálnej funkcii je presne deriváciou menovateľa, je

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx = \ln(x^2+4x+8) + c.$$

Príklad 5.

Vypočítajme

$$\int \frac{1}{x^2+4x+8} dx.$$

Riešenie.

V menovateli použijeme doplnenie na úplný štvorec

$$x^2+4x+8 = x^2+4x+4+4 = (x+2)^2+4.$$

Spolu so substitúciou $y = x+2$ dostaneme

$$\int \frac{1}{x^2+4x+8} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4} dx = \int \frac{1}{y^2+4} dy = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + c.$$

Príklad 6.

Vypočítajme

$$\int \frac{x}{x^2+4x+8} dx.$$

Riešenie.

Čitateľ racionálnej funkcie upravíme tak, aby obsahoval deriváciu menovateľa

$$x = \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot (2x+4-4) = \frac{1}{2} \cdot (2x+4) - 2.$$

Preto

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+4x+8} dx &= \int \frac{\frac{1}{2} \cdot (2x+4) - 2}{x^2+4x+8} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+4x+8} dx. \end{aligned}$$

Teraz stačí na jednotlivé sčítance použiť výsledky príkladov 4 a 5, aby sme dostali

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+4x+8} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+8) - \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + c.$$

Príklad 7.

Vypočítajme

$$\int \frac{x^2}{2x^2 + 3x + 5} dx.$$

Riešenie.

Delením dostaneme

$$x^2 : (2x^2 + 3x + 5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3x + 5}{2x^2 + 3x + 5}$$

Preto

$$\int \frac{x^2}{2x^2 + 3x + 5} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \frac{3x + 5}{2x^2 + 3x + 5} dx.$$

Upravíme čitateľa

$$3x + 5 = \frac{3}{4} \left(4x + \frac{20}{3} \right) = \frac{3}{4} \left(4x + 3 + \frac{11}{3} \right).$$

Teraz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \frac{3x + 5}{2x^2 + 3x + 5} dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \frac{\frac{3}{4} \left(4x + 3 + \frac{11}{3} \right)}{2x^2 + 3x + 5} dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} \int \frac{4x + 3}{2x^2 + 3x + 5} dx - \frac{11}{8} \int \frac{1}{2x^2 + 3x + 5} dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} \ln(2x^2 + 3x + 5) - \frac{11}{8} \int \frac{1}{2x^2 + 3x + 5} dx. \end{aligned}$$

Nakoniec po úprave menovateľa

$$2x^2 + 3x + 5 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 + 2\frac{3}{4}x + \frac{9}{16} + \frac{31}{16}\right) = 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} \ln(2x^2 + 3x + 5) - \frac{11}{8} \int \frac{1}{2x^2 + 3x + 5} dx &= \\ = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} \ln(2x^2 + 3x + 5) - \frac{11}{16} \int \frac{1}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} dx &= \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} \ln(2x^2 + 3x + 5) - \frac{11}{16} \sqrt{\frac{16}{31}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{31}{16}}} &= \\ = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} \ln(2x^2 + 3x + 5) - \frac{11}{4\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4x + 3}{\sqrt{31}} + c. \end{aligned}$$

Vo všeobecnom prípade je

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p + \frac{2B}{A} - p}{x^2 + px + q} dx = \\
 &= \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{A}{2} \int \frac{\frac{2B}{A} - p}{x^2 + px + q} dx = \\
 &= \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \\
 &= \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + c = \\
 &= \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c.
 \end{aligned}$$

5. Integrovanie elementárnych zlomkov typu $\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}$.

Tu nebudeme postupovať všeobecne, predvedieme hlavnú myšlienku na najjednoduchšom príklade

Príklad 8.

Vypočítajme

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Riešenie.

Vieme, že

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Počítajme integrál na pravej strane poslednej rovnosti metódou per partes, pri voľbe

$$\begin{aligned}
 f' &= 1, & f &= x \\
 g &= \frac{1}{x^2 + 1} & g' &= -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.
 \end{aligned}$$

Dostaneme

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{x}{x^2 + 1} + \int \frac{2x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Teda

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{x^2 + 1} + 2\operatorname{arctg} x - 2 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Preto

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \operatorname{arctg} x \right) + c.$$

Touto rekurentnou technikou sa počítajú aj integrály elementárnych zlomkov s vyššími mocninami nerozložiteľného kvadratického polynómu v menovateli.

Súhrnom môžeme konštatovať, že pre každú racionálnu funkciu vieme nájsť jej primitívnu funkciu. Táto je vyjadrená pomocou racionálnych funkcií, funkcie logaritmus a funkcie arkustangens.