## Príklady pravdepodobnosť a štatistika ——- O. Nánásiová

**Príklad** 1: Nech $\Omega = \{1,2,3\}$. Napíšte všetky prvky $2^\Omega$.

**Riešenie pr.** 1: $2^\Omega = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$.

**Príklad** 2: V ročníku je 100 študentov, z toho 10 z nich má krstné meno Jozef a 15-tim z nich sa krstné meno začína na M. Každý z nich má práve jedno krstné meno. Náhodne vyberieme jedného študenta. Vypočítajte:
a1) Aká je pravdepodobnosť, že sa bude volať Jozef?
a2) Aká je pravdepodobnosť, že krstné meno študenta bude Jozef, alebo sa bude začínať na písmeno M?
a3) Aká je pravdepodobnosť, že krstné meno študenta nebude Jozef a bude sa začínať na písmeno M?
a4) Aká je pravdepodobnosť, že krstné meno študenta nebude Jozef a nebude sa začínať na písmeno M?

**Riešenie pr.** 2: Nech $\Omega$ je množina všetkých študentov z ročníka, $A$ je množina tých študentov z ročníka, ktorých krstné meno je Jozef a $B$ je množina všetkých študentov z ročníka, ktorých krstné meno sa začína na písmeno M. Vieme, že

$$|\Omega| = 100, \quad |A| = 10, \quad |B| = 15, \quad A \cap B = \emptyset$$

a každý zo študentov má rovnakú pravdepodobnosť, že bude vybraný. To znamená, že $P(\{\omega\} = 0,01$, pre $\forall \omega \in \Omega$ a preto platí:
a1) $P(A) = 10/100 = 0,1$.
a2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,1 + 0,15 = 0,25$;
a3) Pretože $A \cap B = \emptyset$, tak $B \subset A^c$. Teda

$$P(B \cap A^c) = P(B) = 0,15;$$

a4) Pretože $B^c \cap A^c = (A \cup B)^c$, tak

$$P(B^c \cap A^c) = 1 - P(A \cup B) = 0,75.$$

**Príklad** 3: Hádžeme hracou kockou, ktorej steny sú označené číslami 1, 2, $\cdots$ , 6 a výsledok nevidíme. Výsledok oznamujú dvaja asistenti $X$ a $Y$ podľa nasledujúcich pravidiel:
$X$ : $A$ ak padne číslo menšie ako 4, $B$ ak padne číslo väčšie ako 3.
$Y$ : $C$ ak padne párne číslo, a $D$ ak padne nepárne číslo.
Popíšte množinu $\Omega$ a vypočítajte $P(\omega)$ pre každé $\omega \in \Omega$.

**Riešenie pr.** 3: Označme $\Omega_0$ množinu všetkých možných výsledkov na hracej kocke. To znamená, že

$$\Omega_0 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

a $P_0(\omega) = 1/6$ pre $\forall \omega \in \Omega_0$. Z hľadiska výsledku hodu teda máme pravdepodobnostný priestor $(\Omega_0, 2^{\Omega_0}, P_0)$.
Ak zapíšeme hlásenie asistentov ako usporiadané dvojice $(X, Y)$, potom $\Omega = \{(A,C), (A,D), (B,C), (B,D)\}$. To znamená, že $|\Omega| = 4$ a

$$\begin{aligned}
P(\{(A,C)\} &= P_0(\{1,2,3\} \cap \{2,4,6\}) = P_0(\{2\}) = \frac{1}{6}, \\
P(\{(A,D)\} &= P_0(\{1,2,3\} \cap \{1,3,5\}) = P_0(\{1,3\}) = \frac{2}{6}, \\
P(\{(B,C)\} &= P_0(\{4,5,6\} \cap \{2,4,6\}) = P_0(\{4,6\}) = \frac{2}{6}, \\
P(\{(B,D)\} &= P_0(\{4,5,6\} \cap \{1,3,5\}) = P_0(\{5\}) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Trojica $(\Omega, 2^\Omega, P)$ je pravdepodobnostný priestor, kde $|\Omega| = 4$ a ak označíme $\omega_1 = (A,C)$, $\omega_2 = (A,D)$, $\omega_3 = (B,C)$ a $\omega_4 = (B,D)$, potom platí

$$P(\omega_1) = P(\omega_4) = \frac{1}{6}, \quad P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{3}.$$

**Príklad 4**: Modifikujme príklad 3 nasledovne: Máme dve kocky a každý z asistentov hlási výsledok na svojej kocke podľa nasledujúcich pravidiel:
$X$ : $A$ ak padne číslo menšie ako 4, $B$ ak padne číslo väčšie ako 3.
$Y$ : $C$ ak padne párne číslo, a $D$ ak padne nepárne číslo.
Popíšte množinu $\Omega$ a vypočítajte $P(\omega)$ pre každé $\omega \in \Omega$.

**Riešenie pr. 4**: Označme $\Omega_X$ a $\Omega_Y$ množiny všetkých možných výsledkov na hracích kockách. Teda $\Omega_X = \Omega_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a pre každé $\omega_X \in \Omega_X$ a pre každé $\omega_Y \in \Omega_Y$ platí:

$$P_X(\omega_X) = P_Y(\omega_Y) = \frac{1}{6}.$$

Máme dva pravdepodobnostné priestory: $(\Omega_X, 2^{\Omega_X}, P_X)$, $(\Omega_Y, 2^{\Omega_Y}, P_Y)$ a platí

$$P_X(A) = P_X(B) = P_Y(C) = P_Y(D) = \frac{1}{2}.$$

Všetky možné výsledky dvoch hodov sú uvedené v tabuľke 1.

| $\Omega_X/\Omega_Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| 5 | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| 6 | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

Tab. 1: Všetky možné výsledky pri hode dvomi kockami (Pr. 4)

Ak zapíšeme hlásenie asistentov ako usporiadané dvojice $(X, Y)$, potom $\Omega = \{(A, C), (A, D), (B, C), (B, D)\}$ a $|\Omega| = 4$. V tabuľke 2 sú uvedené všetky možné prípady:

| $\Omega_X/\Omega_Y$ | $D$ | $C$ | $D$ | $C$ | $D$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $(A, D)$ | $(A, C)$ | $(A, D)$ | $(A, C)$ | $(A, D)$ | $(A, C)$ |
| $A$ | $(A, D)$ | $(A, C)$ | $(A, D)$ | $(A, C)$ | $(A, D)$ | $(A, C)$ |
| $A$ | $(A, D)$ | $(A, C)$ | $(A, D)$ | $(A, C)$ | $(A, D)$ | $(A, C)$ |
| $B$ | $(B, D)$ | $(B, C)$ | $(B, D)$ | $(B, C)$ | $(B, D)$ | $(B, C)$ |
| $B$ | $(B, D)$ | $(B, C)$ | $(B, D)$ | $(B, C)$ | $(B, D)$ | $(B, C)$ |
| $B$ | $(B, D)$ | $(B, C)$ | $(B, D)$ | $(B, C)$ | $(B, D)$ | $(B, C)$ |

Tab. 2: Všetky možné hlásenia asistentov $(X, Y)$ (Pr. 4)

Pretože každá z dvojích v tabuľke má rovnakú pravdepodobnosť nastatia, tak

$$P((A, C)) = P((A, D)) = P((B, C)) = P((B, D)) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Trojica $(\Omega, 2^\Omega, P)$ je pravdepodobnostný priestor, kde $|\Omega| = 4$ a ak označíme $\omega_1 = (A, C)$, $\omega_2 = (A, D)$, $\omega_3 = (B, C)$ a $\omega_4 = (B, D)$, potom platí

$$P(\omega_1) = P(\omega_4) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{4}.$$

**Poznámka 1**: Porovnajte príklady 3 a 4.

**Príklad 5**: Napíšte všetky trojciferné čisla, ktoré sa dajú zostaviť z čísel $1, 2, 3$ tak, že každé číslo použijeme práve raz.

**Riešenie pr. 5**: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

**Príklad** 6: Ak $A = \{1, 2, 3\}$ a $k = 2$, potom množina všetkých dvojíc čísel z množiny $A$, pričom každé číslo môže byť použité najviac jedenkrát, je $\Omega = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ a $|\Omega| = \binom{3}{2} = \frac{3!}{3! \cdot 1!} = 3$.

---

**Príklad** 7: Máme skupinu piatich študentov

$$A = \{\text{Boris (B), Elena (E), Igor (I), Jana (J), Táňa (T)}\}$$

Zistite, koľko dvojíc a koľko trojíc z nich je možno zostaviť a vypíšte ich.

**Riešenie pr.** 7: Pretože $|A| = 5$ a $k_1 = 2$ a $k_2 = 3$. Potom počet všetkých dvojíc je

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

a počet všetkých trojíc je

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Označme $\Omega_1$ množinu všetkých možných dvojíc študentov a $\Omega_2$ množinu všetkých možných trojíc študentov. Potom

$$\Omega_1 = \{BE, BI, BJ, BT, EI, EJ, ET, IJ, IT, JT\}$$
$$\Omega_2 = \{BEI, BEJ, BET, BIJ, BIT, BJT, EIJ, EIT, EJT, IJT\}.$$

---

**Príklad** 8: Ak $A = \{1, 2, 3\}$ a $k = 2$, potom $\Omega = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}\{2, 3\}, \{3, 3\}\}$. $\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3}{2} = 6$.

---

**Príklad** 9: Máme k dispozícii 10 vzoriek vody označených $v_1 \dots, v_{10}$. Náhodne vyberieme 3 vzorky. Aká je pravdepodobnosť, že vyberieme $\{v_1, v_3, v_6\}$?

**Riešenie pr.** 9: Množina $A = \{v_1 \dots, v_{10}\}$ a množina $\Omega$ je množina všetkých trojíc vytvorených z množiny $A$ tak, že na poradí nezáleží. To znamená, že $|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!.7!} = \frac{10.9.8}{3.2} = 120$. Keďže každá z trojíc má rovnakú pravdepodobnosť vytiahnutia, tak $P(\{v_1, v_3, v_6\}) = \frac{1}{120}$.

---

**Príklad** 10: Traja kontrolóri čistiarní odpadových vôd majú urobiť v jeden deň po jednej kontrole. Čistiarní je 10. Každý si náhodne vyberie jednu. Aká je pravdepodobnosť, že všetci budú kontrolovať tú istú čistiareň?

**Riešenie pr.** 10: Množina $A = \{c_1, \dots, c_{10}\}$ a množina $\Omega$ je množina všetkých trojíc vytvorených z množiny $A$ tak, že na poradí nezáleží. To znamená, že $|\Omega| = \binom{10+3-1}{3} = \frac{12!}{3!.7!} = 220$. Počet trojíc typu $\{c_i, c_i, c_i\}$, $i = 1, \dots, 10$ je 10, teda $P(\{\{c_i, c_i, c_i\}; \quad i = 1, \dots, 10\}) = \frac{10}{220} = 0,045\overline{45}$.

---

**Príklad** 11: Ak $A = \{1, 2, 3\}$ a $k = 2$, potom $\Omega = \{12, 21, 13, 31, 23, 32\}$ a $|\Omega| = 3 \cdot 2 = 6$.

---

**Príklad** 12: Ak $A = \{1, 2, 3\}$ a $k = 2$, potom $\Omega = \{11, 22, 33, 12, 21, 13, 31, 23, 32\}$ a $|\Omega| = 3^2 = 9$.

---

**Príklad** 13: Kontrolór má urobiť 3 kontroly v čistiarňach odpadových vôd v presne stanovenom poradí. Čistiarní je 10, pričom žiadnu nebude kotrolovať viackrát. Náhodne vyberie tri z nich. Aká je pravdepodobnosť, že bude kontrolovať čistiarne odpadových vôd $c_2, c_4, c_6$ v poradí $(c_2, c_6, c_4)$?

**Riešenie pr.** 13: Množina $A = \{c_1 \dots, c_{10}\}$ a množina $\Omega$ je množina všetkých trojíc vytvorených z množiny $A$ tak, že na poradí záleží. To znamená, že $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. a teda $P(\{(c_2, c_6, c_4)\}) = \frac{1}{720}$.

---

**Príklad** 14: Kontrolór má urobiť počas troch týždňov 3 kontroly v čistiarňach odpadových vôd v presne stanovenom poradí. Čistiarní je 10, pričom môže kontrolovať tú istú viackrát. Náhodne vyberie tri. Aká je pravdepodobnosť, že bude kontrolovať 3-krát tú istú čistiareň?

**Riešenie pr.** 14: Množina $A = \{c_1 \dots, c_{10}\}$ a množina $\Omega$ je množina všetkých trojíc vytvorených z množiny $A$ tak, že na poradí záleží. To znamená, že $|\Omega| = 10^3$ Počet trojíc typu $(c_i, c_i, c_i)$, $i = 1, \dots, 10$ je 10, teda $P(\{(c_i, c_i, c_i); \quad i = 1, \dots, 10\}) = \frac{10}{1000} = 0,01$.

**Príklad** 15:
V tomto príklade použijeme hod hracou kockou na ilustrovanie jednotlivých typov n.p. Označíme $\omega_i$, ak pri jednom hode kockou padne na hornej strane kocky $i$ bodiek.

(H1) Hod kockou. Nech n.p. $X$ znamená počet bodiek na hornej stene kocky. V tomto prípade $\Omega_1 = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$ a $X(\Omega_1) = \{1, \dots, 6\}$.

(H2) Hádžeme kockou dovtedy, kým nepadne $\omega_6$ a n.p. $Y$ znamená počet hodov. V tomto prípade $\Omega_2$ je množina $n$-tíc ($n = 1, 2, \dots$) a
$\Omega_2 = \{(\omega_6), (\omega_1, \omega_6), (\omega_2, \omega_6), \dots, (\omega_1, \omega_2, \omega_6)), \dots\}$ a $Y : \Omega_2 \to \{1, 2, \dots\}$. $Y(\Omega_2) = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina s nekonečným počtom prvkov, ale je spočítateľná, pretože má toľko prvkov ako množina prirodzených čísel. Aj v tomto prípade n.p. $Y$ nazývame diskrétna n.p.

(H3) Hádžeme kockou do diaľky. Nech n.p. $Z$ je dĺžka hodu. Teoreticky dĺžka hodu môže byť ľubovoľné číslo z intervalu $[0, \infty)$. To znamená, že n.p. $Z$ je spojitá n.p. a $Z(\Omega) = [0, \infty)$.

**Príklad** 16: Nech rozdelenie náhodnej premennej $X$ je dané pomocou tabuľky 3:

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P_X$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | $0,1$ |

Tab. 3: Pravdepodobnostné rozdelenie n.p. $X$ (Pr.16)

Nájdite hodnoty funkcie $H_X(r) = \frac{P(X \le r)}{P(X > r)}$.

**Riešenie pr.** : $H_X(r) = \frac{P(X \le r)}{P(X > r)} = \frac{F_X(r)}{1 - F_X(r)}$.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P_X$ | $\mathbf{0,2}$ | $\mathbf{0,3}$ | $\mathbf{0,4}$ | $\mathbf{0,1}$ |
| $F_X$ | $0,2$ | $0,5$ | $0,9$ | 1 |
| $1 - F_X$ | $\mathbf{0,8}$ | $\mathbf{0,5}$ | $\mathbf{0,1}$ | $\mathbf{0}$ |
| $H_X{}^1$ | $0,25$ | $0,6$ | 4 | $\infty$ |

Tab. 4: Pravdepodobnostné rozdelenie $P_X$, distribučná funkcia $F_X$ a intenzita rizika $H_X$ n.p. $X$ (Pr. 16)

**Príklad** 17: Máme regulárnu hraciu kocku, ktorej jednotlivé steny sú označené číslami $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$a pre každé $i \in \Omega$ platí $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$.

(H1) Hod kockou. Nech n.p. $X$ je definovaná nasledovne: $X(\{\omega_i\}) = i$, pre $\omega_i \in \Omega$. To znamená, že $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 6\}$ a $P_X = \left\{\left(1, \frac{1}{6}\right), \dots, \left(5, \frac{1}{6}\right)\right\}$ je jej rozdelenie pravdepodobnosti. Napríklad, $P(X \le 0) = P(\emptyset) = 0$ a $P(X \le 2) = P(\{1, 2\}) = \frac{2}{6}$. Distribučnú funkciu $F_X$ môžeme zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{6}, & t \in [1,\ 2) \\ \frac{2}{6}, & t \in [2,\ 3) \\ \frac{3}{6}, & t \in [3,\ 4) \\ \frac{4}{6}, & t \in [4,\ 5) \\ \frac{5}{6}, & t \in [5,\ 6) \\ 1, & t \ge 6 \end{cases}$$

(H2) Hádžeme kockou dovtedy, kým nepadne 6 bodiek a n.p. $Y$ je počet hodov. Predpokladáme, že hody sú nezávislé. To znamená, že $P(\{\omega_i, \omega_j\}) = P(\{\omega_i\}) \cdot P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{6^2}$. Napríklad

$$\begin{aligned}
&P(Y = 2) = P(\{(\omega_1, \omega_6), (\omega_2, \omega_6), (\omega_3, \omega_6), (\omega_4, \omega_6), (\omega_5, \omega_6)\}) = \frac{5}{36}, \\
&P(Y < 1) = P(\emptyset) = 0, \\
&F_Y(1,5) = P(Y \leq 1,5) = P(Y = 1) = P(\{\omega_6\}) = \frac{1}{6}, \\
&F_Y(2,1) = P(Y \leq 2,1) = P(Y = 1) + P(Y = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6^2}, \\
&F_Y(3) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5^2}{6^3}.
\end{aligned}$$

Hodnota distribučnej funkcie $F_X(i)$ pre $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ je daná vzťahom

$$F_Y(i) = P(Y \leq n) = \sum_{k=1}^{i} P(Y = k) = \sum_{k=1}^{i} \frac{5^{k-1}}{6^k}.$$

(H3) Hádžeme kockou do diaľky a n.p. $Z$ je dĺžka hodu. Teoreticky môžeme predpokladať, že $R(Z) = [0, \infty)$ a teda pre distribučnú funkciu $F_Z(t)$ platí $F_Z(t) = 0$, a $F_Z(t) \in [0, 1)$ pre $t \geq 0$. Je zrejmé, že $F_Z(t_1) \leq F_Z(t_2)$, ak $t_1 < t_2$ a $\lim_{t\to\infty} F_Z(t) = 1$.

---

**Príklad** 18:
Nech $X$ je n.p definovaná v tabuľke 5. Pre $Y = X^2$ $Z = Y + X$ vypočítajte pravdepodobnostné rozdelenia.

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P_X$ | $0,5$ | $0,1$ | $0,4$ |

Tab. 5: Pravdepodobnostné rozdelenie n.p. $X$ (Pr. 18)

**Riešenie pr.** 18: Ak $f(t) = t^2$ a $g(t, s) = t + s$, potom $Y = f(X)$ a $Z = g(X, Y)$. To znamená, že

| $P_X$ | $0,5$ | $0,1$ | $0,4$ |
|---|---|---|---|
| $X$ | 1 | 2 | 3 |
| $Y = X^2$ | 1 | 4 | 9 |
| $Z = X + Y$ | 2 | 6 | 12 |

Tab. 6: Pravdepodobnostné rozdelenie n.p. $X, Y, Z$ (Pr. 18)

Napríklad rozdelenie náhodnej premennej $Y$ je v tab. 7.

| $Y$ | 1 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|
| $P_Y$ | $0,5$ | $0,1$ | $0,4$ |

Tab. 7: Pravdepodobnostné rozdelenie n.p. $Y$ (Pr. 18)

---

**Príklad** 19:
Hádžeme regulárnou hracou kockou. Na jeden hod máme dve pravidlá:

(p1) $X$: priradí párnemu počtu bodiek 1 a v ostatných prípadoch priradí počet bodiek

(p2) $Y$: priradí nepárnemu počtu bodiek 0 a v ostatných prípadoch priradí počet bodiek mínus 1.

Nájdite pravdepodobnostné rozdelenia náhodných premenných: $X$, $Y$, $X + Y + 1$, $X.Y - 1$.

**Riešenie pr.** 19:

| Počet bodiek | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| $X$ | 1 | 1 | 3 | 1 | 5 | 1 |
| $Y$ | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 5 |
| $X + Y + 1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $X \cdot Y - 1$ | $-1$ | 0 | $-1$ | 2 | $-1$ | 4 |

Tab. 8: Pravdepodobnosť a n.p. $X$, $Y$, $X + Y + 1$, $X \cdot Y - 1$ (Pr. 19)

Pravdepodobnostné rozdelenia n.p. $X, Y, X + Y + 1, X \cdot Y - 1$ zistíme z tabuľky 8

| $X$ | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 4/6 | 1/6 | 1/6 |

Tab. 9: Rozd. pravd. n.p. $X$ (Pr. 19)

| $Y$ | 0 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $0,5$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

Tab. 10: Rozd. pravd. n.p. $Y$(Pr. 19)

| $X + Y + 1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

Tab. 11: Rozd. pravd. n.p. $X + Y + 1$ (Pr. 19)

| $X \cdot Y - 1$ | $-1$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $0,5$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

Tab. 12: Rozd. pravd. n.p. $X \cdot Y - 1$ (Pr. 19)

**Príklad** 20: Prepokladajme, že generátor náhodných čísel generuje náhodne čísla z intervalu $[2,4)$ rovnomerne. Nech $X$ je n.p., ktorá priradí náhodnému číslu jeho hodnotu, a $Y$ je n.p., ktorá okrem čísla 2 priradí náhodnému číslu jeho hodnotu a v prípade čšla 2 priradí hodnotu $-1$. Nájdite distribučné funkcie, funkcie hustoty oboch n.p. a zistite, či sa rovnajú modulo $[P]$.

**Riešenie pr.** 20: Keďže generátor náhodných čísel generuje náhodne čísla z intervalu $[2;4)$, tak $\Omega=[2;4)$. Pravdepodobnosť vygenerovania menšieho čísla ako 2 sa rovná 0. Ak označíme $A_t=[2,t)$, potom

$$P(A_t)=\frac{t-2}{4-2}=\frac{t}{2}-1$$

pre $2\le t<4$ a $P(A_t)=1$ ak $t\ge 4$. Z definície n.p. $X$ vyplýva, že

$$F_X(t)=P(X\le t)=\begin{cases} 0 & t<2\\ \frac{t}{2}-1 & 2\le t<4\\ 1 & t\ge 4\end{cases}$$

a funkcia hustoty

$$f_X(t)=F_X^{'}(t)=\begin{cases} \frac{1}{2} & 2\le t<4\\ 0 & t\notin[2;4)\end{cases}$$

Pre n.p. $Y$ platí, že

$$P(Y=-1)=P(\{2\})=P(X=2)=0$$

a v ostatných prípadoch sa $X=Y$, tak $F_X=F_Y$ a $f_X^{'}=f_Y^{'}$.

Z definície $X$ a $Y$ vieme, že $X(2)\ne Y(2)$ a teda $X$ a $Y$ sa nerovnajú ako reálne funkcie. Na druhej strane

$$P\left(\{\omega\in[2,4)\,;\quad X(\omega)\ne Y(\omega)\}\right)=P\left(\{2\}\right)=P\left(X=2\right)=0,$$

a teda

$$P\left(\{\omega\in[2,4)\,;\quad X(\omega)=Y(\omega)\}\right)=1-P\left(\{2\}\right)=1.$$

Z toho vyplýva, že

$$X=Y\qquad [P]$$

Aj v takomto prípade budeme písať $X=Y$.

**Príklad** 21: Hádžeme regulárnou kockou dovtedy, kým nepadne 6.

1. Nech n.p. $X$ je definovaná nasledovne: Ak padne 6 v prvom hode, tak prehráme 6 EUR. Ak padne 6 v $k$-tom hode, $k>1$, vyhráme $6^k$EUR. Rozdelenie n.p. $X$ je teda nasledovné: $P_X=\left\{\left(-6,\frac{1}{6}\right),\left(6^2,\frac{5}{6^2}\right),\left(6^3,\frac{5^2}{6^3}\right),\dots\right\}$. Potom $E(X)=-6\cdot\frac{1}{6}+\sum_{k=2}^{\infty}6^k\cdot\frac{5^{k-1}}{6^k}=-1+\sum_{k=2}^{\infty}5^{k-1}=\infty$.
2. Nech n.p. $Y$ je definovaná nasledovne: Ak padne 6 v $k$-tom pokuse a $k$ je párne číslo, potom vyhrávame $6^k$EUR, ak $k$ je nepárne číslo, prehrávame $6^k$EUR. Rozdelenie n.p. $Y$ je teda nasledovné: $P_Y=\left\{\left(-6,\frac{1}{6}\right),\left(6^2,\frac{5}{6^2}\right),\left(-6^3,\frac{5^2}{6^3}\right),\dots\right\}$. Potom $E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot 6^k\cdot\frac{5^{k-1}}{6^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot 5^{k-1}$. Súčet takéhoto nekonečného radu neexistuje.

**Príklad** 22: Majme n.p. $X$ a $Y$ s pravdepodobnostnými rozdeleniami uvedenými v tabuľkách 13 a 14 :

| $X$ | 1 | 2 | 3 | **4** |
|---|---|---|---|---|
| $P_X$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | **0,4** |

Tab. 13: Rozd. pravd. n.p. $X$

| $Y$ | 1 | 2 | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|
| $P_Y$ | 0,1 | 0,1 | **0,4** | **0,4** |

Tab. 14: Rozd. pravd. n.p. $Y$

Potom $x_{Mo}=4$ a $y_{Mo}$ nie je daný jednoznačne. Zvykne sa niekedy povedať, že modus neexistuje.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X < x_i)$ | 0 | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | $0,5$ | $0,6$ | $0,7$ | $0,8$ | $0,9$ |
| $P(X > x_i)$ | $0,9$ | $0,8$ | $0,7$ | $0,6$ | $0,5$ | $0,4$ | $0,3$ | $0,2$ | $0,1$ | 0 |

Tab. 15: $P(X < x_i)$ a $P(X > x_i)$ (Pr. 23)

**Príklad** 23: Nech n.p. $X \in \{1, 2, \cdots, 10\}$ a $P(X = i) = 0,1$, pre $i = 1, 2, \cdots 10$. Nájdite $Me$ a $Q_L$.

**Riešenie pr.** 23: Hodnoty n.p. $X$ usporiadame podľa veľkosti a vypočítame $P(X < x_i)$ a $P(X > x_i)$.

Nech $p = 0,5$, potom $\{x_i;\, P(X < x_i) \geq 0,5\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. $inf\{6,\, 7,\, 8,\, 9,\, 10\} = 6$. To znamená, že podľa [?] je $x_{Me} = 6$. V prípade inej def. $\{x_i;\, P(X < x_i) \leq 0,5\} = \{1,\, 2,\, 3,\, 4, \mathbf{5},\, \mathbf{6}\}$ a $\{x_i;\quad P(X > x_i) \leq 0,5\} = \{\mathbf{5},\, \mathbf{6}, 7,\, 8,\, 9,\, 10\}$ Vidíme, že medián nie je jednoznačný. V tomto prípade za medián budeme považovať číslo $5,5$ ($x_{Me} = 5,5$).

Ak $p = 0,25$, potom $\{x_i;\, P(X < x_i) \leq 0,25\} = \{1, 2, \mathbf{3}\}$ $\{x_i;\, P(X > x_i) \leq 0,75\} = \{\mathbf{3}, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ Vidíme, že $x_L = 3$.

**Poznámka** 2: Pokiaľ počítame $p$-kvantil pomocou výpočtovej techniky, je potrebné si pozrieť, ako je definovaný. Napríklad v programe EXCEL pomocou funkcie QUARTILE.INC by sme v predošlom príklade dostali $x_L = 3,25$, ale pomocou funkcie QUARTILE.EXc dostaneme $x_L = 2,75$.

**Príklad** 24: Nech n.p. $X$ pri hode regulárnou hracou kockou predstavuje počet bodiek. Vypočítajte $E(X), D(X)$, šikmosť a špicatosť.

**Riešenie pr.** 24:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| $x_i^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
| $x_i p_i$ | 1/6 | 2/6 | 3/6 | 4/6 | 5/6 | 1 |
| $x_i^2 p_i$ | 1/6 | 4/6 | 9/6 | 16/6 | 35/6 | 6 |

Tab. 16: (Pr. 24)

Stredná hodnota $E(X)$ je súčet čísel predposledného riadku v tabuľke 16 a $E(X^2)$ je súčet čísel posledného riadku v tabuľke 16. To znamená, že

$$E(X) = 3,5 \qquad \text{a} \qquad D(X) = E(X^2) - (E(X))^2) = 15,1\overline{6} - 3,5^2 = 2,91\overline{6}.$$

Teda $\sigma_X = \sqrt{D(X)} = 1,707825$.

Pre výpočet šikmosti a špicatosti potrebujeme vypočítať $\mu_3$ a $\mu_4$.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| $(x_i - 3,5)^3 \cdot p_i$ | $-15,625/6$ | $-3,375/6$ | $-0,125/6$ | $0,125/6$ | $3,375/6$ | $15,625/6$ |
| $(x_i - 3,5)^4 \cdot p_i$ | $39,0625/6$ | $5,0625/6$ | $0,0625/6$ | $0,0625/6$ | $5,0625/6$ | $39,0625/6$ |

Tab. 17: $\mu_3$ je súčet 3. riadku a $\mu_4$ je súčet 4. riadku tabuľky. (Pr. 24)

$\mu_3 = \sum_{i=1}^{6}(x_i - 3,5)^3 p_i = 0$, $\mu_4 = \sum_{i=1}^{6}(x_i - 3,5)^4 p_i = 14,7291\overline{6}$. Šikmosť sa teda rovná 0 a špicatosť je podiel $\frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{D(X)^2} = \frac{14,7291\overline{6}}{(2,91\overline{6})^2} = 1,73143$.

**Príklad** 25: Vedenie fakulty sa rozhodlo odmeniť študentov za skúšku z predmetu Matematika podľa nasledujúceho pravidla:

V ročníku je 100 študentov. Koľko EUR asi budú potrebovať v nasledijúcom roku, ak predpokladajú, že výsledky zo skúšky budú zodpovedať predchádzajúcim ročníkom?

| Známka zo skúšky | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Výška odmeny | 25 | 15 | 10 | 5 | 0 |
| Pravdepodobnosť | $0,1$ | $0,15$ | $0,25$ | $0,2$ | $0,3$ |

Tab. 18: Pravidlá pre odmeňovanie (Pr. 25)

| $x_i$ | 25 | 15 | 10 | 5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $0,1$ | $0,15$ | $0,25$ | $0,2$ | $0,3$ |
| $x_i \cdot p_i$ | $2,5$ | $2,25$ | $2,5$ | 1 | 0 |

Tab. 19: $E(X)$ je súčet posledného riadku tabuľky. (Pr. 25)

**Riešenie pr.** 25: V poslednom riadku tabuľky 18 je uvedená pravdepodobnosť, s akou známkou študent ukončí skúšku. Pravdepodobnosť sa zistila dlhodobým sledovaním výsledkov z predmetu Matematika. Do úvahy sa nebrala známka FX. Označme $X$ n.p. výšku vyplatenej odmeny študentovi.

V tomto prípade $E(X) = 8,25$. Stredná hodnota $E(X)$ predstavuje očakávaú odmenu na jedného študenta.

Záver: Očakávaná odmena na jedného študenta je $8,25$ EUR a teda pri 100 študentoch je to 825 EUR.

**Príklad** 26: Náhodná premenná $X$ nadobúda hodnoty $x_1, x_2$ a $P(X = x_1) = p$. Vypočítajte $E(X)$ a $D(X)$.

**Riešenie pr.** 26: $D(X) = (x_1 - x_2)^2 \cdot p \cdot (1-p)$.

**Príklad** 27: Hádžeme hracou kockou z homogenného materiálu dovtedy, kým nepadne číslo 6. a) Aká je pravdepodobnosť, že pokus sa skončí v 10-tom hode? b) Aká je pravdepodobnosť, že pokus sa skončí v nepárnom hode?

**Riešenie pr.** 27: Označme $A$ udalosť: padne číslo 6 a $X$ označme počet neúspešných pokusov. To znamená, že $p = P(A) = 1/6$.
a) Zaujíma nás $P(X = 9)$: $P(X = 9) = (5/6)^9 \cdot (1/6) = 0,0323$. Pravdepodobnosť, že pokus sa skončí v 10-tom hode (9 hodov bolo neúspešných) je $0,0323$.
b) Označme $B$ náhodnú udalosť: pokus sa skončí v nepárnom hode. Počet neúspešných pokusov je teda párny. To znamená, že $X \in \{2k : k = 0, 1, 2, \cdots\}$.

$$P(B) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} \cdot \frac{1}{6} = 0,\overline{54}.$$

Jedná sa o súčet geometrického radu pre ktorý platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad \text{ak} \quad |q| < 1.$$

V našom prípade $a = 1/6$ a $q = (5/6)^2$.

**Príklad** 28: Hádžeme hracou kockou z homogénneho materiálu. Náhodná premenná $X$ bude predstavovať číslo, ktoré padne pri jednom hode. Vypočítajte $E(X)$ a $D(X)$.

**Riešenie pr.** 28: Pretože $X \sim Ro(6)$, $E(X) = 3,5$ a $D(X) = 2,916\overline{6}$.

**Príklad** 29: V krúžku je 25 študentov, z toho 15 absolventov gymnázia. Náhodne vyberieme 5 študentov. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi budú traja študenti gymnázia?

**Riešenie pr.** 29: Všetci študenti v krúžku tvoria množinu $\Omega$, a teda $|\Omega| = 25$. Ak $A$ sú absolventi gymnázia, potom $|A| = 15$ a $|A^c| = 10$. Náhodne vyberieme nejakú 5-ticu z množiny $\Omega$. N.p. $X$ je funkcia, ktorá príslušnej 5-tici priradí číslo, ktoré predstavuje počet absolventov gymnázia, a teda
$\max(0, 15+5-25) \leq X(\omega_1, \ldots, \omega_5) \leq \min(15, 5)$
$0 \leq X(\omega_1, \ldots, \omega_5) \leq 5$.
Rozdelenie pravdepodobnosti n.p. $X$ je v tabuľke 20:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_X$ | $0,0047$ | $0,0593$ | $0,2372$ | $0,3854$ | $0,2569$ | $0,0565$ |

Tab. 20: Pravd. rozd. pre n.p. $X \sim H(25,\ 15,\ 5)$ (Pr. 29)

a teda $P(X=3) = \dfrac{\binom{15}{3}\binom{10}{2}}{\binom{25}{5}} = 0,3854.$

---

**Príklad** 30: Ak $X \sim Ro(a,b)$ vypočítajte $E(X)$, $D(X)$, $x_{Me}$, $\alpha_3$ a $\gamma_4$.

**Riešenie pr.** 30: $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} \frac{t}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{b+a}{2}, D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Šikmosť: $E((X-E(X)^3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (t-E(X))^3 f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} \frac{(t-E(X))^3}{b-a}\,\mathrm{d}t = 0, tak \alpha_3 = \frac{E((X-E(X)^3)}{\sqrt{D(X)^3}} = 0.$

Špicatosť: $E((X-E(X)^4) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (t-E(X))^4 f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} \frac{(t-\frac{b-a}{2})^4}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^4}{5\cdot 2^4}$, tak $\alpha_4 = \frac{E((X-E(X))^4)}{D(X)^2} = \frac{9}{5}$ a $\gamma_4 = \alpha_4 - 3 = -\frac{6}{5}$.

---

**Príklad** 31: Autobus MHD chodí v pravidelných 10 minútových intervaloch. Nech n.p. $X$ predstavuje dobu čakania na autobus, ak cestujúci príde na zastávku náhodne. Teda

$$P(X \le t) = F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/10 & t \in [0, \quad 10]. \\ 1 & t > 10. \end{cases}$$

a

$$f_X(t) = F_X^{'}(t) = \begin{cases} 0 & t \notin (0, \quad 10) \\ 1/10 & t \in (0, \quad 10). \end{cases}$$

Vypočítajte:

a) pravdepodobnosť, že náhodný cestujúci bude čakať najviac 7 minút;

b) pravdepodobnosť, že cestujúci bude čakať viac ako 3 minuty a menej ako 8 minút;

c) strednú hodnotu a rozptyl času čakania cestujúceho na autobusovej zastávke.

**Riešenie pr.** 31:

a) $P(X \le 7) = F_X(7) = 0,7;$

b) $P(3 < X < 8) = F_X(8) - F_X(3) = 0,8 - 0,3 = 0,5;$

c) $E(X) = \frac{10+0}{2} = 5,\ \ D(X) = \frac{(10-0)^2}{12} = \frac{25}{3}.$

---

**Príklad** 32: Použite pravidlo $k-$sigma pre n.p $X \sim N(2,9)$ a $k = 1,2,3$.

**Riešenie pr.** 32: Pretože $\mu = 2$ a $\sigma = 3$, tak $P(-1 < X \le 5) \doteq 0,68$, $P(-4 < X \le 8) \doteq 0,95$, $P(-7 < X \le 11) \doteq 0,997$.

---

**Príklad** 33: Nech $X_1 \sim N(1,4)$ a $X_2 \sim N(2,9)$ sú nezávislé náhodne premenné. Vypočítajte, ak máte k dispozícii len tabuľky $N(0,1)$ (str. **??**, tab. **??**):
$P(4 < X_1 - 2X_2 \le 8)$.

**Riešenie pr.** 33: Pretože $X_1 \sim N(1,4)$ a $X_2 \sim N(2,9)$ a ide o nezávislé náhodne premenné, tak $E(X_1 - 2X_2) = E(X_1) - 2E(X_2) = 1 - 2\cdot 2 = -3$, $D(X_1 - 2\cdot X_2) = D(X_1) + 4D(X_2) = 4 + 36 = 40$. Teda $Y = X_1 - 2X_2 \sim N(-3,40)$ a platí

$$P(4 < Y \leq 8) = P\left(\frac{4-(-3)}{\sqrt{40}} < \frac{Y-(-3)}{\sqrt{40}} \leq \frac{8-(-3)}{\sqrt{40}}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{11}{\sqrt{40}}\right) - \Phi\left(\frac{7}{\sqrt{40}}\right) \cong 0,959 - 0,866 = 0,093$$

---

**Príklad** 34: Hádždeme kockou dvakrát. Máme dve pravidlá: pri prvom hode máme pravidlo $X$ a pri druhom pravidlo $Y$. $X(2) = X(4) = X(6) = 0$, a $X(1) = X(3) = X(5) = 1$, $Y(1) = Y(2) = 1$ a $Y(3) = Y(4) = Y(5) = Y(6) = 0$. Nájdite

a) $f_{X,Y}$, $F_{X,Y}(0,1)$;

b) $E(X \cdot Y)$;

c) $cov(X,Y)$, $\rho(X,Y)$;

d) $D(X+Y)$, $D(2X-Y)$ a $cov(2X-Y, X+2Y)$;

e) vypočítajte $\mathbf{\Sigma_Z}$ ak $\mathbf{Z} = (2X-Y, X+2Y)^T$.

**Riešenie pr.** 34: Pri výpočte kovariancie, alebo korelačného koeficientu v prípade diskrétnych n.p. sa lepšie pracuje s tabuľkami. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené marginálne a združené rozdelenia n.p. $X$ a $Y$.

| $Y/X$ | $(0;1/2)$ | $(1;1/2)$ |
|---|---|---|
| $(0;2/3)$ | $1/3$ | $1/3$ |
| $(1;1/3)$ | $1/6$ | $1/6$ |

Tab. 21: Združené rozd. pravd. $F_{XY}$ (Pr. 34)

a) $f_{X,Y}$ je uvedené priamo v tabuľke a $F_{X,Y}(0,1) = 1/6$;

b) $E(X\cdot Y) = 1/6$;

c) – d) $D(X) = 1/4$, $D(Y) = 2/9$ a pretože $X$ a $Y$ sú nezávislé, tak $cov(X,Y) = \rho(X,Y) = 0$, $D(X+Y) = D(X) + D(Y) = \frac{17}{36}$, $D(2X-Y) = 4D(X) + D(Y) = \frac{11}{9}$, $cov(2X-Y, X+2Y) = 2cov(X,X) - 2cov(Y,Y) = 1/2 - 4/9 = 1/18$;

e) Na vypočet $\mathbf{\Sigma_Z}$ potrebujeme ešte $D(X+2Y) = D(X) + 4D(Y) = 41/36$. Preto

$$\mathbf{\Sigma_Z} = \begin{pmatrix} 11/9 & 1/18 \\ 1/18 & 41/36 \end{pmatrix}.$$

---

**Príklad** 35: [2] Háždeme kockou. Náhodná premenná $X$ priradí číslam $\geq 3$ hodnotu 1 a číslam $\leq 4$ hodnotu $-1$. Náhodná premenná $Y$ priradí párnemu číslu hodnotu 2 a nepárnemu 0.

1. Nájdite združené rozdelenie pravdepodobností $f_{XY}$ a marginálne rozdelenia pravdepodobnosti.
2. Vypočítajte $P(X > 0,5;\, Y < 1)$.
3. Zistite, či sú náhodné premenné $X, Y$ nezávislé
4. Vypočítajte kovarianciu a korelačný koeficient medzi $X$ a $Y$.
5. Vypočítajte kovariančnú maticu pre náhodný vektor $(X,Y)$.
6. Kedy sa korelačný koeficient rovná $\{1;-1;0\}$?

| $\omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| $X$ | 1 | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | $-1$ |
| $Y$ | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| $X^2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $Y^2$ | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 |
| $X \cdot Y$ | 0 | 2 | 0 | $-2$ | 0 | $-2$ |

Tab. 22: Základná tab. Pr. 35

| $Y/X$ | $(-1; 1/2)$ | $(1; 1/2)$ |
|---|---|---|
| $(0; 1/2)$ | 1/6 | 1/3 |
| $(2; 1/2)$ | 1/3 | 1/6 |

;

Tab. 23: Združené rozdelenie pre n.p. $X, Y$ a ich marginálne rozdelenia (Pr. 35)

**Riešenie pr.** 35: Najskôr si vytvoríme základnú tabuľku 22 pre n.p. $X$ a $Y$:

1. Margináne a združené rozdelenia:
2. $P(X > 0,5;\, Y < 1) = 1/3$;
3. Všimnime si, že napríklad $P(X = 1;\, Y = 0) \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 0)$, teda n.p. $X$ a $Y$ nie sú nezávislé;
4. $cov(X, Y) = \rho(X, Y) = -1/3$;
5. $$\mathbf{\Sigma}_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix};$$
6. Pozri vlastnosti korelačného koeficientu.

---

**Príklad** 36: Určite, do ktorej skupiny patria nasledujúce skupiny dát:
a) zisk vyjadrený v precentách, priemerné platy v jednotlivých odvetiach, namerané dĺžky hodu guľou, počet bodov jednotlivých študentov na skúške, prietok.
b) pohlavie v skúmanej skupine, farba vlasov, slovné hodnotenie (výbony, zlý, priemerný), preferovaná farba.

**Riešenie pr.** 36: a) kvantitatívne dáta, b) kvalitatívne dáta.

Kvantitatívne dáta rozdeľujeme do dvoch základných skupín:

- Diskrétne – výsledkom experimentu môě byť maximálne spočítateľný počet možností.
- Spojité – výsledkom experimentu môže byť ľubovoľné číslo z nejakého intervalu.

**Príklad** 37: Určite, do ktorej skupiny patria nasledujúce skupiny dát:
a) zisk vyjadrený v precentách, priemerné platy v jednotlivých odvetiach, namerané dĺžky hodu oštepom, prietok;
b) počet detí v rodine, počet poschodí v rodinných domoch, počet mesiacov v roku, kedy priemerná teplota bola vyššia ako $20\,^oC$.

**Riešenie pr.** 37 a) spojité dáta, b) diskrétne dáta
**najčastejšie používané grafy** – koláčový a stĺpcový graf.

**Príklad** 38: Mestská správa sa rozhodla zistiť vyťaženosť križovatiek ($kr_i$) v meste počas dopravnej špičky (medzi 7:00 – 8:00). Pracovníci počas tohoto časového intervalu zapisovali jednotlivé dopravné prostriedky, ktoré cez križovatky prešli. Výsledky sú zapísané v tabuľke 24.

[2] kovariancia a korelácia nie pre M3 a M4

| Križovatka | B | M | OA | AU | NA | Spolu |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $kr_1$ | 10 | 5 | 20 | 10 | 5 | 50 |
| $kr_2$ | 0 | 10 | 25 | 8 | 15 | 58 |
| $kr_3$ | 3 | 15 | 50 | 0 | 0 | 68 |
| $kr_4$ | 7 | 1 | 20 | 1 | 5 | 34 |
| $kr_5$ | 8 | 0 | 26 | 5 | 10 | 49 |
| $kr_6$ | 0 | 0 | 29 | 10 | 10 | 49 |
| $kr_7$ | 5 | 1 | 50 | 0 | 6 | 62 |
| $kr_8$ | 2 | 5 | 20 | 0 | 7 | 34 |
| $kr_9$ | 10 | 3 | 21 | 0 | 10 | 44 |
| $kr_{10}$ | 5 | 2 | 26 | 15 | 5 | 53 |
| spolu | 50 | 42 | 287 | 49 | 73 | 501 |

Tab. 24: $kr_i$ i-ta križovatka, $i = 1, 2, 3, \cdots, 10$, B – bicykel, M – motorka, OA – osobné auto, AU – autobus, NA – nákladné auto. (Pr 38)

Nájdite modus sledovaného kvalitatívneho znaku – typ dopravnééého prostriedku prechádzajúci križovatkou $kr_8$, nájdite modus sledovaného kvalitatívneho znaku – typ križovatky z pohľadu počtu prechádzajúcich bicyklov a nájdite modus sledovaného kvalitatívneho znaku – typ križovatky – celkový počet dopravných prostriedkov prechádzajúcich cez danú križovatku.

**Riešenie pr.** 38: Modus $kr_8$ je OA; modus pre bicykel nie je jednoznačný ($kr_1 = kr_9 = 10$), modus pre premennú križovatka je $kr_3$.

**Príklad** 39: U náhodne vybraných študentov sa zisťovali dva údaje: pohlavie a typ ubytovania. Výsledky sú uvedené v tabuľke 25 (frekvenčná tabuľka dvojstupňového triedenia):

| *Pohlavie*/*ubytovanie* | I | P | D | Spolu |
|---|---|---|---|---|
| M | 6 | 3 | 2 | 11 |
| Ž | 2 | 2 | 5 | 9 |
| Spolu | 8 | 5 | 7 | 20 |

Tab. 25: Pohlavie: muž (M), žena (Ž). Ubytovanie: internát (I), privát (P), doma (D). (Pr. 39)

Nájdite modus pre premenné: ubytovanie a pohlavie.

**Riešenie pr.** 39: V tabuľke 25 sú nasledujúce informácie: bolo oslovených 20 študentov, z toho 11 mužov a 9 žien. Na internáte bývalo 8 z nich, na priváte 5 a siedmi bývali doma. Pre premennú ubytovanie modus = internát a pre premennú pohlavie modus = muž.

**Príklad** 40: Vedenie obchodného domu na dámske oblečenie chcelo získať informácie o geografickom rozložení súčasných zákazníčok. Manažment sa rozhododol, že urobí anketu na túto tému. Výsledky sú zhrnuté vo frekvenčnej tabuľke 26.

| Svetová strana | Sever | Východ | Juh | Západ |
|---|---|---|---|---|
| Početnosť (frekvencia) | 50 | 40 | 65 | 45 |
| Relatívna frekvencia | $0,25$ | $0,2$ | $0,325$ | $0,225$ |

Tab. 26: Každá respondentka označila jednu z možností: sever, východ, juh, západ. (Pr. 40)

**Riešenie pr.** 40: Modus je odpoveď juh.

**Príklad** 41:
Počas dvoch mesiacov sme denne dvakrát merali teplotu termálneho prameňa. Máme k dispozícii 60 hodnôt, pričom min $= 16,5\,^\circ\ C$ a max $= 29,8\,^\circ C$. Po intervalovom triedení sme získali frekvenčnú tabuľku 27:

| Interval | $(-\infty; 18]$ | $(18; 20]$ | $(20; 22]$ | $(22; 24]$ | $(24; 26]$ | $(26; \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 10 | 15 | 17 | 13 | 3 |
| $f_i$ | 2/60 | 10/60 | 15/60 | 17/60 | 13/60 | 3/60 |
| $F_i$ | 2/60 | 12/60 | 27/60 | 44/60 | 57/60 | 60/60 |

Tab. 27: Frekvenčná tabuľka po intervalovom triedení (Pr. 41)

To znamená, že počas dvoch mesiacov sme 10-krát namerali teplotu vyššiu, ako napríklad, đe 18 ° $C$ a nižšiu alebo sa rovnala 20 ° $C$. Na grafické znázornenie zatriedených meraní sa často používa napríklad histogram. Histogram z relatívnch frekvencií nám môže pomôcť pri hľadaní pravdepodobnostného rozdelenia pre teplotu vody termálneho prameňa.

**Príklad** 42: Na teste zo štatistiky sa zúčastnilo 21 študentov. Odpovedali na 10 otázok a mohli za každú otázku získať 0 (nesprávna odpoveď) alebo 1 bod (správna odpoveď). Výsledky testov sú usporiadané podľa veľkosti (zvýraznená je hodnota mediánu)

{0, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, **6**, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10}

a sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke 28:

| body | 0 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 2 | 5 | 6 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| $f_i$ | 1/21 | 2/21 | 5/21 | 6/21 | 1/21 | 4/21 | 1/21 | 1/21 |
| $F_i$ | 1/21 | 3/21 | 8/21 | 14/21 | 15/21 | 19/21 | 20/21 | 21/21 |

Tab. 28: Frekvenčná tabuľka (Pr. 42).

Pre konštrukciu krabicového grafu potrebujeme nasledujúce hodnoty:
min = 0, max = 10 , $x_{Me} = 6$, $x_L = 5$, $x_U = 8$, $R = 8 - 5 = 3$, $U_R = x_U + 1,5 \cdot R = 12,5$ a $L_R = x_L - 1,5 \cdot R = 0,5$.

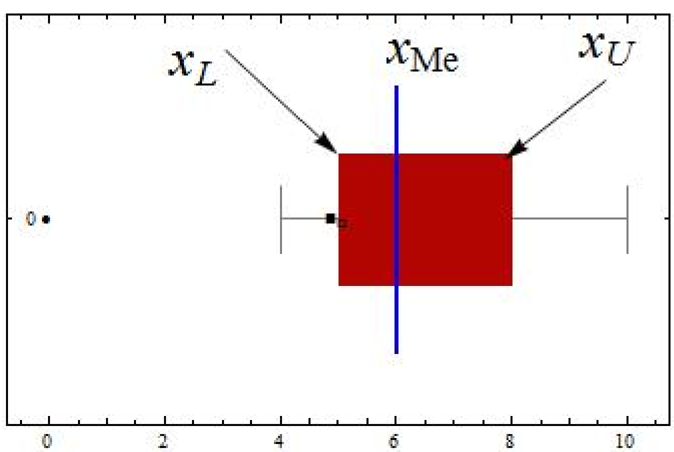


Fig. 1: Krabicový graf (Pr. 42).

Vyfarbený obdĺžnik začína v hodnote $x_L$ a končí v $x_U$. Zvislá čiara uprostred je medián. Vodorovná čiara na pravej strane nepresiahne $U_R$ a na ľavej strane nepresiahne hodnotu $L_R$. Hodnoty, ktoré sú menšie ako $L_R$, alebo väčšie ako $U_R$ označíme osobitne a voláme vybočujúce hodnoty (outlayers). Hodnoty menšie ako $x_L - 3R$ a $x_U + 3R$ sú označované odlišne od prvých vybočujúcich hodnôt.

V našom prípade máme jednu vybočujúcu hodnotu, a to zisk z testu 0 bodov.

**Príklad** 43: Máme v urne 10 žetónov, z toho 6 bielych a 4 červené. Ak vytiahneme jeden žetón, tak pravdepodobonosť toho, že bude biely, je $0,6$ a červený $0,4$. Hráme hru:
Ak vytiahneme biely zaplatíme do banku 5 EUR a ak vytiahneme červený, dostaneme 3 EURA. Týmto definujeme n.p. $X \to \{3, 5\}$

$$X(\text{červený}) = 3, \quad X(\text{biely}) = -5.$$

Pravdepodobnostné rozdelenie n.p. X je v tabuľke 29:

| $X$ | $x_1 = -5$ | $x_2 = 3$ |
|---|---|---|
| $P_X$ | $P(X = -5) = 0,6$ | $P(X = 3) = 0,4$ |

Tab. 29: Pravd. rozd. n.p. $X$ z príkladu 43

zjednodušene

| $x_i$ | $-5$ | $3$ |
|---|---|---|
| $p_i$ | $0,6$ | $0,4$ |

Tým sme vytvorili pravdepodobnostný model. Teraz môžeme pristúpime k samotnej hre. Po uskutočnení prvého ťahu sme vytiahli biely žetón. Realizovali sme n.p. $X_1$, ktorá má také isté rozdelenie ako $X$. Výsledok si zapíšeme a žetón vložíme naspäť do urny a opäť ťaháme žetón. Výsledok pokusu je červený žetón. To znamená, že realizácia n.p. $X_2$ je 3 (n.p. je tak isto definované ako n.p. $X$, index 2 znamená, že sme uskutočnili druhý ťah). Výsledok realizácie n.p. $X_2$ je nezávislý od $X_1$ (žetón sme vrátili do urny). Inými slovami n. p. $X_1$ a $X_2$ sú od seba nezávislé a rovnako rozdelené (IID). Pokus zopakujeme 10-krát. Výsledky sú uvedené v tabuľke 30:

| Číslo pokusu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Výsledok pokusu | -5 | 3 | 3 | 3 | -5 | -5 | 3 | -5 | -5 | -5 |

Tab. 30: Realizácia náhodného výberu rozsahu 10 (Pr. 43).

Hovoríme, že sme uskutočnili náhodný výber rozsahu 10 a čísla v tabuľke znamenajú realizáciu tohoto náhodného výberu.

**Príklad** 44: Vzdialenosť dvoch objektov sme odmerali 10-krát za tých istých podmienok. Výsledky merania považujeme za náhodný výber.

**Príklad** 45: Predpokladajme, že firma, ktorá sa zaoberá výrobou výliskov z plastických hmôt, chce poznať účinok technologického procesu na kmitanie podlahy vo výrobnej hale. Ohrozenie podlahy sa hodnotí pomocou vibrácií, ktorými sa podlaha rozkmitá v dôsledku rázov pri lisovaní. Meranie sme opakovali 20-krát. Z nameraných hodnôt vibrácií sme vypočítali bodový odhad strednej hodnoty $\mu$ ako aritmetický priemer nameraných údajov

$$\overline{X} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = 1,25$$

a vieme, že $\sigma^2 = 0,81$.

To znamená, že náhodný výber, ktorého realizáciou sú namerané hodnoty

$$x_1, \dots, x_{20},$$

pochádza z normálneho rozdelenia $N(\mu, 0,81)$. Z toho vyplýva, že náhodná premenná $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{0,81}{20})$. Potrebujeme nájsť OIS pre $\alpha = 0,05$. V tabuľke pre $N(0,1)$ nájdeme $(1 - \frac{\alpha}{2})$-kvantil $\Phi^{-1}(0,975) \doteq 1,96$ a dosadíme do vzorca pre OIS

$$\left(1,25 - 1,96 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{20}}, \quad 1,25 + 1,96 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{20}}\right) = (0,9984; \quad 1,5016).$$

To znamená, že

$$P(\mu \in (0,9984; \quad 1,5016)) = 0,95.$$

**Záver.** Všetky hodnoty vibrácií v danej výrobnej hale sa nachádzajú s 95 %-tnou spoľahlivosťou v intervale $(0,9984\,1,5016)$.

**Príklad 46**: Potrebujeme riešiť problém z Príkladu 45, ale teraz nepoznáme $\sigma^2$ a hodnota $0,81$ je len odhad $\sigma^2$. To znamená, že $S_1^2 = 0,81$. V takomto prípade namiesto $\Phi^{-1}(0,975)$ použijeme $t_{19}(0,975)$, ktorú nájdeme v tabuľke pre $t(19)$. Pretože

$$t_{19}(0,975) \doteq 2,093,$$

potom OIS je

$$\left(1,25 - 2,093 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{20}}, \quad 1,25 + 2,093 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{20}}\right) = (0,8288; \quad 1,6712).$$

Vidíme, že tento interval je o niečo širší, ako v Príklade 45.
**Záver**: Všetky hodnoty vibrácií v danej výrobnej hale sa nachádzajú s 95 %-tnou spoľahlivosťou v intervale $(0,8288; \quad 1,6712)$.

**Príklad 47**: V laboratóriu sme testovali prístroj na meranie teploty vody. Voda mala presne $10^\circ\ C$. Urobili sme 20 nezávislých meraní a vypočítali sme, že $S_0^2 = 1,21$. Vypočítajte 95 %-ný interval PIS pre rozptyl meraní používaného meracieho prístroja.

**Riešenie pr.** 47: Pretože $S_0^2 = 1,21$, $\alpha = 0,05$ a $\chi^2_{20}(0,05) = 10,851$ (hodnota z tabuľky pre $\chi^2_{20}$), tak PIS je

$$\left(0; \quad \frac{20 \cdot 1,21}{10,851}\right) = (0; \quad 2,2302)\,.$$

To znamená, že

$$P\left(\sigma^2 \in (0; \quad 2,2302)\right) = 0,95,$$

teda na 95 % rozptyly meraní daným prístrojom neprekročia hodnotu $2,2302$.

**Príklad 48**: Potrebovali sme zistiť rozptyl teploty vody. Urobili sme 20 nezávislých meraní a vypočítali sme, že priemerná teplota je $\overline{x} = 20,5^\circ\ C$ a $S_1^2 = 2,24$. Vypočítajte 95 %-ný interval PIS pre rozptyl teploty vody.

**Riešenie pr.** 48: Pretože $S_1^2 = 2,24$, $\overline{x} = 20,5^\circ\ C$, $\alpha = 0,05$ a $\chi^2_{19}(0,05) = 10,117$ (hodnota tabuľky pre $\chi^2_{19}$), tak PIS je

$$\left(0; \quad \frac{19 \cdot 2,24}{10,117}\right) = (0; \quad 4,2068)\,.$$

To znamená, že

$$P\left(\sigma^2 \in (0; \quad 4,2068)\right) = 0,95.$$

Na 95 % rozptyly meraní teploty vody daným prístrojom neprekročia hodnotu $4,2068$

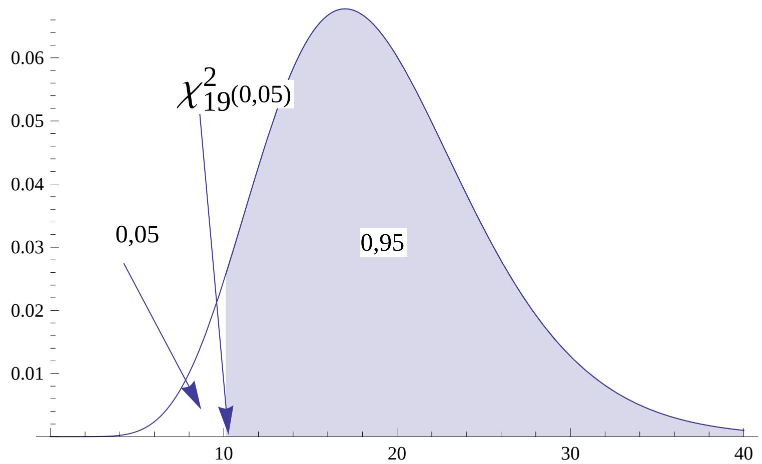


Fig. 2: $0,05$-kvantil rozdelenia $\chi^2(19)$

---

**Príklad** 49: Chceli sme zistiť, ako ľudia odhadujú jednu minútu. Pokus sme urobili na desiatich respodentoch $n = 10$. Ideme riešiť úlohu:

$$H_0 : \widetilde{X} = 60 \qquad H_1 : \widetilde{X} \neq 60$$

Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke (v sekundách). Výsleky sú usporiadané podľa veľkosti.

| Respondent | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| odhad $x_i$ | 45 | 48 | 50 | 51 | 53 | 55 | 56 | 58 | 63 | 68 |
| $y_i = x_1 - 60$ | -15 | -12 | -10 | -9 | -7 | -5 | -4 | -2 | 3 | 8 |
| $\|y_i\|$ | 15 | 12 | 10 | 9 | 7 | 5 | 4 | 2 | 3 | 8 |
| Poradie | 10 | 9 | 8 | 7 | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 | 6 |
| $R_i^+$ | | | | | | | | | 2 | 6 |

Teda $S^+ = 2 + 6 = 8$. ľahko sa dá overiť, že $S^- = 48$. Tabuľková hodnota $w_{10}(0,05) = 8$. Pretože

$$min(7, 48) = 7 \leq 8,$$

tak hypotézu $H_0$ zamietame.

Aproximácia normálnym rozdelením: Pretože

$$E(S^+) = \frac{10.11}{4} = 27,5 \qquad D(S^+) = \frac{10.11.21}{24} = 96,25,$$

tak štatistika

$$U = \frac{7 - 27,5}{\sqrt{96,25}} \cong -2,08955.$$

V tabuľkách pre $N(0,1)$ nájdeme $\phi(0,975) \cong 1,96$.
**Záver**:

$$|U| = 2,08955 \geq 1,96,$$

a teda $H_0$ zamietame.

---

**Príklad** 50: Podľa výsledkov celoslovenského prieskumu sa zistilo, že 69,2 % obyvateľov pije na raňajky kávu. Náhodne sme vybrali 62 vysokoškolských učiteľov a z nich 37 uviedlo, že na raňajky pije kávu. Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ chceme zistiť, či podiel učiteľov pijúcich na raňajke kávu je taký istý, ako v celej dospelej populácii.

Ideme teda na hladine významnosti $0,05$ testovať:

$$H_0 : p = 0,692 \qquad H_1 : p \neq 0,692,$$

Ak platí $H_0$, potom náhodná premenná $Y$ počet učiteľov pijúcich kávu, má binomické rozdelenie $Y \sim Bi(n,p)$, kde $n = 62$ a $p = 0,692$.

$$P(Y \leq k_1) = \sum_{i=0}^{k_1} \binom{62}{i} 0,692^i (1-0,692)^{n-i} \leq 0,025$$

Z binomického rozdelenia ľahko zistíme. že

$$P(Y \leq 35) = 0,023096247 < 0,025$$

a

$$P(Y \leq 36) = 0,041626452 > 0,025.$$

Z toho vyplýva, že $k_1 = 35$. Riešime úlohu: nájsť také najmenšie $k_2$, aby platilo

$$P(Y \geq k_2) = \sum_{i=k_2}^{n} \binom{62}{i} 0,692^i (1-0,692)^{n-i} \leq 0,025.$$

Pretože

$$P(Y \geq k_2) = 1 - P(Y < k_2) = 1 - P(Y \leq k_2 - 1)$$

a z binomického rozdelenia zistíme, že

$$1 - P(Y \leq 49) = 1 - 0,969018281 = 0,030981719 > 0,025$$

$$1 - P(Y \leq 50) = 1 - 0,0,984954961 = 0,015045039 < 0,025,$$

tak $k_2 = 51$.
**Záver**:
Ak $Y \in \{36, 37, \ldots, 50\}$ tak $H_0$ nezamietame. V našom prípade teda môžeme skonštatovať, že na základe prieskumu učitelia v prípade pitia kávy na raňajky sa správajú rovnako, ako celá slovenská populácia.

---

**Príklad 51**: Testujeme, či hracia kocka je regulárna. Urobili sme 600 pokusov. Hypotéza $H_0$ je, že kocka je v poriadku, oproti alternatíve $H_1$ – kocka je falošná. To znamená, že predpokladáme

$$P(1) = P(2) = \ldots P(6) = \frac{1}{6}.$$

Pretože $n = 600$ a $p_j = 1/6$, potom $np_j = 100$ pre $j = 1, 2, \ldots 6$. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené početnosti.

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 104 | 92 | 109 | 93 | 101 | 101 |
| $\Delta_j$ | 4 | -8 | 9 | -7 | 1 | 1 |
| $\frac{\Delta_j^2}{100}$ | 0,16 | 0,64 | 0,81 | 0,49 | 0,01 | 0,01 |

kde $\Delta_j = n_j - np_j = n_j - 100$. Štatistika $C$ je súčet hodnôt v poslednom riadku tabuľky:

$$C = 2,12 < 11,07049775 = (\chi_5^2)^{-1}(0,95),$$

preto $H_0$ na hladine $\alpha = 0,05$ nezamietame. Všimnime si, že $p$-hodnota je pomerne vysoká $p = \chi_5^2(2,12) = 0,832$.

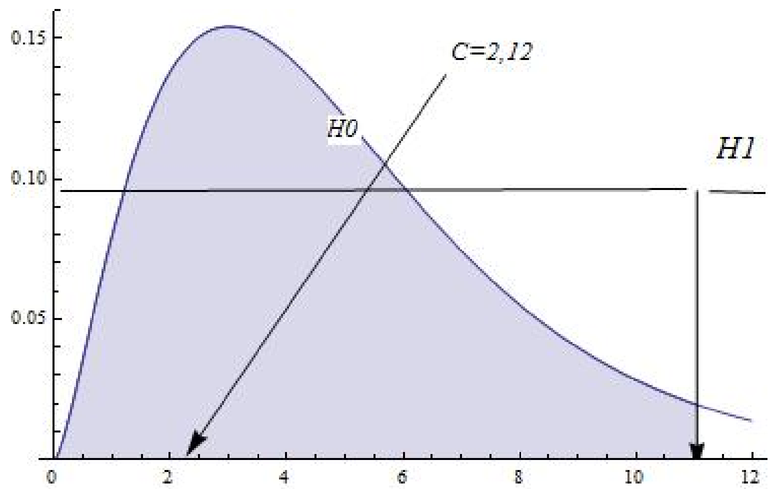


Fig. 3: Kritická oblasť

**Príklad** 52: Pokus pozostával z piatich nezávislých hodov mincou a náhodná premenná $X$ je počet padnutých znakov. Urobili sme 30 pokusov. Výsledky sú uvedené vo frekvenčnej tabuľke. Ak predpokladáme, že $X \sim Bi(5; 0,5)$, to znamená, že

$$\mathbf{H_0} : X \sim Bi(5; 0,5) \qquad \mathbf{H_1} : H_0 \ \textit{neplatí}$$

Ak $H_0$ platí, potom teoretickú pravdepodobnosť vypočítame podľa vzorca pre binomické rozdelenie pravdepodobnosti:

$$p_j = p_{i+1} = \binom{5}{i} 0,5^5$$

pre $i = 0, 1, \ldots, 5$. Hodnoty sú v nasledujúcej tabuľke:

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $n_j$ | 1 | 5 | 5 | 10 | 8 | 1 |
| $p_j$ | 0,03125 | 0,15625 | 0,3125 | 0,3125 | 0,15625 | 0,03125 |
| $30.p_j$ | 0,9375 | 4,6875 | 9,375 | 9,375 | 4,6875 | 0,9375 |
| $\Delta(x_j)$ | -0,0625 | -0,3125 | 4,375 | -0,625 | -3,3125 | -0,0625 |
| $\frac{\Delta(x_j)^2}{30.p_j}$ | 0,0042 | 0,02083 | 2,0417 | 0,0417 | 2,3408 | 0,00417 |

Štatistika $C$ je súčet hodnôt v poslednom riadku tabuľky $C = 4,4533$. Kvantil (kritickú hodnotu) hľadáme v tabuľkách pre $\chi^2$ rozdelenie s 5 stupňami voľnosti pre $\alpha = 0,05$: $(\chi^2_5)^{-1}(0,95) = 11,07$. Pretože $C = 4,4533 < 11,07$ tak $H_0$ na hladine $\alpha = 0,05$ nezamietame.

Ak náhodná premenná je spojitá, tak najskôr musíme stanoviť triedne intervaly, do ktorých budeme namerané, resp. napozorované hodnoty zadeľovať. Väčšinou volíme ekvidistatnú dĺžku intervalov $(c_j, c_j + d]$, $j = 1, \ldots, k-2$, $d > 0$.

**Postup – spojité dáta**

1. Urobíme základnú popisnú štatistiku, roztriedime dáta do triednych intervalov, urobíme frekvenčnú tabuľku.

2. Stanovíme hypotézy $H_0$, $H_1$ a hladinu významnosti $\alpha$.

3. Vypočítame teoretické pravdepodobnosti $p_j$, ktoré zodpovedajú teoretickému rozdeleniu pravdepodobnosti z hypotézy $H_0$.

4. Vypočítame testovaciu štatistiku $C$.

5. V štatistických tabuľkách si nájdeme kvantil z $\chi^2$ rozdelenia pre zodpovedajúci počet stupňov voľnosti $\nu$ resp. p-hodnotu $p$.

6. Rozhodnutie: Ak $C \geq \nu$ resp. $p \leq \alpha$ hypotézu $H_0$ na hladine významnosti $\alpha$ zamietame.

---

**Príklad 53**: Merali sme teplotu vody v podzemnom prameni. Merania sme nezávisle po sebe zopakovali 100-krát. Predpokladáme, že údaje pochádzajú z $N(12;1)$.

**Riešenie pr. 53**: Sformulujeme štatistické hypotézy

$$\mathbf{H_0}: X \sim N(12;1) \qquad \mathbf{H_1}: H_0 \text{ neplatí}$$

V naledujúcej tabuľke je uvedený výsledok intervalového triedenia:

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| tr. int. | $\leq 10$ | $(10]$ | $(10,5]$ | $(11]$ | $(11,5]$ | $(12]$ | $> 12,5$ |
| $n_j$ | 3 | 7 | 9 | 16 | 18 | 14 | 33 |
| $p_j$ | 0,023 | 0,044 | 0,092 | 0,15 | 0,191 | 0,192 | 0,308 |
| $100.p_j$ | $2,3$ | $4,4$ | $9,2$ | 15 | $19,1$ | $19,2$ | $30,8$ |
| $\Delta_j$ | 0,7 | 2,6 | -0,2 | 1 | -1,1 | -5,2 | 2,2 |
| $\Delta_j^2$ | 0,49 | 6,76 | 0,04 | 1 | 1,21 | 27,04 | 4,84 |
| $\frac{\Delta_j^2}{100p_j}$ | 0,213 | 1,536 | 0,004 | 0,0667 | 0,0634 | 1,4083 | 0,1571 |

Tab. 31: $(a] = (a,\, a+0,5]$ a $\Delta_j = n_j - 100.p_j$.

Štatistika $C$ je súčet posledného riadku v tabuľke 31

$$C = 3,448 < 12,5916 = (\chi^2_6)^{-1}(0.95),$$

preto nulovú hypotézu na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ nezamietame .

---

**Príklad 54**: (Pr. 53) Namerané údaje z príkladu 53 teraz spracujeme pomocou K-S testu. Štatistické Hypotézy sú také isté:

$$\mathbf{H_0}: X \sim N(12;1) \qquad \mathbf{H_1}: H_0 \text{ neplatí}$$

Merali sme 10 krát teplotu a namerali nasledujúce teploty (údaje sme usporiadali podľa veľkosti:

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_j$ | 10,49 | 10,85 | 10,92 | 11,05 | 11,96 |
| $F_{10}(x_j)$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
| $F(x_j)$ | 0,066 | 0,125 | 0,14 | 0,171 | 0,484 |
| $\Delta(x_j)$ | 0,034 | 0,075 | 0,16 | **0,229** | 0,016 |

| $j$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_j$ | 12,06 | 12,61 | 13,1 | 13,55 | 13,58 |
| $F_{10}(x_j)$ | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| $F(x_j)$ | 0,524 | 0,729 | 0,864 | 0,939 | 0,943 |
| $\Delta(x_j)$ | 0,076 | 0,029 | 0,064 | 0,039 | 0,057 |

kde $\Delta(x_j) = |F_{10}(x_j) - F(x_j)|$. Štatistika

$$KS = max_j(|F_{10}(x_j) - F(x_j)|) = 0,229$$

a v tabuľkách pre K-S $D_{10}(0,05) = 0,409$. Pretože $KS < D_{10}(0,05)$ tak $H_0$ teda na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ nezamietame.

---

**Príklad 55**: Nech množina $A = \{1,2,3\}$ a $\Omega$ je množina všetkých trojciferných čísel.
a) Koľko prkov má množina $\Omega$?
b) Koľko prkov má množina $\Omega_1$: každé číslo môžeme použiť len raz?
c) Koľko prkov má množina $\Omega_2$: každé číslo, okrem 1, môžeme použiť len raz?

**Riešenie pr. 55**: a) 27. b) 6. c) 13.

**Príklad 56**: Vieme že prístupový kód sa skladá, z desiatich rôznych znakov, ktoré poznáme. Aká je pravdepodobnosť, že na prvý krát uhádneme prístupový kód?

**Riešenie pr. 56**: $P(\text{uhádne kód na prvý krát }) = \frac{1}{10!} = 2,75573 \cdot 10^{-7}$.

**Príklad 57**: V urne máme 10 loptičiek označených $1, 2, 3, \ldots, 10$. Ťaháme postupne po jednej loptičke. Vytiahnutú loptičku nevraciame do urny. Toto opakujem dovtedy, kým urna nebude prázdna. Aká je pravdepodobnosť, že ich vytiahneme v poradí $1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 9$?

**Riešenie pr. 57**: $P(1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 9)) = \frac{1}{10!} = 2,75573 \cdot 10^{-7}$

**Príklad 58**: V urne máme 10 loptičiek označených tak, že 5 z nich má znak 1 a zvyšné $2, 3, 4, 5, 6$. ťaháme postupne po jednej loptičke. Vytiahnutú loptičku nevraciame do urny. Toto opakujeme dovtedy, kým urna nebude prázdna. Aká je pravdepodobnosť, že ich vytiahneme v poradí $1, 3, 2, 4, 5, 6, 1, 1, 1, 1$?

**Riešenie pr. 58**: $P(1, 3, 2, 4, 5, 6, 1, 1, 1, 1) = \frac{1}{30240} = 3,30688 \cdot 10^{-5}$

**Príklad 59**: V urne máme 12 loptičiek označených $1, 2, 3$, tak, že 5 z nich je označených číslom 1, číslom 2 sú označené 4 a zvyšné číslom 3. Ťaháme postupne po jednej loptičke. Vytiahnutú loptičku nevraciame do urny. Toto opakujeme dovtedy, kým urna nebude prázdna. Aká je pravdepodobnosť, že ich vytiahneme v poradí $1, 2, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3$?

**Riešenie pr. 59**: $P(1, 2, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3) = \frac{1}{27720} = 3,6075 \cdot 10^{-5}$

**Príklad 60**: V urne máme 12 loptičiek označených $1, 2, 3$, tak, že 5 z nich je označezných číslom 1, 4 sú označené číslom 2 a zvyšné číslom 3. Ťaháme postupne po jednej loptičke. Vytiahnutú loptičku nevraciame do urny. Toto opakujeme 4 krát. Aká je pravdepodobnosť, že všetky budú označené číslom 1?

**Riešenie pr. 60**: $= \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5. Teda P(1, 1, 1, 1) = \frac{5}{495} = 0,01\overline{01}$

**Príklad 61**: Máme udalosti $A$ a $B$. Nech $P(A) = 0,3$ a $P(B) = 0,6$. Nech $0 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$.
a) Nájdite intervaly, do ktorých padnú hodnoty $P(A|B)$, $P(B|A)$.
b) Môžu byť $A, B$ navzájom nezávislé?

**Riešenie pr. 61**: a) $0 \leq P(A|B) \leq 0,5$ a $0 \leq P(B|A) \leq 1$. b) Áno.

**Príklad 62**: Bayesová formula: Priestor náhodných udalostí je rozdelený na 5 častí $H_1, \ldots, H_5$ (navzájom sa vylučujúcich) a je daná náhodná udalosť $A$. Ak poznáme $P(A|H_i)$ a $P(H_i)$ pre $i = 1, \ldots, 5$ ako vypočítame $P(A)$ a $P(H_3|A)$?

**Riešenie pr. 62**: $P(A) = \sum_i P(H_i)P(A|H_i)$ a $P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)}$.

**Príklad 63**: V ročníku je 100 študentov, ktorí sú rozdelení do piatich skupín. Vypočítajte koľko dievčat je v ročníku. Ak náhodne vyberieme jedno dievča, aká je pravdepodobnosť, že patrí do tretej skupiny? Rozdelenie študentov je v tabuľke 32:

| skupiny | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| percento študentov v skupine | 10% | 30% | 10% | 20% | 30% |
| percento dievčat v skupine | 50% | 10% | 10% | 0% | 10% |

Tab. 32: Študenti (Pr. 63)

**Riešenie pr. 63**: V ročníku je 12 dievčat a a $P(H_3|\text{ dievča}) = \frac{1}{12}$.

**Príklad 64**: V jednej krabici je 10 modrých a 5 červených balónov. V druhej krabici je osem bielych a 12 modrých balónov.
a) Náhodne si zvolíme jednu krabicu a vyberieme z nej 1 balón. Aká je pravdepodobnosť, že nebude modrý?
b) Náhodne vyberieme jednu krabicu. Aká je pravdepodobnosť, že z nej vytiahnutý balón bude biely?
c) Z oboch krabíc vyberieme po jednom balóne. Aká je pravdepodobnosť, že oba budú modré?

**Riešenie pr.** 64: a) $0,3\overline{6}$, b) $0,2$, c) $0,4$.

**Príklad 65**: V lietadle je 20% cestujúcich zo SR. Je známe, že 60% obyvateľ ov SR pije po obede pivo, kým obyvatelia iných štátov vypijú pivo po obede len v 20%. a) Aké percento cestujúcich v lietadle neupredností̌uje pivo po obede?
b) Cestujúci si po obede vypýta pivo. S akou pravdepodobnosťou je to občan SR?

**Riešenie pr.** 65: a) 72%, b) $0,42857$.

**Príklad 66**: Je známe, že 25% obyvateľstva je ľavákov. Aká je pravdepodobnosť, že na seminári kde je 30 účastníkov sú maximálne traja ľaváci?

**Riešenie pr.** 66: $\doteq 0,03745$.

**Príklad 67**: Nikto nie je neomylný: obvodný lekár určí v 50% prípadoch správnu diagnózu, v 20% prípadoch nesprávnu diagnózu a v 30% prípadoch odporučí pacienta na vyšetrenie k špecialistovi na polikliniku. Špecialista určí v 60% správnu diagnózu, v 15% nesprávnu a pri 25% pošle pacienta na konziliárne vyšetrenie k primárovi. Primár určí správnu diagnózu v 85% a nesprávnu v 15%. a) Aká je pravdepodobnosť, že obvodný lekár určí diagnózu správne?
b) Aká je pravdepodobnosť, že pacient bude mať nesprávne určenú diagnózu?

**Riešenie pr.** 67: a) $0,5$, b) $0,25625$.

**Príklad 68**: Máme tri košíky. Každý z troch košíkov obsahuje jednu bielu a dve čierne guľôčky. Z prvého košíka náhodne vyberieme guličku a vložíme do druhého. Z druhého košíka vybierieme náhodne jednu guličku a vložíme do tretieho. Aká je pravdepodobnosť, že z tretieho košíka náhodne vytiahneme čiernu guličku?

**Riešenie pr.** 68: $0,\overline{6}$

**Príklad 69**: Dva závody vyrábajú okenné rámy. Prvý závod vyrába 45% celkovej produkcie, druhý 55%. Z produkcie prvého závodu: 90% I.kategórie, 10% II. kategórie; druhého závodu: 95% I. kategórie, 5% II. kategórie, Určte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný rám je I. kategórie.

**Riešenie pr.** 69: Podmienená pravdepodobnosť, veta o úplnej pravdepodobnosti, Bayesova veta.

**Príklad 70**: Päť krát hádžem mincou. N.p. $X$ je „počet hláv mínus počet znakov“.
a) Aké hodnoty môže nadobúdať n.p. $X$.
b) Napíšte všetky elementárne udalosti pre prípad $X(\omega) = 3$.

**Riešenie pr.** 70: a) $X \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$. b) $(H, H, H, H, Z)$, $(H, H, H, Z, H)$, $(H, H, Z, H, H)$, $(H, Z, H, H, H)$, $(Z, H, H, H, H)$.

**Príklad 71**: N.p. $X$ je rozdiel "počet hláv mínus počet znakov"pri trojnásobnom hode mincou.
a) Aké hodnoty môže n.p. X nadobúdať?
b) Nájdite pre n.p. X príslušné elementárne udalosti.
c) Určite rozdelenie pravdepodobnosti a distribučnú funkciu pre n.p. X.

**Riešenie pr.** 71: a) $X \in \{-3, -1, 1, 3\}$;
b) $X^{-1}(-3) = \{(Z, Z, Z)\}$, $X^{-1}(-1) = \{(H, Z, Z), (Z, H, Z), (Z, Z, H)\}$,
$X^{-1}(-1) = \{(H, H, Z), (H, Z, H), (Z, H, H)\}$, $X^{-1}(3) = \{(H, H, H)\}$;
c) $P_X = \{(-3,\ 0,125), (-1\,0,375), (1,\ 0,375), (3\,0,125)\}$,
$F_X = \{(-3,\ 0,125), (-1,\ 0,5), (1,\ 0,875), (3,\ 1)\}$.

**Príklad 72**: N.p. $X$ nadobúda hodnoty z množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$ a jej pravdepodobnostné rozdelenie je dané v tabuľke:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $0,05$ | $0,05$ | $0,1$ | $0,1$ | $0,1$ | $0,1$ | $0,1$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,1$ |

Vypočítajte strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$.

**Riešenie pr.** 72: $E(X) = 6,25$ a $D(X) = 7,2875$.

**Príklad** 73: Advokátova obhajoba je úspešná s pravdepodobnosťou $p = 0,8$. Pri úspešnej obhajobe dostane 2000EUR, pri neúspešnej obhajobe musí zaplatiť súdne trovy vo výške 500EUR.
a) Aký vysoký je priemerný zisk obhájcu?
b) Keby obhajca vydal 800EUR navyše na prípravu obhajoby, aký by bol jeho očakávaný zisk?

**Riešenie pr.** 73: a) 1500EUR b) 700EUR.

---

**Príklad** 74: Hráč si zvolí číslo medzi $1-6$ a hodí tromi kockami. Ak všetky 3 kocky ukážu to isté zvolené číslo, vyhrá 3EUR. Ak toto číslo ukážu 2 kocky, vyhráva 2EUR a ak iba 1 kocka vyhráva 1EUR. Ak ani jedna kocka neukáže zvolené číslo, potom musí zaplatiť 1EUR. Náhodná premenná $X$ znamená výšku výhry.
a) Aké hodnoty nadobúda n.p. $X$?
b) Zistite pravdepodobnostné rozdelenie n.p. $X$ a vypočítajte jej strednú hodnotu a disperziu.

**Riešenie pr.** 74: a) $X \in \{-1, 1, 2, 3\}$, b) $P(X = -1) = 125/216$, $P(X = 1) = 75/216$, $P(X = 2) = 15/216$, $P(X = 3) = 1/216$, $E(X) \doteq -0,079$, $D(X) \doteq 1,24$.

---

**Príklad** 75: Semafór na križovatke ukazuje 25% času červenú. Aká veľká je pravdepodobnosť, že z 5 náhodne prechádzajúcich áut
a) nemusí čakať ani jedno auto;
b) musí čakať nanajvýš jedno auto;
c) musia čakať práve tri autá;
d) musia čakať maximálne dve autá?

**Riešenie pr.** 75: a) $0,237305$, b) $0,633$, c) $0,088$, d) $0,896$.

---

**Príklad** 76: Pri majstrovstvách v tenise hrá hráč $A$ proti hráčovi $B$ toľko po sebe idúcich setov, kým jeden z hráčov nevyhrá tri sety. Výsledky setov sú od seba nezávislé a hráč $A$ vyhrá set s pravdepodobnosťou $0,6$. N.p. $X$ označuje počet hraných setov.
a) Určte hodnoty n.p. $X$ a nájdite elementárne udalosti prislúchajúce $X = 4$.
b) Určte rozdelenie pravdepodobnosti n.p. $X$.
c) S akou pravdepodobnosťou sa zápas skončí po piatom sete?
d) Aká je pravdepodobnosť, že na víťazstvo jedného z nich sú potrebné maximálne 4 sety? e) Aká je pravdepodobnosť, že na víťaztsvo hráča $A$ sú potrebné maximálne 4 sety?

**Riešenie pr.** 76: a) $X \in \{3, 4, 5\}$, $AABA$, $ABAA$, $BAAA$, $BBAB$, $BABB$, $ABBB$; b) $P_X = \{(3,\ 0,28), (4,\ 0,3744), (5,\ 0,$
c)$0,3456$; d) $0,6544$; e) $0,4752$.

---

**Príklad** 77: Máme dané rozdelenie pravdepodobnosit n.p. $X$:

$$P_X = \{(0,\ 0,1), (1,\ 0,2), (2,\ 0,3), (3,\ 0,4)\}.$$

a) Nakreslite graf distribučnej funkcie n.p. X. b) Zistite modus. c) Určte strednú hodnotu a disperziu n.p. X.

**Riešenie pr.** 77: b) $Mo_X = 3$; c) $E(X) = 2$, $D(X) = 1$.

---

**Príklad** 78: Udalosť $A$ sa vyskytuje pri experimente s pravdepodobnosťou $P(A) = 0,4$. Pokus sa opakuje dovtedy, kým sledovaná udalosť $A$ nastane. Aká je pravdepodobnosť, že budeme potrebovať zopakovať 3?

**Riešenie pr.** 78: $0,144$.

---

**Príklad** 79: Infekcia sa prenáša kontaktom. Pravdepodobnosť prenosu infekcie na zdravého človeka pri prvom kontakte je $0,4$.
a) Jeden infikovaný má kontakt s piatimi zdravými ľuďmi. Určite rozdelenie n.p. $X$, pričom n.p. $X$ znamená počet osôb, ktoré ochorejú.
b) Vypočítajte $E(X)$, $D(X)$, $P(X = 0)$, $P(X < 3)$.

**Riešenie pr.** 79: a) $Bi(5; 0,4)$, b) 2; $1,2$; $0,07776$; $0,68256$.

---

**Príklad** 80: Prieskum verejnej mienky ukázal, že 80% obyvateľov podporuje zákaz výstavby v lokalite Včelín. Aká je pravdepodobnosť, že z dvadsatich náhodne oslovených obyvateľov je maximálne 12 za zákaz výstavby v lokalite Včelín?

**Riešenie pr.** 80: $0,03214$.

**Príklad** 81: Len 30% ľudí vo veľkom meste si myslí, že verejná doprava v meste (MHD) je uspokojivá. Náhodne vyberiem desať osôb.
a) Aká je pravdepodobnosť, že najviac 5 z nich si myslí, že MHD je uspokojivá?
b) Aká je pravdepodobnosť, že práve 6 si myslí, že MHD je uspokojivá?

**Riešenie pr.** 81: a) $0,4164$; b) $0,1916$.

**Príklad** 82: Basketbalový hráč má osobnú štatistiku úspešných hodov 70%.
a) Aká je pravdepodobnosť, že pri desiatich hodoch trafí 8 krát?
b) Aká je pravdepodobnosť, že pri sto pokusoch trafí menej ako 60 krát?

**Riešenie pr.** 82: a) $X \sim Bi(10; 0,7)$ a riešime $P(X = 8)$; b)$X \sim Bi(100; 0,7)$ a riešime $P(X < 60)$.

**Príklad** 83: V krabici s 20-timi fixkami na bielu tabuľu sa nachádzajú 3 vadné. Učiteľ si vyberie 5. N.p. $X$ predstavuje počet vadných fixiek.
a) Aké je rozdelenie pravdepodobnosti n.p. $X$?
b) Aká je pravdepodobnosť, že minimálne jedna z jeho piatich fixiek je vadná?

**Riešenie pr.** 83: a) $P_X = \{(0, 0,3991), (1, 0,4605), (2, 0,1316), (3, , 0,0088)\}$; b) $0,6009$.

**Príklad** 84: Vypočítajte $E(X)$ a $D(X)$ n.p. $X$ a nakreslite graf rozdelenia pravdepobodnosti a graf distribučnej funkcie, ak má nasledujúce rozdelenie pravdepodobnosti:

$$P_X = \{(2, 0,1), (3, 0,3), (4, 0,3), (5, 0,2), (6, 0,1)\}.$$

**Riešenie pr.** 84: $E(X) = 3,9$ a $D(X) = 1,29$.

**Príklad** 85: Nech $X$ je n.p. a

$$P_X = \{(-1, 0,1), (-1/2, 0,2), (0, 0,4), (1, 0,2), (2, 0,1)\}.$$

Vypočítajte $\rho(X, X^2)$.

**Riešenie pr.** 85: $\rho(X, X^2) = 0,74053$.

**Príklad** 86: Vedenie obchodnej firmy zaujímalo, či je rozdiel medzi výsledkami ich zamestnancov (predajcov) v jednotlivých skupinách štatisticky významný. Zamestanci boli rozdelení do nasledujúcich skupín podľa oblastí, v ktorých pôsobia: A (Staré mesto); B ( Petržálka); C ( Dúbravka); D (Ružinov). V každej časti pôsobilo 20 dílerov. $\overline{X}_i$ je priemerný zisk a $s_i$ je odhad smerodajnej odchylky v skupine za týždeň, $i = 1, 2, 3, 4$.

| mestksá časť | $\overline{X}_i$ | $s_i$ |
|---|---|---|
| A (Staré mesto) | $1253,2$ EUR | 150 EUR |
| B (Petržálka) | $1085,4$ EUR | 148 EUR |
| C (Dúbravka) | $1120,2$ EUR | 152 EUR |
| D (Ružinov) | $1990,2$ EUR | 170 EUR |

Zistite, či je štatisticky významný rozdiel medzi jednotlivými skupinami dílerov.

**Riešenie pr.** 86: (ANOVA). Otestujte najskôr rovnosť rozptylov.

**Príklad** 87: Zisťoval sa počet detí v rodine. Prieskum bol urobený v 200 rodinách. Výsledky sú v nasledujúcej frekvenčnej tabuľke:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Počet detí v rodine | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Počet rodín | 50 | 67 | 23 | 15 | 45 |

a) Zistite modus., medián, dolný a horný kvartil. b) Načrtnite krabicový graf. c) Vypočítajte odhad strednej hodnoty a disperzie.

**Riešenie pr.** 87: a) Modus = 0, medián = 1, dolný kvartil = 0,5 a horný kvartil = 4; c) $\mu \doteq \overline{x} = 1,69$, $\sigma^2 \doteq S_1^2 = 0,056$.

**Príklad 88**: Urobilo sa 20 meraní obsahu dusíka vo vodnej nádrži. Vypočítali sme obojstranné konfidenčné intervaly pre stredú hodnotu a rozptyl na rôznych hladinách významnosti $\alpha \in \{0,1;\, 0,05;\, 0,01\}$. Priraďte jednotlivým intervalom ich hladiny významnosti a rozhodnite či stredná hodnota sa rovná $0,253$ oproti alternatíve, že sa nerovná $0,253$ a či rozptyl sa rovná $0,025$ oproti alternatíve, že sa nerovná $0,024$ na jednotlivých hladinách významnosti. Aký aritmetický priemer pre obsah dusíka bol vypočítaný?

| IS pre $\mu$ | $\alpha_\mu$ | $H_0 : \mu = \mu_0$ | IS pre $\sigma^2$ | $\alpha_{\sigma^2}$ | $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0,22;\, 0,26)$ | | | $(0,018;\, 0,023)$ | | |
| $(0,21;\, 0,27)$ | | | $(0,017;\, 0,025)$ | | |
| $(0,23;\, 0,25)$ | | | $(0,009;\, 0,032)$ | | |

**Riešenie pr.** 88: $\overline{x} = 0,24$ a IS v tabuľke 33

| IS pre $\mu$ | $\alpha_\mu$ | $H_0 : \mu = \mu_0$ | IS pre $\sigma^2$ | $\alpha_{\sigma^2}$ | $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0,22;\, 0,26)$ | $0,05$ | NH0 | $(0,018;\, 0,023)$ | $0,1$ | ZH0 |
| $(0,21;\, 0,27)$ | $0,01$ | NH0 | $(0,017;\, 0,025)$ | $0,05$ | ZH0 |
| $(0,23;\, 0,25)$ | $0,1$ | ZH0 | $(0,009;\, 0,032)$ | $0,01$ | NH0 |

Tab. 33: NH0 – nezamietame $H_0$ a ZH0 – zamietamme $H_0$

---

**Príklad 89**:
Vedenie fakulty sa rozhodlo, že odmení študentov za výsledok zo skúsky z Matematiky 1 (tabuľka 34).

| Výsledok skúsky | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$: Odmena v EUR | 25 | 15 | 10 | 5 | 0 |
| $P_X$ | $0,1$ | $0,15$ | $0,25$ | $0,2$ | $0,3$ |

Tab. 34: $P_X$ je pravdepodobnosť s akou známkou študent ukončí skúšku. Pravdepodobnosť sa zistila dlhodobým sledovaním výsledkov skúšky z Matematiky. Do úvahy sa nebrala známka FX.

V ročníku je 100 študentov. Pre plánovanie financií je potrebné vedieť, koľko EUR budú asi potrebovať, ak predpokladáme, že výsledky zo skúšky budú zodpovedať predchádzajúcim ročníkom.

**Riešenie pr.** 89: Odhad strednej hodnoty n.p. $X$ je očakávaná odmena v priemere na jedného študenta a smerodajná odchýlka predstavuje variabilitu.

---

## 1 pisomky

**Príklad 90**: Hádžeme 3 - krát mincou. Náhodná premenná $X$ dvojnásobok počtu hláv.
a) Vypočítajte rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $X$. Nakreslite graf distribučnej funkcie.
b) Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu tejto náhodnej premennej.
c) Vypo?ítajte $P(X > 0)$ a $P(X = 1)$.

---

**Príklad 91**: Oddelenie sťažností výrobcu vysávačov analyzovalo veľký počet závad a výsledok zapísali do tabuľky 35.

| Chyby | elektrická | mechanická | vzhľadová | iná | marg. |
|---|---|---|---|---|---|
| v záručnej dobe | 10% | 15% | 15% | 15% | |
| po záručnej dobe | 15% | 10% | 10% | | |
| marg. | | | | | |

Tab. 35: Tabuľka výskytu chýb

Označme javy:
chyba je elektrická — $A$;
chyba vznikla v záručnej dobe — $B$.

a) Doplňte tabuľku 35

b) Slovne sformulujte javy : $A \cup B$, $\cap B$, $A \cap B^c$, a vypočítajte: $P(A)$, $P(B \cup \ A^c)$, $P(A \cap B^c)$.

c) Zistite či javy , $A$ a $B$ sú nezávislé.

---

**Príklad 92**: V podniku sa vyrábajá piesty. Ich priemer (rozmer) je normou stanovený na 11,5cm a prípustá štandardná odchýlka = 0,25cm. Náhodne sme vyberali 15 piestov. Ich priemerný rozmer bol 11,55 cm so štandardnou odchýlkou 0,26cm. Overte na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či môžeme tvrdiť, že priemer piestov sa dodržuje alebo nie a či štandardná odchýlka je v norme, alebo nie? Čo je p-hodnota?

---

**Príklad 93**: U 100 užívateľov aplikácie SKUŠKA sa sledoval počet kliknutí na logo firmy XXX počas jedného dňa. Nájdite dolný a horný kvartil, medián, modus a zostrojte krabicový (box) graf. Nájdite extremálnu hodnotu (outlayer), ak existuje. Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 30 | 10 | 10 | 15 | 5 |

---

**Príklad 94**: Generátor náhodných čísel vygeneroval 100 čísel z množiny $\{0, 1, 2, 3\}$. Otestujte na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či ide o náhodný výber z $Bi\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke:

| 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 10 | 40 | 40 | 10 |

---

**Príklad 95**: N.p. X je určená funkciou hustoty $f_X(t)$

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & t \notin < 0, 2 > . \end{cases}$$

a)Vypočítajte distribučnú funkciu $F_X(x)$. Načrtnite graf distribučnej funkcie a funkcie hustoty n.p. $X$.
b) Nájdite také čísla $a, b$ aby platilo: $P(X < a) = 0,01$, $P(X \geq b) = 0,19$. Aká je pravdepodobnosť, že n.p. $X$ nadobudne hodnotu z intervalu $\langle a,\ b\rangle$? Vyznačte na grafe distribučnej funkcie a na grafe funkcie hustoty.

---

**Príklad 96**: V urne je 10 guličiek, z toho 3 biele a 7 modrých. Náhodne vyberieme 2 guličky a nevrátime naspäť do urny. V nasledujúcom ťahu vyberieme jednu guličku.
a) Aká je pravdepodobnosť, že v druhom ťahu vyberieme bielu guličku?
b) V druhom ťahu sme vybrali modrú guličku. Aká je pravdepodobnosť, že v prvom ťahu sme vybrali jednu modrú a jednu bielu guličku?

---

**Príklad 97**: Priemerná teplota disku po hodine prevádzky počítača bola $\overline{x} = 25°C$ a $s^2 = 1,44$, pokus sa opakoval 25×.

Vypočítajte 95%-ný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu. a otestuje na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či stredná hodnota je rovná $23°C$ ($\mu_0 = 23°C$), ako tvrdí výrobca, alebo sa nerovná $\mu_0$.

Výrobca naviac udáva, že rozptyl sa rovná $1,21$ ($\sigma_0^2 = 1,21$). Otestuje na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či výrobca má pravdu, alebo je rozptyl väčší ako $\sigma_0^2$.

V oboch prípadoch naformulujte $H_0$ a $H_1$!!!!

---

**Príklad 98**: Nech $A, B$ sú náhodné udalosti, pre ktoré platí $P(B^c) = 0,4$, $P(A|B) = 0,3$ a $P(B|A) = 0,9$. Vypočítajte: $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$. Sú $A^c, B^c$ nezávislé?

---

**Príklad 99**: Hádžme kockou a n.p. $X, Y$ sú definované:
$X = 1$ padlo párne číslo, v opačnom prípade $X = 0$.
$Y = 0$ padlo číslo menšie ako 4, $Y = 1$ ak padlo číslo 4 alebo 5 a $Y = 2$ ak padlo č. 6.
Zistite, či n.p. $X, Y$ sú nezávislé, vypočítajte $cov(X, Y)$ a podmienenú pravdepodobnosť $P(X > 0|Y < 2)$.

---

**Príklad 100**: Priemerná teplota disku po hodine prevádzky počítača bola $\overline{x} = 25°C$ a $s^2 = 1,44$, pokus sa opakoval 9×.
a) Vypočítajte 95%-ný interval spoľahlivosti pre rozptyl.
b) Otestuje na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či rozptyl je menší alebo rovný $1,21°C^2$ ($\sigma_\circ^2 = 1,21°C^2$), alebo je väčší $\sigma_0^2$. **Sformulujte $H_0$ a $H_1$!!!!**
c) Zmenilo by sa rozhodnutie, ak by $\alpha = 0,01$? Svoju odpoveď odôvodnite.

**Príklad** 101: Nech $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ je náh. výber z $N(2,1)$ a $Z = 2X_1 + X_2 - X_3 - 3X_4$.
a) Aké pravd. rozdel. má n.p. $Z$? Vypočítajte jeho parametre?
b) Nájdite číslo $u$, pre ktoré platí: $P(Z < u) = 0,95$.

---

**Príklad** 102: V urne je 10 guličiek, z toho 3 biele a 7 modrých. Náhodne vyberieme tri guličky. Označme $X$ počet vybraných bielych guličiek a $Y$ počet vybraných modrých guličiek.;
a) Vypočítajte združené rozdelenie náhodného vektora $(X, Y)$.
b) Vypočítajte kovariančnú maticu náhodného vektora $(X, Y)$.
c) Vypočítajte $D(2X + Y)$.

---

**Príklad** 103: Výsledky z Matematickej štatistiky po dvoch termínoch boli nasledujúce:

| Výsledok skúsky | A | B | C | D | E | FX |
|---|---|---|---|---|---|---|
| známka | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| početnosť | 8 | 14 | 21 | 29 | 35 | 14 |

a) Nakreslite histogram relatívnych početností.
b) Zistite modus, median, dolny a horny kvartil pre známku.
c) Nakreslite krabicový graf pre znaku.

---

**Príklad** 104: V jednej krabici je 10 modrých a 5 červených balónov. V druhej krabici je osem bielych a 12 modrých balónov.
a) Náhodne si zvolíme jednu krabicu a vyberieme z nej 1 balón. Aká je pravdepodobnosť, že nebude modrý?
b) Náhodne vyberieme jednu krabicu. Aká je pravdepodobnosť, že z nej vytiahnutý balón bude biely?
c) Z oboch krabíc vyberieme po jednom balóne. Aká je pravdepodobnosť, že oba budú modré?

---

**Príklad** 105: N.p. X je určená funkciou hustoty $f_X(t)$ s neznámou konštantou $a$

$$f_X(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t \leq a \\ 0 & t \notin (0,\, a]. \end{cases}$$

a) Vypočítajte číslo $a$.
b) Vypočítajte distribučnú funkciu $F_X$.
c) Vypočítajte $E(X)$.
d) Vypočítajte $P(-1 < X < 1)$ a vyznačte na grafe funkcie hustoty.

---

**Príklad** 106: Traja hráči $X, Y, Z$ hrajú spoločenskú hru a majú jednu kocku. Pre každého hráča pri jednom hode kockou platia iné pravidlá uvedené v tab. 38. Vypočítajte kovariančnú maticu $\Sigma$ náhodného vektora $(X, Y, Z)$, $E(X + 2Y + Z)$ a $D(X + 2Y + Z)$.

| $\Omega$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ | $\omega_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $Y$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 |
| $Z$ | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Tab. 36: Pravidlá pre hračov $X, Y, Z$.

**Príklad** 107: V ročníku je 100 študentov, sú to absolventi gymnázia alebo priemyslovky. Všetci robili skúšku z MSA. Označme: A–absolv. gymnázia; B – uspel na skúške, C – uspel II.termíne.
a) slovne sformulujte javy : $B \cup C$, $A \cap B^c$;
b) Vypočítajte pravdepodobnosti javov: $B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap A^c$;
c) zistite, či sú nasledujúce dvojice udalostí nezávislé: $(A, C)$, $(C, B^c)$
Tabuľka relatívnych početností:

| škola/výsledok | Uspel I.ter. | Uspel II.ter. | Neuspel |
|---|---|---|---|
| Gymnázium | $0,25$ | $0,1$ | $0,05$ |
| Priemyslovka | $0,3$ | $0,2$ | $0,1$ |

**Príklad** 108: Nech X je n.p. a funkcia $f_X$ je definovaná nasledovne:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{4} & 0 < t \leq b \\ 0 & t \notin (0, b]. \end{cases}$$

a) nájdite číslo $b$ tak, aby $f_X$ bola funkciu hustoty n.p. $X$;
b) vypočítajte hodnotu dist. funkcie $F_X(0,5 \cdot b)$ a $E(X)$;
c) vypočítajte $P(0,2 \cdot b < X \leq 0,5 \cdot b)$.

**Príklad** 109: Pravdepodobnosť, že 6 padne pri hode falošnou kockou je 0,1. Kockou hádžeme dovtedy, kým padne 6 (úspešný hod). Náhodná premenná je počet neúspešných hodov. Vypočítajte pravdepodobnosť, že kockou budeme hádzať aspoň 3 krát?

**Príklad** 110: Nech $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ je náh. výber z $N(2, 1)$ a $Z = X_1 - X_2 + X_3 - X_4$. a) Aké pravd. rozdel. má n.p. $Z$? Vypočítajte jeho parametre.
b) Nájdite číslo $u$, pre ktoré platí: $P(Z > u) = 0,95$.

**Príklad** 111: Hádžme 3× mincou a máme dve pravidlá: $Z$ je rozdiel "počet hláv mínus počet znakovä $Y$ je "počet znakov".

1. Nájdite združené rozdelenie pravdepodobnosti pre $Z, Y$ a ich marginálne rozdelenia pravdepodobnosti.
2. Vypočítajte korelačný koeficient $\rho(Z, Y)$.

**Príklad** 112:
1. Pri testovaní na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ p-hodnota vyšla 0,21. Zamietame, alebo nezamietame nulovú hypotézu?
2. Akých chýb sa môžeme dopustiť pri testovaní štat. hypotéz a aké sú ich vzťahy.

**Príklad** 113: Priemerná teplota disku po hodine prevádzky počítača bola $\overline{x} = 25°C$ a $s^2 = 1,44$, pokus sa opakoval 9×.
a) Vypočítajte 95%-ný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.
b) Otestuje na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či stredná hodnota je rovná $23°C$ ($\mu_0 = 23°C$), ako tvrdí výrobca, alebo sa nerovná $\mu_0$. **Sformulujte $H_0$ a $H_1$!!!!**
c) Zmenilo by sa rozhodnutie, ak by $\alpha = 0,01$? Svoju odpoveď odôvodnite.

**Príklad** 114: Nech $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ je náh. výber z $N(2, 1)$ a $Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$.
a) Aké pravd. rozdel. má n.p. $Z$? Vypočítajte jeho parametre?
b) Nájdite číslo $u$, pre ktoré platí: $P(Z < u) = 0,95$.

**Príklad** 115: V urne je 10 guličiek, z toho 3 biele a 7 modrých. Náhodne vyberieme guličku a nevrátime naspäť do urny. V nasledujúcom ťahu opäť vyberieme jednu guličku. Označme $X$ počet vybraných bielych guličiek a $Y$ počet vybraných modrých guličiek.;
a) Vypočítajte združené rozdelenie náhodného vektora $(X, Y)$.
b) Vypočítajte kovariančnú maticu náhodného vektora $(X, Y)$
c) Vypočítajte $D(2X + Y)$.

**Príklad** 116: Generátor náhodných čísel vygeneroval 100 čísel z množiny $\{0, 1, 2, 3\}$. Otestujte na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, či ide o náhodný výber z $Bi\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Výsledky sú v tabuľke 37:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 10 | 40 | 40 | 10 |

Tab. 37: Výsledky náhodného výberu

---

**Príklad** 117: Roboty boli v prvých troch mesiacoch roku 2000 veľmi zlej kvality. Vyrobili 500 kusov a z toho bolo 40% chybných. Po sprísnení kontroly vo zvyšných mesiacoch roku 2000 vyrobili 1500 kusov a nepodarkovosť sa znížila na 10%. Kúpili sme robota z r.2000.
a) Aká je pravdepodobnosť, že je chybný?
b) Pri kontrole sme zistili, že je v poriadku. Aká je pravdepodobnosť, že ide o robota vyrobeného v prvých troch mesiacoch roku 2000?

---

**Príklad** 118: N.p. X je určená funkciou hustoty $f_X(t)$ s neznámou konštantou $a$

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & 1 \leq t \leq a \\ 0 & t \notin (1, a). \end{cases}$$

a) Vypočítajte číslo $a$.
b) Vypočítajte distribučnú funkciu $F_X$ a na grafe funkcie $F_X$ vyznačte $P(X \leq \frac{a}{2})$.
c) Vypočítajte $E(X)$.
d) Vypočítajte $P(0 < X \leq 2)$ a vyznačte na grafe funkcie hustoty.

---

a) Traja hráči $X, Y, Z$ hrajú spoločenskú hru a majú jednu kocku. Pre každého hráča pri jednom hode kockou platia iné pravidlá uvedené v tab. 38.
Vypočítajte kovariančnú maticu $\Sigma$ náhodného vektora $(X, Y, Z)$, $E(X + 2Y + Z)$ a $D(X + 2Y + Z)$.

| $\Omega$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ | $\omega_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $Y$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 |
| $Z$ | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Tab. 38: Pravidlá pre hračov $X, Y, Z$.