W MŠ 20.6.2017 Meno: Priezvisko:

Pr. 1 *Nech* $(2,824;\ 5,176)$ *je 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu v prípade náhodného výberu z* $N(\mu, 9)$ *o rozsahu* n.
a) Aký aritmetický priemer bol vypočítaný a aký bol rozsah náhodného výberu n*?*
b) Pri testovaní štatistických hypotéz bola vypočítaná p-hodnota $p = 0,09$. *Označte, tie hladiny významnosti testu, pri ktorých* H_0 *zamietame a svoje rozhodnutie odôvodnite:*
$\alpha_1 = 0,1;\quad \alpha_2 = 0,05;\quad \alpha_3 = 0,08.$

Riešenie 1 *a)* $\overline{x} = \frac{2,824+5,176}{2} = 4.$

$$2,824 = \overline{x} - \frac{1,96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = 4 - \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} = 5 \quad \Rightarrow \quad n = 25.$$

b) H_0 *zamietame, ak* $p < \alpha$ *a* $0,09 < \alpha_1 = 0,1 \quad \Rightarrow$ *ide o* α_1.

Pr. 2 *Nech* X_1, X_2, X_3, X_4 *je náhodný výber z* $N(2,\ 16)$ *a* $Y_i = \frac{X_i - 2}{4}$, *pre* $i = 1,2,3,4$, $\overline{X} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i$ *a* $Q = \sum_{i=1}^{4} Y_i^2$.
a) Aké rozdelenie majú n.p. Y_i, $\overline{X}$, Q.
b) Nájdite čísla a, b, c *s vlastnosťou, že* $P(X_i \leqslant a) = 0,5;\quad P(\overline{X} \geqslant c) = 0,025;\quad P(Q \leqslant b) = 0,95.$

Riešenie 2 *a)* $Y_i \sim N(0;1)$, $\overline{X} \sim N(2;4)$, $Q \sim \chi^2(4)$.

b)
- *Ak* $P(X_i \leqslant a) = 0,5 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$
- *Ak* $P(\overline{X} \geqslant c) = 0,025 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{X} < c) = 0,975 \quad \Rightarrow \quad \frac{c-2}{\sqrt{4}} = 1,96 \quad \Rightarrow \quad c = 5,92$
- *Ak* $P(Q \leqslant b) = 0,95 \quad \Rightarrow$ *v tab. hodn. (dole)* $b = \chi^2(0,95;4) = 9,488.$

Pr. 3 *Sledoval sa počet kliknutí na stránke web-noviny počas dňa u 100 náhodne vybraných uživateľov.*
a)Vypočítajte priemer ($\overline{x}$)*, nájdite medián, modus, 5%-tný a 95%-tný kvantil, načrtnite empirickú distribučnú funkciu.*
b)Náhodne vylosujeme dvoch zo sledovaných zákazníkov. Aká je pravdepodobnosť, že obaja budú patriť do skupiny s piatimi alebo šiestimi klikmi? Výsledky štatistického prieskumu sú v nasledujúcej tabuľke:

počet kliknutí	1	2	3	4	5	6
počet zákazníkov	5	10	10	30	25	20

Riešenie 3 *a)* $Me = 4$, $Mo = 4$, *5%-tný kvantil* $= 1,5$ *a 95%-tný kvantil* $= 6$, $\overline{x} = 4,2$.

k_i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
f_i	5	10	10	30	25	20	100
rel početnosť $f_i/100$	0,05	0,1	0,1	0,3	0,25	0,2	1
emp. distr. funkcia	0,05	0,15	0,25	0,55	0,8	1	
$k_i f_i/100$	0,05	0,2	0,3	1,2	1,25	1,2	4,2

b) Náhodná udelosť A: obaja patria do skupiny s piatimi alebo šiestimi klikmi

$$P(A) = \frac{\binom{45}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{45 \cdot 44}{100 \cdot 99} = 0,2$$

Pr. 4 *Generátorom náhodných čísel sme získali* 100 *čísel z množiny* $\{1, 2, 3, 4\}$ *Otestujte na hladine významnosti* $\alpha = 0,05$, *či ide o náhodný výber z rovnomerného rozdelenia. Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke:*

číslo	1	2	3	4
početnosť	25	30	30	15

Riešenie 4 H_0*: čísla pochádzajú z rovnom. rozdelenia* $P(i) = 0,25$, $i = 1, 2, 3, 4$
H_1*: čísla nepochádzajú z rovnom. rozdelenia.*
Použijeme χ^2*-test dobrej zhody:*

číslo	1	2	3	4	$\sum$
X_i	25	30	30	15	100
očakávaná $100 \cdot 0,25$	25	25	25	25	
$(X_i - 25)^2/25$	0	1	1	4	6

Porovnáme s tab. hodn. $\chi^2(0,95; 3) = 7,815$ *Pretože* $6 < 7,815$ H_0 *nezamietame na hladine významnosti* 0,05.

Pr. 5 *100× sme merali napätie v sieti. Vypočítali sme priemer* $\overline{x} = 25$ *jedn. a smerodajnú odchýku* $s = 1,3$.
a) Vypočítajte 95%*-ný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu. a otestuje na hladine významnosti* $\alpha = 0,05$, *či stredná hodnota je rovná* 23 *jedn.* ($\mu_0 = 23$)*, alebo sa nerovná* μ_0.
b) Správca naviac udáva, že smerodajná odchýlka sa rovná 1,1 ($\sigma_0 = 1,1$)*. Otestuje na hladine významnosti* $\alpha = 0,05$, *či výrobca má pravdu, alebo je rozptyl väčší ako* σ_0^2.
V oboch prípadoch naformulujte H_0 *a* H_1*!!!*

Riešenie 5 *a) Hranice int. spoľ.:* $\overline{x} \pm \frac{t(0,975;99)s}{\sqrt{n}} = 25 \pm \frac{1,9842 \cdot 1,3}{10}$. *Int. spoľ. je* $(24,742; 25,258)$.

$$H_0: \ \mu = 23 \qquad H_1: \ \mu \neq 23$$

Pretože $23 \notin (24,742; 25,258)$, *tak* H_0 *na hlad. významnosti* $\alpha = 0,05$ *zamietame.*

b)

$$H_0: \ \sigma^2 = 1,21 \qquad H_1: \ \sigma^2 > 1,21$$

Ak platí H_0, *tak* $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ *a teda porovnáme*

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{99 \cdot 1,3^2}{1,21} = 138,27$$

s tab. hodn. $\chi^2(0,95; 99) = 123,225$. *Pretože* $138,27 > 123,225$, *tak* H_0 *zamietame na hlad. významnosti* $\alpha = 0,05$.

Pr. 6 *Dvaja hráči X, Y hrajú spoločenkú hru. Plánik hry pozostáva s políčok usporiadaných do kruhu. Každý si položí svoju figúrku na ľubovoľné políčko. Vyhráva ten, ktorý prvý prejde celý kruh. Na tom istom políčku môžu stáť obaja hráči súčasne a každý má svoju kocku. Obaja naraz hodia kockou. Sledujeme paritu na kockách. Pre každého z nich platia iné pravidlá. Pravidlá:*

X*: obe párne – zostáva stáť; párne, nepárne – dopredu o 1 polícko; obe nepárne – dopredu o 2 políčka;*

Y*: obe párne – späť o 1 políčko; párne, nepárne – dopredu o 2 políčka; obe nepárne – dopredu o 1 polícko.*

Nájdite združené a marginálne rozdelenia pravdepodobnosti náh. vek. (X, Y) a vypočítajte $\rho(X, Y)$. Majú obaja rovnakú šancu vyhrať?

Riešenie 6 *Označme P - párne a N nepárne číslo. Potom po hode dvomi kockami dostaneme: Marginálne rozd.:*

dve kocky – parita	PP	NP, PN	NN	$\sum$
pravd. p_i	$0,25$	$0,5$	$0,25$	1

ω	PP	NP, PN	NN	$\sum$
X	0	1	2	
P_X	$0,25$	$0,5$	$0,25$	1
$x_i p_i$	0	$0,5$	$0,5$	$1 = E(X)$

ω	PP	NP, PN	NN	$\sum$
Y	-1	2	1	
P_Y	$0,25$	$0,5$	$0,25$	1
$y_i p_i$	$-0,25$	1	$0,25$	$1 = E(Y)$

$E(X) = E(Y) \quad \Rightarrow \quad$ teda majú rovnakú šancu.

Združené rozd. vektora (X, Y):

$x_i \vert p_i / y_j \vert p_j$	$-1 \vert 0,25$	$2 \vert 0,5$	$1 \vert 0,25$
$0 \vert 0,25$	$0,25$	0	0
$1 \vert 0,5$	0	$0,5$	0
$2 \vert 0,25$	0	0	$0,25$

napr. $P(X = 1 \,\&\, Y = -1) = 0$

	PP	NP	NN	$\sum$
pravd. p_i	$0,25$	$0,5$	$0,25$	1
X	0	1	2	
X^2	0	1	4	
$x_i^2 p_i$	0	$0,5$	1	$1,5 = E(X^2)$
Y	-1	2	1	
Y^2	1	4	1	
$y_i^2 p_i$	$0,25$	2	$0,25$	$2,5 = E(Y^2)$
XY	0	2	2	
$x_i y_i p_i$	0	1	$0,5$	$1,5 = E(XY)$

$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1,5 - 1 = 0,5,$
$D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 2,5 - 1 = 1,5,$
$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1,5 - 1 = 0,5.$

Potom

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{0,5}{\sqrt{0,5 \cdot 1,5}} = 0,577$$

Pr. 7 *Pravdepodobnosť, že strelec trafí cieľ pri jednom pokuse je $0,7$. Strelec strieľa dovtedy kým netrafí cieľ. Náhodná premenná X je počet neúspešných pokusov. Aké pravdepodobnostné rozdelenie má n.p. X a aké sú jeho parametre? Vypočítajte $P(X \geqslant 5)$ a napíšte náhodnú udalosť, pre ktorú platí: $X \in \{2, 4, 0\}$.*

Riešenie 7 *Strelec: A - trafí, N - netrafí.*
Teda $P(A) = 0,7$ a $P(N) = 0,3$. Ak X je počet neúspešných pokusov, potom $X \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ a $X \sim G(0,7)$, geometrické rozd., t.z. $P(X = k) = 0,7 \cdot 0,3^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$.

$$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - \sum_{i=0}^{4} 0,7 \cdot 0,3^i = 1 - 0,7 \cdot (1 + 0,3 + 0,09 + 0,027 + 0,0081) = 1 - 0,99757 = 0,00243.$$

$$\Omega = \{\underbrace{A}_{X=0}, \underbrace{NA}_{X=1}, \underbrace{NNA}_{X=2}, \underbrace{NNNA}_{X=3}, \underbrace{NNNNA}_{X=4}, \underbrace{NNNNNA}_{X=5}, \cdots\},$$

teda ak $U = \{A, NNA, NNNNA\}$, tak pre $\omega \in U$ platí, že $X(\omega) \in \{0, 2, 4\}$.

Tabuľkové hodnoty*:*
$\chi^2(0,95; 3) = 7,815$; $\chi^2(0,95; 4) = 9,488$; $\chi^2(0,95; 99) = 123,225$; $\chi^2(0,95; 100) = 124,342$
$N(0; 1)$*:* $u(0,975) = 1,96$; $u(0,95) = 1,645$
$t(\alpha; n)$*:* $t(0,95; 99) = 1,6603$; $t(0,95; 100) = 1,6602$; $t(0,975; 99) = 1,9842$; $t(0,975; 100) = 1,9832$
