MŠ 27.6.2016
Existujú aj iné správne postupy.

Pr. 1 *U 100 užívateľov aplikácie SKUŠKA sa sledoval počet kliknutí na logo firmy XXX počas jedného dňa. Nájdite dolný a horný kvartil, medián, modus a zostrojte krabicový (box) graf. Nájdite extremálnu hodnotu (outlayer), ak existuje. Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke.*

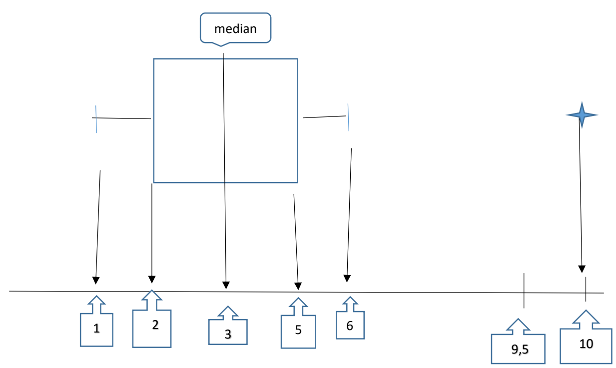
1	2	3	4	5	6	10
10	20	30	10	10	15	5

Riešenie 1

$$Q_L = 2, \quad Q_U = 5, \quad Me = 3, \quad R = 3, \quad 1,5 \cdot R = 4,5, \quad 5 + 4,5 < 10, \quad Mo = 3$$

extremálna hodnota je 10*.*

Figure 1: Krabicový graf



Pr. 2 *Generátor náhodných čísel vygeneroval* 100 *čísel z množiny* $\{0, 1, 2, 3\}$. *Otestujte na hladine významnosti* $\alpha = 0,05$, *či ide o náhodný výber z* $Bi\left(3, \frac{1}{2}\right)$. *Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke:*

0	1	2	3
10	40	40	10

Riešenie 2 *Pomocná tabuľka:*

x_i	0	1	2	3	súčet
n_i	10	40	40	10	100
p_i	$0,125$	$0,375$	$0,375$	$0,125$	1
ideál: $n \cdot p_i$	$12,5$	$37,5$	$37,5$	$12,5$	100
(ideál-skut.)^2/ideál	$2,5^2/12,5$	$2,5^2/37,5$	$2,5^2/37,5$	$2,5^2/12,5$	4/3
(ideál-skut.)^2/ideál	$0,5$	1/6	1/6	$0,5$	$1,3\overline{3}$

Štatistika $\chi^2 = 1,3\overline{3}$ *a tab. hodnota* $\chi^2_3(0,95) = 7,815$. *Pretože* $1,3\overline{3} < 7,815$, *tak* H_0: *údaje pochádzajú z* $Bi(3,\ 1/2)$ *nezamietame na hladine významnosti* $0,05$.

Pr. 3 *N.p.* X *je určená funkciou hustoty* $f_X(t)$

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & t \notin <0,\ 2> . \end{cases}$$

a) Vypočítajte distribučnú funkciu $F_X(x)$. *Načrtnite graf distribučnej funkcie a funkcie hustoty n.p.* X.
b) Nájdite také čísla a, b *aby platilo:* $P(X < a) = 0,01$, $P(X \geqslant b) = 0,19$. *Aká je pravdepodobnosť, že n.p.* X *nadobudne hodnotu z intervalu* $\langle a,\ b\rangle$? *Vyznačte na grafe distribučnej funkcie a na grafe funkcie hustoty.*

Riešenie 3 *a)*

$$\int_0^x f_X(t)dt = \int_0^x \frac{t}{2}\,dt = \frac{x^2}{4}.$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

b)

$$P(X < a) = F_X(a) = 0,01 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 0,01 \Rightarrow a = 0,2.$$

$$P(X \geqslant b) = 1 - F_X(b) = 0,19 \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2}{4} = 0,81 \quad \Rightarrow \quad b = 1,8.$$

$$P(X \in (0,2,\ 1,8)) = 0,81 - 0,01 = 0,8.$$

Pr. 4 *V urne je 10 guličiek, z toho 3 biele a 7 modrých. Náhodne vyberieme 2 guličky a nevrátime naspäť do urny. V nasledujúcom ťahu vyberieme jednu guličku.*
a) Aká je pravdepodobnosť, že v druhom ťahu vyberieme bielu guličku?
b) V druhom ťahu sme vybrali modrú guličku. Aká je pravdepodobnosť, že v prvom ťahu sme vybrali jednu modrú a jednu bielu guličku?

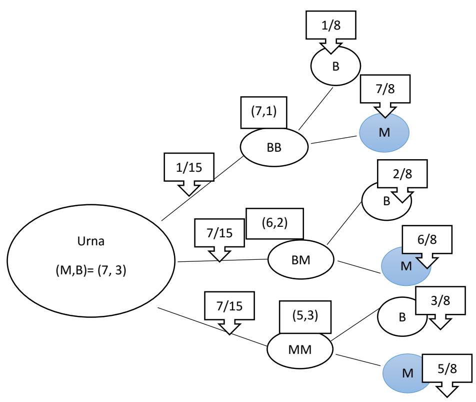
Riešenie 4

$$P(BB) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}, \qquad P(BM) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}, \qquad P(MM) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

$$P(B) = P(B|BB)P(BB) + P(B|BM)P(BM) + P(B|MM)P(MM) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{15} + \frac{2}{8} \cdot \frac{7}{15} + \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{15} = 0,3.$$

Teda $P(M) = 0,7 \quad \Rightarrow P(BM|M) = \frac{P(MB) \cdot P(M|BM)}{P(M)} = \frac{\frac{7}{15} \cdot \frac{6}{8}}{0,7} = 0,5$

Figure 2: podmienená pravdepodobnosť



Pr. 5 *Priemerná teplota disku po hodine prevádzky počítača bola* $\overline{x} = 25°C$ *a* $s^2 = 1,44$, *pokus sa opakoval 25×.*

Vypočítajte 95%*-ný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu. a otestuje na hladine významnosti* $\alpha = 0,05$, *či stredná hodnota je rovná* $23°C$ $(\mu_0 = 23°C)$, *ako tvrdí výrobca, alebo sa nerovná* μ_0.

Výrobca naviac udáva, že rozptyl sa rovná $1,21$ $(\sigma_0^2 = 1,21)$. *Otestuje na hladine významnosti* $\alpha = 0,05$, *či výrobca má pravdu, alebo je rozptyl väčší ako* σ_0^2.

V oboch prípadoch naformulujte H_0 a H_1!!!!

Riešenie 5 *Pretože* $n = 25$ *a* $\alpha = 0,05$, *tak potrebujeme tab hodnoty* $t_{24}(0,975) = 2,06$ *Interval spoľahlivosti*

$$\left(\overline{x} - \frac{xx \cdot s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{xx \cdot s}{\sqrt{n}}\right) = \left(25 - \frac{2,06 \cdot 1,2}{5}, \, 25 + \frac{2,06 \cdot 1,2}{5}\right) = (24,506, \, 25,4944)$$

$$H_0: \quad \mu = 23 \qquad H_1: \quad \mu \neq 23.$$

Pretože $23 \notin (24,506, \, 25,4944)$, *tak* H_0 *na hladine významnoti* $0,05$ *zamietame.*

$$H_0: \quad \sigma^2 = 1,21 \qquad H_1: \quad \sigma^2 > 1,21.$$

Vieme, že $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) =$ *a tab. hodn.* $\chi^2_{24}(0,95) \doteq 36,451. \Rightarrow \quad W = \frac{24 \cdot 1,44}{1,21} \doteq 28,562 < 36,451$ $\Rightarrow \quad H_0$ *nezamietame.*

Pr. 6 *Nech* A, B *sú náhodné udalosti, pre ktoré platí* $P(B^c) = 0,4$, $P(A|B) = 0,3$ *a* $P(B|A) = 0,9$. *Vypočítajte:* $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$. *Sú* A^c, B^c *nezávislé?*

Riešenie 6

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 0,6$$

$$0,3 = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \Rightarrow \qquad 0,3 = \frac{P(A \cap B)}{0,6} \qquad \Rightarrow \qquad P(A \cap B) = 0,18$$

$$0,9 = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,18}{P(A)} \qquad \Rightarrow \qquad P(A) = \frac{0,18}{0,9} = 0,2.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,6 - 0,18 = 0,62.$$

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
$0,2$	$0,6$	$0,18$	$0,62$

Pr. 7 *Hádžme kockou a n.p.* X, Y *sú definované:*
$X = 1$ *padlo párne číslo, v opačnom prípade* $X = 0$.
$Y = 0$ *padlo číslo menšie ako* 4, $Y = 1$ *ak padlo číslo* 4 *alebo* 5 *a* $Y = 2$ *ak padlo č. 6.*
Zistite, či n.p. X, Y *sú nezávislé, vypočítajte* $cov(X, Y)$ *a* $P(X > 0|Y < 2)$.

Riešenie 7 *Náh. prem.:*

kocka	1	2	3	4	5	6	$\sum$
X	0	1	0	1	0	1	3
Y	0	0	0	1	1	2	4
$X \cdot Y$	0	0	0	1	0	2	3

$$E(X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad E(Y) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad E(X \cdot Y) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \neq 0.$$

Pretože $cov(X, Y) \neq 0$, *tak sú štat. závislé.*

$$P(X > 0|Y < 2) = \frac{P(X = 1 \,\&\, Y \neq 2)}{P(Y \neq 2)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5} = 0,4.$$