1 Pravdepodobnosť

Príklad 1: Nech množina $A = \{1, 2, 3\}$ a Ω je množina všetkých trojciferných čísel.
a) Koľko prkov má množina Ω?
b) Koľko prkov má množina Ω_1: každé číslo môžeme použiť len raz?
c) Koľko prkov má množina Ω_2: každé číslo, okrem 1, môžeme použiť len raz?

Príklad 2: Oddelenie sťažností výrobcu vysávačov analyzovalo veľký počet závad a výsledok zapísali do tabuľky 1.

Chyby	elektrická	mechanická	vzhľadová	iná	marg.
v záručnej dobe	10%	15%	15%	15%	
po záručnej dobe	15%	10%	10%		
marg.					

Tab. 1: Tabuľka výskytu chýb

Označme javy:
chyba je elektrická — A;
chyba vznikla v záručnej dobe — B.

a) Doplňte tabuľku 1

b) Slovne sformulujte javy : $A \cup B$, $\cap B$, $A \cap B^c$, a vypočítajte: $P(A)$, $P(B \cup A^c)$, $P(A \cap B^c)$.

c) Zistite či javy , A a B sú nezávislé.

Príklad 3: Vieme že prístupový kód sa skladá, z desiatich rôznych znakov, ktoré poznáme. Aká je pravdepodobnosť, že na prvý krát uhádneme prístupový kód?

Príklad 4: V urne máme 10 loptičiek označených $1, 2, 3, \ldots, 10$. Ťaháme postupne po jednej loptičke. Vytiahnutú loptičku nevraciame do urny. Toto opakujem dovtedy, kým urna nebude prázdna. Aká je pravdepodobnosť, že ich vytiahneme v poradí $1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 9$?

Príklad 5: V urne máme 10 loptičiek označených tak, že 5 z nich má znak 1 a zvyšné $2, 3, 4, 5, 6$. ťaháme postupne po jednej loptičke. Vytiahnutú loptičku nevraciame do urny. Toto opakujeme dovtedy, kým urna nebude prázdna. Aká je pravdepodobnosť, že ich vytiahneme v poradí $1, 3, 2, 4, 5, 6, 1, 1, 1, 1$?

Príklad 6: Nech A, B sú náhodné udalosti, pre ktoré platí $P(B^c) = 0,4$, $P(A|B) = 0,3$ a $P(B|A) = 0,9$. Vypočítajte: $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$. Sú A^c, B^c nezávislé?

Príklad 7: V ročníku je 100 študentov, z toho 10 z nich má krstné meno Jozef a 15-tim z nich sa krstné meno začína na M. Každý z nich má práve jedno krstné meno. Náhodne vyberieme jedného študenta. Vypočítajte:
a1) Aká je pravdepodobnosť, že sa bude volať Jozef?
a2) Aká je pravdepodobnosť, že krstné meno študenta bude Jozef, alebo sa bude začínať na písmeno M?
a3) Aká je pravdepodobnosť, že krstné meno študenta nebude Jozef a bude sa začínať na písmeno M?
a4) Aká je pravdepodobnosť, že krstné meno študenta nebude Jozef a nebude sa začínať na písmeno M?

Príklad 8: Hádžeme hracou kockou, ktorej steny sú označené číslami $1, 2, \cdots, 6$ a výsledok nevidíme. Výsledok oznamujú dvaja asistenti X a Y podľa nasledujúcich pravidiel:
X : A ak padne číslo menšie ako 4, B ak padne číslo väčšie ako 3.
Y : C ak padne párne číslo, a D ak padne nepárne číslo.
Popíšte množinu Ω a vypočítajte $P(\omega)$ pre každé $\omega \in \Omega$.

Príklad 9: Modifikujme príklad 8 nasledovne: Máme dve kocky a každý z asistentov hlási výsledok na svojej kocke podľa nasledujúcich pravidiel:
X : A ak padne číslo menšie ako 4, B ak padne číslo väčšie ako 3.
Y : C ak padne párne číslo, a D ak padne nepárne číslo.
Popíšte množinu Ω a vypočítajte $P(\omega)$ pre každé $\omega \in \Omega$.

Poznámka 1: Porovnajte príklady 8 a 9.

Príklad 10: Napíšte všetky trojciferné čísla, ktoré sa dajú zostaviť z čísel $1, 2, 3$ tak, že každé číslo použijeme práve raz.

Príklad 11: Máme skupinu piatich študentov

$$A = \{\text{Boris (B), Elena (E), Igor (I), Jana (J), Táňa (T)}\}$$

Zistite, koľko dvojíc a koľko trojíc z nich je možno zostaviť a vypíšte ich.

Príklad 12: Máme k dispozícii 10 vzoriek vody označených $v_1 \ldots, v_{10}$. Náhodne vyberieme 3 vzorky. Aká je pravdepodobnosť, že vyberieme $\{v_1, v_3, v_6\}$?

Príklad 13: Traja kontrolóri čistiarní odpadových vôd majú urobiť v jeden deň po jednej kontrole. Čistiarní je 10. Každý si náhodne vyberie jednu. Aká je pravdepodobnosť, že všetci budú kontrolovať tú istú čistiareň?

Príklad 14: Kontrolór má urobiť 3 kontroly v čistiarňach odpadových vôd v presne stanovenom poradí. Čistiarní je 10, pričom žiadnu nebude kotrolovať viackrát. Náhodne vyberie tri z nich. Aká je pravdepodobnosť, že bude kontrolovať čistiarne odpadových vôd c_2, c_4, c_6 v poradí (c_2, c_6, c_4)?

Príklad 15: Kontrolór má urobiť počas troch týždňov 3 kontroly v čistiarňach odpadových vôd v presne stanovenom poradí. Čistiarní je 10, pričom môže kontrolovať tú istú viackrát. Náhodne vyberie tri. Aká je pravdepodobnosť, že bude kontrolovať 3-krát tú istú čistiareň?

Príklad 16: Nech rozdelenie náhodnej premennej X je dané pomocou tabuľky 2:

X	1	2	3	4
P_X	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,1$

Tab. 2: Pravdepodobnostné rozdelenie n.p. X (Pr.16)

Nájdite hodnoty funkcie $H_X(r)^1 = \frac{P(X \le r)}{P(X > r)}$.

Príklad 17:
Nech X je n.p definovaná v tabuľke 3. Pre $Y = X^2$ $Z = Y + X$ vypočítajte pravdepodobnostné rozdelenia.

X	1	2	3
P_X	$0,5$	$0,1$	$0,4$

Tab. 3: Pravdepodobnostné rozdelenie n.p. X (Pr. 17)

Príklad 18: Hádžeme 3 - krát mincou. Náhodná premenná X dvojnásobok počtu hláv.
a) Vypočítajte rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X. Nakreslite graf distribučnej funkcie.
b) Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu tejto náhodnej premennej.
c) Vypo?ítajte $P(X > 0)$ a $P(X = 1)$.

Príklad 19:
Hádžeme regulárnou hracou kockou. Na jeden hod máme dve pravidlá:

(p1) X: priradí párnemu počtu bodiek 1 a v ostatných prípadoch priradí počet bodiek

(p2) Y: priradí nepárnemu počtu bodiek 0 a v ostatných prípadoch priradí počet bodiek mínus 1.

Nájdite pravdepodobnostné rozdelenia náhodných premenných: X, Y, $X + Y + 1$, $X.Y - 1$.

Príklad 20: Prepokladajme, že generátor náhodných čísel generuje náhodne čísla z intervalu $[2, 4)$ rovnomerne. Nech X je n.p., ktorá priradí náhodnému číslu jeho hodnotu, a Y je n.p., ktorá okrem čísla 2 priradí náhodnému číslu jeho hodnotu a v prípade čšla 2 priradí hodnotu -1. Nájdite distribučné funkcie, funkcie hustoty oboch n.p. a ak sa nerovnajú vypočítajte $P(X \neq Y)$.

[1] Funkcia H_X sa nazýva intenzita rizika

Príklad 21: Hádžeme regulárnou kockou dovtedy, kým nepadne 6.

1. Nech n.p. X je definovaná nasledovne: Ak padne 6 v prvom hode, tak prehráme 6 EUR. Ak padne 6 v k-tom hode, $k > 1$, vyhráme 6^kEUR. Rozdelenie n.p. X je teda nasledovné: $P_X = \left\{\left(-6, \frac{1}{6}\right), \left(6^2, \frac{5}{6^2}\right), \left(6^3, \frac{5^2}{6^3}\right), \ldots\right\}$. Potom $E(X) = -6 \cdot \frac{1}{6} + \sum_{k=2}^{\infty} 6^k \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k} = -1 + \sum_{k=2}^{\infty} 5^{k-1} = \infty$.
2. Nech n.p. Y je definovaná nasledovne: Ak padne 6 v k-tom pokuse a k je párne číslo, potom vyhrávame 6^kEUR, ak k je nepárne číslo, prehrávame 6^kEUR. Rozdelenie n.p. Y je teda nasledovné: $P_Y = \left\{\left(-6, \frac{1}{6}\right), \left(6^2, \frac{5}{6^2}\right), \left(-6^3, \frac{5^2}{6^3}\right), \ldots\right\}$. Potom $E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot 6^k \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot 5^{k-1}$. Súčet takéhoto nekonečného radu neexistuje.

Príklad 22: Nech n.p. $X \in \{1, 2, \cdots, 10\}$ a $P(X = i) = 0,1$, pre $i = 1, 2, \cdots 10$. Nájdite Me a Q_L.

Príklad 23: Nech n.p. X pri hode regulárnou hracou kockou predstavuje počet bodiek. Vypočítajte $E(X), D(X)$, šikmosť a špicatosť.

Príklad 24: Vedenie fakulty sa rozhodlo odmeniť študentov za skúšku z predmetu Matematika podľa nasledujúceho pravidla:

Známka zo skúšky	A	B	C	D	E
Výška odmeny	25	15	10	5	0
Pravdepodobnosť	$0,1$	$0,15$	$0,25$	$0,2$	$0,3$

Tab. 4: Pravidlá pre odmeňovanie (Pr. 24)

V ročníku je 100 študentov. Koľko EUR asi budú potrebovať v nasledijúcom roku, ak predpokladajú, že výsledky zo skúšky budú zodpovedať predchádzajúcim ročníkom?

Príklad 25: Náhodná premenná X nadobúda hodnoty x_1, x_2 a $P(X = x_1) = p$. Vypočítajte $E(X)$ a $D(X)$.

Príklad 26: Hádžeme hracou kockou dovtedy, kým nepadne číslo 6. a) Aká je pravdepodobnosť, že pokus sa skončí v 10-tom hode? b) Aká je pravdepodobnosť, že pokus sa skončí v nepárnom hode?

Príklad 27: Hádžeme hracou kockou a náhodná premenná X bude predstavovať počet bodiek pri jednom hode. Vypočítajte $E(X)$ a $D(X)$.

Príklad 28: V krúžku je 25 študentov, z toho 15 absolventov gymnázia. Náhodne vyberieme 5 študentov. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi budú traja študenti gymnázia?

Príklad 29: Ak $X \sim Ro(a, b)$ vypočítajte $E(X)$, $D(X)$, x_{Me}, α_3 a γ_4.

Príklad 30: V ročníku je 100 študentov, sú to absolventi gymnázia alebo priemyslovky. Všetci robili skúšku z MSA. Označme: A–absolv. gymnázia; B – uspel na skúške, C – uspel II.termíne.
a) Slovne sformulujte javy : $B \cup C$, $A \cap B^c$;
b) Vypočítajte pravdepodobnosti javov: B, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap A^c$;
c) Zistite, či sú nasledujúce dvojice udalostí nezávislé: (A, C), (C, B^c)
d) Náhodne vyberieme 5 študentov. Aká je pradvepodobnostť, že všetci piati budú z rovnakého typu školy?
e) Náhodne vyberieme 5 absolventov gymnázia.. Aká je pradvepodobnosť, že všetci piati rovnako dopadli na skúške?
Tabuľka relatívnych početností:

škola/výsledok	Uspel I.ter.	Uspel II.ter.	Neuspel
Gymnázium	$0,25$	$0,1$	$0,05$
Priemyslovka	$0,3$	$0,2$	$0,1$

Príklad 31: Nech X je n.p. a funkcia f_X je definovaná nasledovne:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{4} & 0 < t \leq b \\ 0 & t \notin (0, b]. \end{cases}$$

a) nájdite číslo b tak, aby f_X bola funkciu hustoty n.p. X;
b) vypočítajte hodnotu dist. funkcie $F_X(0,5 \cdot b)$ a $E(X)$;
c) vypočítajte $P(0,2 \cdot b < X \leq 0,5 \cdot b)$.

Príklad 32: Pravdepodobnosť, že 6 padne pri hode falošnou kockou je 0,1. Kockou hádžeme dovtedy, kým padne 6 (úspešný hod). Náhodná premenná je počet neúspešných hodov. Vypočítajte pravdepodobnosť, že kockou budeme hádzať aspoň 3 krát?

Príklad 33: Nech (X_1, X_2, X_3, X_4) je náh. výber z $N(2,1)$ a $Z = X_1 - X_2 + X_3 - X_4$. a) Aké pravd. rozdel. má n.p. Z? Vypočítajte jeho parametre.
b) Nájdite číslo u, pre ktoré platí: $P(Z > u) = 0,95$.

Príklad 34: Hádžme 3× mincou a máme dve pravidlá: Z je rozdiel "počet hláv mínus počet znakovä Y je "počet znakov".

1. Nájdite združené rozdelenie pravdepodobnosti pre Z, Y a ich marginálne rozdelenia pravdepodobnosti.
2. Vypočítajte korelačný koeficient $\rho(Z, Y)$.

Príklad 35: Autobus MHD chodí v pravidelných 10 minútových intervaloch. Nech n.p. X predstavuje dobu čakania na autobus, ak cestujúci príde na zastávku náhodne. Vypočítajte:

a) pravdepodobnosť, že náhodný cestujúci bude čakať najviac 7 minút;

b) pravdepodobnosť, že cestujúci bude čakať viac ako 3 minuty a menej ako 8 minút;

c) strednú hodnotu a rozptyl času čakania cestujúceho na autobusovej zastávke.

Príklad 36: Použite pravidlo $k-$sigma pre n.p $X \sim N(2,9)$ a $k = 1, 2, 3$.

Príklad 37: Nech $X_1 \sim N(1,4)$ a $X_2 \sim N(2,9)$ sú nezávislé náhodne premenné. Vypočítajte, ak máte k dispozícii len tabuľky $N(0,1)$ (str. **??**, tab. **??**):
$P(4 < X_1 - 2X_2 \leq 8)$.

Príklad 38: Hádždeme kockou dvakrát. Máme dve pravidlá: pri prvom hode máme pravidlo X a pri druhom pravidlo Y. $X(2) = X(4) = X(6) = 0$, a $X(1) = X(3) = X(5) = 1$, $Y(1) = Y(2) = 1$ a $Y(3) = Y(4) = Y(5) = Y(6) = 0$. Nájdite

a) $f_{X,Y}$, $F_{X,Y}(0,1)$;

b) $E(X \cdot Y)$;

c) $cov(X,Y)$, $\rho(X,Y)$;

d) $D(X+Y)$, $D(2X-Y)$ a $cov(2X-Y, X+2Y)$;

e) vypočítajte $\mathbf{\Sigma_Z}$ ak $\mathbf{Z} = (2X-Y, X+2Y)^T$.

Príklad 39: [2] Háždeme kockou. Náhodná premenná X priradí číslam ≥ 3 hodnotu 1 a číslam ≤ 4 hodnotu -1. Náhodná premenná Y priradí párnemu číslu hodnotu 2 a nepárnemu 0.

1. Nájdite združené rozdelenie pravdepodobností f_{XY} a marginálne rozdelenia pravdepodobnosti.
2. Vypočítajte $P(X > 0,5;\ Y < 1)$.
3. Zistite, či sú náhodné premenné X, Y nezávislé
4. Vypočítajte kovarianciu a korelačný koeficient medzi X a Y.

[2] kovariancia a korelácia nie pre M3 a M4

5. Vypočítajte kovariančnú maticu pre náhodný vektor (X, Y).
6. Kedy sa korelačný koeficient rovná $\{1; -1; 0\}$?

Príklad 40: V urne máme 12 loptičiek označených $1, 2, 3$, tak, že 5 z nich je označených číslom 1, číslom 2 sú označené 4 a zvyšné číslom 3. Ťaháme postupne po jednej loptičke. Vytiahnutú loptičku nevraciame do urny. Toto opakujeme dovtedy, kým urna nebude prázdna. Aká je pravdepodobnosť, že ich vytiahneme v poradí $1, 2, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3$?

Príklad 41: V urne máme 12 loptičiek označených $1, 2, 3$, tak, že 5 z nich je označezných číslom 1, 4 sú označené číslom 2 a zvyšné číslom 3. Ťaháme postupne po jednej loptičke. Vytiahnutú loptičku nevraciame do urny. Toto opakujeme 4 krát. Aká je pravdepodobnosť, že všetky budú označené číslom 1?

Príklad 42: Máme udalosti A a B. Nech $P(A) = 0,3$ a $P(B) = 0,6$. Nech $0 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$.
a) Nájdite intervaly, do ktorých padnú hodnoty $P(A|B)$, $P(B|A)$.
b) Môžu byť A, B navzájom nezávislé?

Príklad 43: Bayesová formula: Priestor náhodných udalostí je rozdelený na 5 častí $H_1, \ldots, H_5$ (navzájom sa vylučujúcich) a je daná náhodná udalosť A. Ak poznáme $P(A|H_i)$ a $P(H_i)$ pre $i = 1, \ldots, 5$ ako vypočítame $P(A)$ a $P(H_3|A)$?

Príklad 44: V ročníku je 100 študentov, ktorí sú rozdelení do piatich skupín. Vypočítajte koľko dievčat je v ročníku. Ak náhodne vyberieme jedno dievča, aká je pravdepodobnosť, že patrí do tretej skupiny? Rozdelenie študentov je v tabuľke 5:

skupiny	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
percento študentov v skupine	10%	30%	10%	20%	30%
percento dievčat v skupine	50%	10%	10%	0%	10%

Tab. 5: Študenti (Pr. 44)

Príklad 45: V jednej krabici je 10 modrých a 5 červených balónov. V druhej krabici je osem bielych a 12 modrých balónov.
a) Náhodne si zvolíme jednu krabicu a vyberieme z nej 1 balón. Aká je pravdepodobnosť, že nebude modrý?
b) Náhodne vyberieme jednu krabicu. Aká je pravdepodobnosť, že z nej vytiahnutý balón bude biely?
c) Z oboch krabíc vyberieme po jednom balóne. Aká je pravdepodobnosť, že oba budú modré?

Príklad 46: V lietadle je 20% cestujúcich zo SR. Je známe, že 60% obyvateľ ov SR pije po obede pivo, kým obyvatelia iných štátov vypijú pivo po obede len v 20%. a) Aké percento cestujúcich v lietadle neupredostňuje pivo po obede?
b) Cestujúci si po obede vypýta pivo. S akou pravdepodobnosťou je to občan SR?

Príklad 47: Je známe, že 25% obyvateľstva je ľavákov. Aká je pravdepodobnosť, že na seminári kde je 30 účastníkov sú maximálne traja ľaváci?

Príklad 48: Nikto nie je neomylný: obvodný lekár určí v 50% prípadoch správnu diagnózu, v 20% prípadoch nesprávnu diagnózu a v 30% prípadoch odporučí pacienta na vyšetrenie k špecialistovi na polikliniku. Špecialista určí v 60% správnu diagnózu, v 15% nesprávnu a pri 25% pošle pacienta na konziliárne vyšetrenie k primárovi. Primár určí správnu diagnózu v 85% a nesprávnu v 15%. a) Aká je pravdepodobnosť, že obvodný lekár určí diagnózu správne?
b) Aká je pravdepodobnosť, že pacient bude mať nesprávne určenú diagnózu?

Príklad 49: Máme tri košíky. Každý z troch košíkov obsahuje jednu bielu a dve čierne guľôčky. Z prvého košíka náhodne vyberieme guličku a vložíme do druhého. Z druhého košíka vybierieme náhodne jednu guličku a vložíme do tretieho. Aká je pravdepodobnosť, že z tretieho košíka náhodne vytiahneme čiernu guličku?

Príklad 50: Dva závody vyrábajú okenné rámy. Prvý závod vyrába 45% celkovej produkcie, druhý 55%. Z produkcie prvého závodu: 90% I.kategórie, 10% II. kategórie; druhého závodu: 95% I. kategórie, 5% II. kategórie, Určte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný rám je I. kategórie.

Príklad 51: Päť krát hádžem mincou. N.p. X je „počet hláv mínus počet znakov".
a) Aké hodnoty môže nadobúdať n.p. X.
b) Napíšte všetky elementárne udalosti pre prípad $X(\omega) = 3$.

Príklad 52: N.p. X je rozdiel "počet hláv mínus počet znakov"pri trojnásobnom hode mincou.
a) Aké hodnoty môže n.p. X nadobúdať?
b) Nájdite pre n.p. X príslušné elementárne udalosti.
c) Určite rozdelenie pravdepodobnosti a distribučnú funkciu pre n.p. X.

Príklad 53: N.p. X nadobúda hodnoty z množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$ a jej pravdepodobnostné rozdelenie je dané v tabuľke:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	$0,1$

Vypočítajte strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$.

Príklad 54: Advokátova obhajoba je úspešná s pravdepodobnosťou $p = 0,8$. Pri úspešnej obhajobe dostane 2000EUR, pri neúspešnej obhajobe musí zaplatiť súdne trovy vo výške 500EUR.
a) Aký vysoký je priemerný zisk obhájcu?
b) Keby obhajca vydal 800EUR navyše na prípravu obhajoby, aký by bol jeho očakávaný zisk?

Príklad 55: Hráč si zvolí číslo medzi $1-6$ a hodí tromi kockami. Ak všetky 3 kocky ukážu to isté zvolené číslo, vyhrá 3EUR. Ak toto číslo ukážu 2 kocky, vyhráva 2EUR a ak iba 1 kocka vyhráva 1EUR. Ak ani jedna kocka neukáže zvolené číslo, potom musí zaplatiť 1EUR. Náhodná premenná X znamená výšku výhry.
a) Aké hodnoty nadobúda n.p. X?
b) Zistite pravdepodobnostné rozdelenie n.p. X a vypočítajte jej strednú hodnotu a disperziu.

Príklad 56: Semafór na križovatke ukazuje 25% času červenú. Aká veľká je pravdepodobnosť, že z 5 náhodne prechádzajúcich áut
a) nemusí čakať ani jedno auto;
b) musí čakať nanajvýš jedno auto;
c) musia čakať práve tri autá;
d) musia čakať maximálne dve autá?

Príklad 57: Pri majstrovstvách v tenise hrá hráč A proti hráčovi B toľko po sebe idúcich setov, kým jeden z hráčov nevyhrá tri sety. Výsledky setov sú od seba nezávislé a hráč A vyhrá set s pravdepodobnosťou $0,6$. N.p. X označuje počet hraných setov.
a) Určte hodnoty n.p. X a nájdite elementárne udalosti prislúchajúce $X = 4$.
b) Určte rozdelenie pravdepodobnosti n.p. X.
c) S akou pravdepodobnosťou sa zápas skončí po piatom sete?
d) Aká je pravdepodobnosť, že na víťazstvo jedného z nich sú potrebné maximálne 4 sety? e) Aká je pravdepodobnosť, že na víťaztsvo hráča A sú potrebné maximálne 4 sety?

Príklad 58: Máme dané rozdelenie pravdepodobnosit n.p. X:

$$P_X = \{(0,\, 0,1), (1,\, 0,2), (2,\, 0,3), (3,\, 0,4)\}\,.$$

a) Nakreslite graf distribučnej funkcie n.p. X. b) Zistite modus. c) Určte strednú hodnotu a disperziu n.p. X.

Príklad 59: Udalosť A sa vyskytuje pri experimente s pravdepodobnosťou $P(A) = 0,4$. Pokus sa opakuje dovtedy, kým sledovaná udalosť A nastane. Aká je pravdepodobnosť, že budeme potrebovať zopakovať 3?

Príklad 60: N.p. X je určená funkciou hustoty $f_X(t)$

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & t \notin < 0, 2 > . \end{cases}$$

a)Vypočítajte distribučnú funkciu $F_X(x)$. Načrtnite graf distribučnej funkcie a funkcie hustoty n.p. X.
b) Nájdite také čísla a, b aby platilo: $P(X < a) = 0,01$, $P(X \geq b) = 0,19$. Aká je pravdepodobnosť, že n.p. X nadobudne hodnotu z intervalu $\langle a,\, b\rangle$? Vyznačte na grafe distribučnej funkcie a na grafe funkcie hustoty.

Príklad 61: V urne je 10 guličiek, z toho 3 biele a 7 modrých. Náhodne vyberieme 2 guličky a nevrátime naspäť do urny. V nasledujúcom ťahu vyberieme jednu guličku.
a) Aká je pravdepodobnosť, že v druhom ťahu vyberieme bielu guličku?
b) V druhom ťahu sme vybrali modrú guličku. Aká je pravdepodobnosť, že v prvom ťahu sme vybrali jednu modrú a jednu bielu guličku?

Príklad 62: Infekcia sa prenáša kontaktom. Pravdepodobnosť prenosu infekcie na zdravého človeka pri prvom kontakte je $0,4$.
a) Jeden infikovaný má kontakt s piatimi zdravými ľuďmi. Určite rozdelenie n.p. X, pričom n.p. X znamená počet osôb, ktoré ochorejú.
b) Vypočítajte $E(X)$, $D(X)$, $P(X = 0)$, $P(X < 3)$.

Príklad 63: Prieskum verejnej mienky ukázal, že 80% obyvateľov podporuje zákaz výstavby v lokalite Včelín. Aká je pravdepodobnosť, že z dvadsatich náhodne oslovených obyvateľov je maximálne 12 za zákaz výstavby v lokalite Včelín?

Príklad 64: Len 30% ľudí vo veľkom meste si myslí, že verejná doprava v meste (MHD) je uspokojivá. Náhodne vyberiem desať osôb.
a) Aká je pravdepodobnosť, že najviac 5 z nich si myslí, že MHD je uspokojivá?
b) Aká je pravdepodobnosť, že práve 6 si myslí, že MHD je uspokojivá?

Príklad 65: Basketbalový hráč má osobnú štatistiku úspešných hodov 70%.
a) Aká je pravdepodobnosť, že pri desiatich hodoch trafí 8 krát?
b) Aká je pravdepodobnosť, že pri sto pokusoch trafí menej ako 60 krát?

Príklad 66: V krabici s 20-timi fixkami na bielu tabuľu sa nachádzajú 3 vadné. Učiteľ si vyberie 5. N.p. X predstavuje počet vadných fixiek.
a) Aké je rozdelenie pravdepodobnosti n.p. X?
b) Aká je pravdepodobnosť, že minimálne jedna z jeho piatich fixiek je vadná?

Príklad 67: Vypočítajte $E(X)$ a $D(X)$ n.p. X a nakreslite graf rozdelenia pravdepobodnosti a graf distribučnej funkcie, ak má nasledujúce rozdelenie pravdepodobnosti:

$$P_X = \{(2,\, 0,1), (3,\, 0,3), (4,\, 0,3), (5,\, 0,2), (6,\, 0,1)\} .$$

Príklad 68: Nech X je n.p. a

$$P_X = \{(-1,\, 0,1), (-1/2,\, 0,2), (0,\, 0,4), (1,\, 0,2), (2,\, 0,1)\} .$$

Vypočítajte $\rho(X, X^2)$.

Príklad 69: Hádžme kockou a n.p. X, Y sú definované:
$X = 1$ padlo párne číslo, v opačnom prípade $X = 0$.
$Y = 0$ padlo číslo menšie ako 4, $Y = 1$ ak padlo číslo 4 alebo 5 a $Y = 2$ ak padlo č. 6.
Zistite, či n.p. X, Y sú nezávislé, vypočítajte $cov(X, Y)$ a podmienenú pravdepodobnosť $P(X > 0|Y < 2)$.

Príklad 70: V urne je 10 guličiek, z toho 3 biele a 7 modrých. Náhodne vyberieme tri guličky. Označme X počet vybraných bielych guličiek a Y počet vybraných modrých guličiek.;
a) Vypočítajte združené rozdelenie náhodného vektora (X, Y).
b) Vypočítajte kovariančnú maticu náhodného vektora (X, Y).
c) Vypočítajte $D(2X + Y)$.

Príklad 71: V jednej krabici je 10 modrých a 5 červených balónov. V druhej krabici je osem bielych a 12 modrých balónov.
a) Náhodne si zvolíme jednu krabicu a vyberieme z nej 1 balón. Aká je pravdepodobnosť, že nebude modrý?
b) Náhodne vyberieme jednu krabicu. Aká je pravdepodobnosť, že z nej vytiahnutý balón bude biely?
c) Z oboch krabíc vyberieme po jednom balóne. Aká je pravdepodobnosť, že oba budú modré?

Príklad 72: N.p. X je určená funkciou hustoty $f_X(t)$ s neznámou konštantou a

$$f_X(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t \leq a \\ 0 & t \notin (0,\, a]. \end{cases}$$

a) Vypočítajte číslo a.
b) Vypočítajte distribučnú funkciu F_X.
c) Vypočítajte $E(X)$.
d) Vypočítajte $P(-1 < X < 1)$ a vyznačte na grafe funkcie hustoty.

Príklad 73: Traja hráči X, Y, Z hrajú spoločenskú hru a majú jednu kocku. Pre každého hráča pri jednom hode kockou platia iné pravidlá uvedené v tab. 7. Vypočítajte kovariančnú maticu Σ náhodného vektora (X, Y, Z), $E(X + 2Y + Z)$ a $D(X + 2Y + Z)$.

Ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
X	-1	-1	0	0	1	1
Y	1	1	0	0	-1	-1
Z	-1	-1	1	1	0	0

Tab. 6: Pravidlá pre hračov X, Y, Z.

Príklad 74: V urne je 10 guličiek, z toho 3 biele a 7 modrých. Náhodne vyberieme guličku a nevrátime naspäť do urny. V nasledujúcom ťahu opäť vyberieme jednu guličku. Označme X počet vybraných bielych guličiek a Y počet vybraných modrých guličiek.;
a) Vypočítajte združené rozdelenie náhodného vektora (X, Y).
b) Vypočítajte kovariančnú maticu náhodného vektora (X, Y)
c) Vypočítajte $D(2X + Y)$.

Príklad 75: Roboty boli v prvých troch mesiacoch roku 2000 veľmi zlej kvality. Vyrobili 500 kusov a z toho bolo 40% chybných. Po sprísnení kontroly vo zvyšných mesiacoch roku 2000 vyrobili 1500 kusov a nepodarkovosť sa znížila na 10%. Kúpili sme robota z r.2000.
a) Aká je pravdepodobnosť, že je chybný?
b) Pri kontrole sme zistili, že je v poriadku. Aká je pravdepodobnosť, že ide o robota vyrobeného v prvých troch mesiacoch roku 2000?

Príklad 76: N.p. X je určená funkciou hustoty $f_X(t)$ s neznámou konštantou a

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & 1 \leq t \leq a \\ 0 & t \notin (1,\, a). \end{cases}$$

a) Vypočítajte číslo a.
b) Vypočítajte distribučnú funkciu F_X a na grafe funkcie F_X vyznačte $P(X \leq \frac{a}{2})$.
c) Vypočítajte $E(X)$.
d) Vypočítajte $P(0 < X \leq 2)$ a vyznačte na grafe funkcie hustoty.

a) Traja hráči X, Y, Z hrajú spoločenskú hru a majú jednu kocku. Pre každého hráča pri jednom hode kockou platia iné pravidlá uvedené v tab. 7.
Vypočítajte kovariančnú maticu Σ náhodného vektora (X, Y, Z), $E(X + 2Y + Z)$ a $D(X + 2Y + Z)$.

Ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
X	-1	-1	0	0	1	1
Y	1	1	0	0	-1	-1
Z	-1	-1	1	1	0	0

Tab. 7: Pravidlá pre hračov X, Y, Z.

2 Štatistika

Príklad 1: Určite, do ktorej skupiny patria nasledujúce skupiny dát:
a) zisk vyjadrený v precentách, priemerné platy v jednotlivých odvetiach, namerané dĺžky hodu guľou, počet bodov jednotlivých študentov na skúške, prietok.
b) pohlavie v skúmanej skupine, farba vlasov, slovné hodnotenie (výbotný, zlý, priemerný), preferovaná farba.

Príklad 2: Určite, do ktorej skupiny patria nasledujúce skupiny dát:
a) zisk vyjadrený v precentách, priemerné platy v jednotlivých odvetiach, namerané dĺžky hodu oštepom, prietok;
b) počet detí v rodine, počet poschodí v rodinných domoch, počet mesiacov v roku, kedy priemerná teplota bola vyššia ako $20\,^oC$.

Príklad 3: Mestská správa sa rozhodla zistiť vyťaženosť križovatiek (kr_i) v meste počas dopravnej špičky (medzi 7:00 – 8:00). Pracovníci počas tohoto časového intervalu zapisovali jednotlivé dopravné prostriedky, ktoré cez križovatky prešli. Výsledky sú zápísané v tabuľke 8.

Križovatka	B	M	OA	AU	NA	Spolu
kr_1	10	5	20	10	5	50
kr_2	0	10	25	8	15	58
kr_3	3	15	50	0	0	68
kr_4	7	1	20	1	5	34
kr_5	8	0	26	5	10	49
kr_6	0	0	29	10	10	49
kr_7	5	1	50	0	6	62
kr_8	2	5	20	0	7	34
kr_9	10	3	21	0	10	44
kr_{10}	5	2	26	15	5	53
spolu	50	42	287	49	73	501

Tab. 8: kr_i i-ta križovatka, $i = 1, 2, 3, \cdots, 10$, B – bicykel, M – motorka, OA – osobné auto, AU – autobus, NA – nákladné auto. (Pr 3)

Nájdite modus sledovaného kvalitatívneho znaku – typ dopravnééého prostriedku prechádzajúci križovatkou kr_8, nájdite modus sledovaného kvalitatívneho znaku – typ križovatky z pohľadu počtu prechádzajúcich bicyklov a nájdite modus sledovaného kvalitatívneho znaku – typ križovatky – celkový počet dopravných prostriedkov prechádzajúcich cez danú križovatku.

Príklad 4: U náhodne vybraných študentov sa zisťovali dva údaje: pohlavie a typ ubytovania. Výsledky sú uvedené v tabuľke 9 (frekvenčná tabuľka dvojstupňového triedenia):

$^{Pohlavie}/_{ubytovanie}$	I	P	D	Spolu
M	6	3	2	11
Ž	2	2	5	9
Spolu	8	5	7	20

Tab. 9: Pohlavie: muž (M), žena (Ž). Ubytovanie: internát (I), privát (P), doma (D). (Pr. 4)

Nájdite modus pre premenné: ubytovanie a pohlavie.

Príklad 5: Na teste zo štatistiky sa zúčastnilo 21 študentov. Odpovedali na 10 otázok a mohli za každú otázku získať 0 – nesprávna odpoveď alebo 1 bod – správna odpoveď. Výsledky testov sú sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke 10:

body	0	4	5	6	7	8	9	10
n_i	1	2	5	6	1	4	1	1
f_i	1/21	2/21	5/21	6/21	1/21	4/21	1/21	1/21
F_i	1/21	3/21	8/21	14/21	15/21	19/21	20/21	21/21

Tab. 10: Frekvenčná tabuľka (Pr. 5).

Urobte krabicový graf a zistite, či súbore sa nachádzajú extremálne hodnoty.

Príklad 6: Zisťoval sa počet detí v rodine. Prieskum bol urobený v 200 rodinách. Výsledky sú v nasledujúcej frekvenčnej tabuľke:

Počet detí v rodine	0	1	2	3	4
Počet rodín	50	67	23	15	45

a) Zistite modus., medián, dolný a horný kvartil. b) Načrtnite krabicový graf. c) Vypočítajte odhad strednej hodnoty a disperzie.

Príklad 7: Výsledky z Matematickej štatistiky po dvoch termínoch boli nasledujúce:

Výsledok skúsky	A	B	C	D	E	FX
známka	1	2	3	4	5	6
početnosť	8	14	21	29	35	14

a) Nakreslite histogram relatívnych početností.
b) Zistite modus, median, dolny a horny kvartil pre známku.
c) Nakreslite krabicový graf pre znaku.

Príklad 8: Máme v urne 10 žetónov, z toho 6 bielych a 4 červené. Ak vytiahneme jeden žetón, tak pravdepodobonosť toho, že bude biely, je $0,6$ a červený $0,4$. Hráme hru:
Ak vytiahneme biely zaplatíme do banku 5 EUR a ak vytiahneme červený, dostaneme 3 EURA. Týmto definujeme n.p. $X \to \{3, 5\}$

$$X(\text{červený}) = 3, \quad X(\text{biely}) = -5.$$

Výsledky náhodného výberu[3] rozsahu $n = 10$ sú uvedené v tabuľke 11:

Číslo pokusu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Výsledok pokusu	-5	3	3	3	-5	-5	3	-5	-5	-5

Tab. 11: Realizácia náhodného výberu rozsahu 10 (Pr. 8).

Vypočítajte $E(X)$, $D(X)$ a ich odhady $\overline{X}$, S_0^2, S^2.

Príklad 9: Predpokladajme, že firma, ktorá sa zaoberá výrobou výliskov z plastických hmôt, chce poznať účinok technologického procesu na kmitanie podlahy vo výrobnej hale. Ohrozenie podlahy sa hodnotí pomocou vibrácií, ktorými sa podlaha rozkmitá v dôsledku rázov pri lisovaní. Meranie sme opakovali 20-krát. Z nameraných hodnôt vibrácií sme vypočítali bodový odhad strednej hodnoty μ ako aritmetický priemer nameraných údajov

$$\overline{X} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = 1,25$$

a vieme, že $\sigma^2 = 0,81$. Nájdite 95%-tný obojstranný interval spoľahlivosti pre μ a intepretujte výsledok.

[3] Po uskutočnení prvého ťahu sme vytiahli biely žetón. Realizovali sme n.p. X_1, ktorá má také isté rozdelenie ako X. Výsledok si zapíšeme a žetón vložíme naspäť do urny a opäť ťaháme žetón. $\cdots$

Príklad 10: Riešite problém z Príkladu 9, ale teraz nepoznáme σ^2 a hodnota $0,81$ je iba jeho odhad ($S^2 = 0,81$). Porovnajte výsledky oboch príkladov.

Príklad 11: V laboratóriu sme testovali prístroj na meranie teploty vody. Voda mala presne $10\,^\circ\ C$. Urobili sme 20 nezávislých meraní a vypočítali sme, že $S_0^2 = 1,21$. Vypočítajte 95 %-né (obojstranný a jednostranné) intervaly spoľahlivosti pre rozptyl používaného meracieho prístroja a interpretujte ich.

Príklad 12: Potrebovali sme zistiť rozptyl teploty vody. Urobili sme 20 nezávislých meraní a vypočítali sme, že priemerná teplota je $\overline{x} = 20,5\,^\circ\ C$ a $S_1^2 = 2,24$. Vypočítajte 95 %-ný jednostranné intervaly spoľahlivosti pre rozptyl teploty vody a interpretujte ich.

Príklad 13: Podľa výsledkov celoslovenského prieskumu sa zistilo, že 69, 2 % obyvateľov pije na raňajky kávu. Náhodne sme vybrali 62 vysokoškolských učiteľov a z nich 37 uviedlo, že na raňajky pije kávu. Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ zistite , či podiel učiteľov pijúcich na raňajke kávu je taký istý, ako v celej dospelej populácii.

Príklad 14: Otestujeme na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či hracia kocka je regulárna. Urobili sme 600 pokusov. Početnosti sú uvedené v nasledujúcej tabuľke

j	1	2	3	4	5	6
n_j	104	92	109	93	101	101

Príklad 15: Pokus pozostával z piatich nezávislých hodov mincou a náhodná premenná X je počet padnutých znakov. Urobili sme 30 pokusov. Výsledky sú uvedené vo frekvenčnej tabuľke. Predpokladáme, že $X \sim Bi(5; 0,5)$. Na hladine $\alpha = 0,05$ otestujte, či náš predpoklad je správny.

j	1	2	3	4	5	6
X	0	1	2	3	4	5
n_j	1	5	5	10	8	1

Príklad 16: Merali sme teplotu vody v podzemnom prameni. Merania sme nezávisle po sebe zopakovali 100-krát. Predpokladáme, že údaje pochádzajú z $N(12; 1)$. Na hladine $\alpha = 0,05$ otestujte, či náš predpoklad je správny. V naledujúcej tabuľke je uvedený výsledok intervalového triedenia:

j	1	2	3	4	5	6	7
tr. int.	≤ 10	$(10]$	$(10,5]$	$(11]$	$(11,5]$	$(12]$	$> 12,5$
n_j	3	7	9	16	18	14	33

Príklad 17: (Pr. 16) Namerané údaje z príkladu 16 spracujte pomocou K-S testu.

Príklad 18: Urobilo sa 20 meraní obsahu dusíka vo vodnej nádrži. Vypočítali sme obojstranné konfidenčné intervaly pre stredú hodnotu a rozptyl na rôznych hladinách významnosti $\alpha \in \{0,1; 0,05; 0,01\}$. Priraďte jednotlivým intervalom ich hladiny významnosti a rozhodnite či stredná hodnota sa rovná $0,253$ oproti alternatíve, že sa nerovná $0,253$ a či rozptyl sa rovná $0,025$ oproti alternatíve, že sa nerovná $0,024$ na jednotlivých hladinách významnosti. Aký aritmetický priemer pre obsah dusíka bol vypočítaný?

IS pre μ	α_μ	$H_0 : \mu = \mu_0$	IS pre σ^2	α_{σ^2}	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
$(0,22; 0,26)$			$(0,018; 0,023)$		
$(0,21; 0,27)$			$(0,017; 0,025)$		
$(0,23; 0,25)$			$(0,009; 0,032)$		

Príklad 19:
Vedenie fakulty sa rozhodlo, že odmení študentov za výsledok zo skúsky z Matematiky 1 (tabuľka 13).

V ročníku je 100 študentov. Pre plánovanie financií je potrebné vedieť, koľko EUR budú asi potrebovať, ak predpokladáme, že výsledky zo skúšky budú zodpovedať predchádzajúcim ročníkom.

IS pre μ	α_μ	$H_0 : \mu = \mu_0$	IS pre σ^2	α_{σ^2}	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
$(0,22;\ 0,26)$	$0,05$	NH0	$(0,018;\ 0,023)$	$0,1$	ZH0
$(0,21;\ 0,27)$	$0,01$	NH0	$(0,017;\ 0,025)$	$0,05$	ZH0
$(0,23;\ 0,25)$	$0,1$	ZH0	$(0,009;\ 0,032)$	$0,01$	NH0

Tab. 12: NH0 – nezamietame H_0 a ZH0 – zamietamme H_0

Výsledok skúsky	A	B	C	D	E
X: Odmena v EUR	25	15	10	5	0
P_X	$0,1$	$0,15$	$0,25$	$0,2$	$0,3$

Tab. 13: P_X je pravdepodobnosť s akou známkou študent ukončí skúšku. Pravdepodobnosť sa zistila dlhodobým sledovaním výsledkov skúšky z Matematiky. Do úvahy sa nebrala známka FX.

Príklad 20: V podniku sa vyrábajá piesty. Ich priemer (rozmer) je normou stanovený na 11,5cm a prípustá štandardná odchýlka = 0,25cm. Náhodne sme vyberali 15 piestov. Ich priemerný rozmer bol 11,55 cm so štandardnou odchýlkou 0,26cm. Overte na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či môžeme tvrdiť, že priemer piestov sa dodržuje alebo nie a či štandardná odchýlka je v norme, alebo nie? Čo je p-hodnota?

Príklad 21: U 100 užívateľov aplikácie SKUŠKA sa sledoval počet kliknutí na logo firmy XXX počas jedného dňa. Nájdite dolný a horný kvartil, medián, modus a zostrojte krabicový (box) graf. Nájdite extremálnu hodnotu (outlayer), ak existuje. Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke:

1	2	3	4	5	6	10
10	20	30	10	10	15	5

Príklad 22: Generátor náhodných čísel vygeneroval 100 čísel z množiny $\{0, 1, 2, 3\}$. Otestujte na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či ide o náhodný výber z $Bi\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$. Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke:

0	1	2	3
10	40	40	10

Príklad 23: Priemerná teplota disku po hodine prevádzky počítača bola $\overline{x} = 25°C$ a $s^2 = 1,44$, pokus sa opakoval $25\times$.

Vypočítajte 95%-ný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu. a otestuje na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či stredná hodnota je rovná $23°C$ $(\mu_0 = 23°C)$, ako tvrdí výrobca, alebo sa nerovná μ_0.

Výrobca naviac udáva, že rozptyl sa rovná $1,21$ $(\sigma_0^2 = 1,21)$. Otestuje na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či výrobca má pravdu, alebo je rozptyl väčší ako σ_0^2.

V oboch prípadoch naformulujte H_0 a H_1!!!!

Príklad 24: Priemerná teplota disku po hodine prevádzky počítača bola $\overline{x} = 25°C$ a $s^2 = 1,44$, pokus sa opakoval $9\times$.
a) Vypočítajte 95%-ný interval spoľahlivosti pre rozptyl.
b) Otestuje na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či roztpyl je menší alebo rovný $1,21°C^2$ $(\sigma_\circ^2 = 1,21°C^2)$, alebo je väčší σ_0^2.
c) Zmenilo by sa rozhodnutie, ak by $\alpha = 0,01$? Svoju odpoveď odôvodnite.

Príklad 25: Nech (X_1, X_2, X_3, X_4) je náh. výber z $N(2, 1)$ a $Z = 2X_1 + X_2 - X_3 - 3X_4$.
a) Aké pravd. rozdel. má n.p. Z? Vypočítajte jeho parametre?
b) Nájdite číslo u, pre ktoré platí: $P(Z > u) = 0,95$.

Príklad 26:
1. Pri testovaní na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ p-hodnota vyšla 0,21. Zamietame, alebo nezamietame nulovú hypotézu?
2. Akých chýb sa môžeme dopustiť pri testovaní štat. hypotéz a aké sú ich vzťahy.

Príklad 27: Priemerná teplota disku po hodine prevádzky počítača bola $\overline{x} = 25°C$ a $s^2 = 1,44$, pokus sa opakoval $9\times$.
a) Vypočítajte 95%-ný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.
b) Otestuje na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či stredná hodnota je rovná $23°C$ ($\mu_0 = 23°C$), ako tvrdí výrobca, alebo sa nerovná μ_0. Sformulujte H_0 a H_1.
c) Zmenilo by sa rozhodnutie, ak by $\alpha = 0,01$? Svoju odpoveď odôvodnite.

Príklad 28: Nech (X_1, X_2, X_3, X_4) je náh. výber z $N(2,1)$ a $Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$.
a) Aké pravd. rozdel. má n.p. Z? Vypočítajte jeho parametre?
b) Nájdite číslo u, pre ktoré platí: $P(Z < u) = 0,95$.

Príklad 29: Generátor náhodných čísel vygeneroval 100 čísel z množiny $\{0,1,2,3\}$. Otestujte na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či ide o náhodný výber z $Bi\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Výsledky sú v tabuľke 14:

0	1	2	3
10	40	40	10

Tab. 14: Výsledky náhodného výberu

Príklad 30: Chceli sme zistiť, ako ľudia odhadujú jednu minútu. Pokus sme urobili na desiatich respodentoch $n = 10$. Ideme riešiť úlohu:

$$H_0 : \widetilde{X} = 60 \qquad H_1 : \widetilde{X} \neq 60$$

(Môže byť medán je 60 sekúnd?) Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke (v sekundách). Výsleky sú usporiadané podľa veľkosti.

Respondent	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
odhad x_i	45	48	50	51	53	55	56	58	63	68

Príklad 31: Vedenie obchodnej firmy zaujímalo, či je rozdiel medzi výsledkami ich zamestnancov (predajcov) v jednotlivých skupinách štatisticky významný. Zamestanci boli rozdelení do nasledujúcich skupín podľa oblastí, v ktorých pôsobia: A (Staré mesto); B (Petržálka); C (Dúbravka); D (Ružinov). V každej časti pôsobilo 20 dílerov. $\overline{X}_i$ je priemerný zisk a s_i je odhad smerodajnej odchylky v skupine za týždeň, $i = 1,2,3,4$.

mestksá časť	$\overline{X}_i$	s_i
A (Staré mesto)	$1253,2$ EUR	150 EUR
B (Petržálka)	$1085,4$ EUR	148 EUR
C (Dúbravka)	$1120,2$ EUR	152 EUR
D (Ružinov)	$1990,2$ EUR	170 EUR

Zistite, či je štatisticky významný rozdiel medzi jednotlivými skupinami dílerov.