1 Funkcie viacerých premenných.

1.1 Definičný obor funkcie.

V cvičeniach 1 - 31 nájdite a načrtnite definičný obor daných funkcií:

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$, kde $r \geq 0$ je reálne číslo.
   $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq r^2\right\}\right]$

2. $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$, kde $r \geq 0$ je reálne číslo.
   $\left[D(g) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 < r^2\right\}\right]$

3. $f(x,y) = \ln(-x - y)$.
   $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x < -y\right\}\right]$

4. $g(x,y) = \arcsin \frac{y}{x}$.
   $\left[D(g) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x > 0,\ -x \leq y \leq x;\ x < 0,\ -x \geq y \geq x\right\}\right]$

5. $f(x,y) = \left(\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}\right)^{\frac{!}{2}}$.
   $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x \leq x^2 + y^2 < 2x\right\}\right]$

6. $f(x,y,z) = \ln\left(1 - x^2 - y^2 + z^2\right)$.
   $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 - z^2 < 1\right\}\right]$

7. $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2} + \ln\left(6 + 2x - y^2\right)$.
   $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y^2 - x^2 \geq 0 \wedge 6 + 2x - y^2 > 0\right\}\right]$

8. $f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2} + \arccos(9x^2 + 16y^2)$.
   $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 < 9x^2 + 16y^2 \leq 1\right\}\right]$

9. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}} + \arcsin(x + y)$.
   $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ xy > 0 \wedge x + y \in \langle -1, 1\rangle\right\}\right]$

10. $f(x,y,z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} + \ln\left(-x^2 - y^2 + z^2\right)$.
    $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 9 \geq x^2 + y^2 + z^2 \wedge x^2 + y^2 < z^2\right\}\right]$

11. $f(x,y,z) = \arcsin\left(x^2 + y^2 - z\right)$.
    $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ -1 \leq x^2 + y^2 - z \leq 1\right\}\right]$

12. $f(x,y,z) = \arccos(2x - 1) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{y} + \ln\left(4 - z^2\right)$.
    $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ -2 < z < 2\right\}\right]$

13. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln\left(9 - x^2 - y^2\right)$.
    $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 < 9\right\}\right]$

14. $f(x,y) = yx^{\frac{x}{y}}$.
    $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x > 0, y \neq 0\right\}\right]$

15. $f(x,y) = \arcsin\left[2y(1+x^2)-1\right].$
$\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 \le y \le \frac{1}{1+x^2}\right\}\right]$

16. $f(x,y) = \sqrt{2x+2y-y^2-5}.$
$\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x \ge 2, (y-1)^2 \le 2(x-2)\right\}\right]$

17. $f(x,y,z) = \frac{x}{y-z}.$
$\left[D(f) = \mathbf{R}^3 - \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R},\ z = y\right\}\right]$

18. $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}.$
$\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 4\right\}\right]$

19. $\mathbf{f}(x,y) = \left(\arcsin\left(1+e^{x+y}\right), \frac{x^2}{1-x-y}\right).$
[Daný predpis nie je funkciou, pretože f_1 neexistuje]

20. $\mathbf{f}(x,y) = \left(\ln(x+y), \arcsin\left(\frac{y-1}{x}\right)\right).$
$\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x < 0\ \ -x < y < 1-x,\ x > 0\ 1-x \le y \le 1+x\right\}\right]$

21. $\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}, \sqrt{\sin\left[\pi\left(x^2+y^2\right)\right]}\right).$

$$\left[\begin{array}{c} D(f) = D(f_1) \cap D(f_2), \\ \text{kde } D(f_1) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 4x \ge y^2 \wedge x^2+y^2 < 1 \wedge (x,y) \ne (0,0)\right\}, \\ D(f_2) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 2k \le x^2+y^2 \le 2k+1\right\} \end{array}\right]$$

22. $\mathbf{f}(x,y) = \left(\arcsin\left[2+\sqrt{x+y}\right], \ln(x+y)\right).$
[Daný predpis nie je funkciou, pretože f_1 neexistuje]

23. $f(x,y) = \ln\left(x \ln(y-x)\right).$
$\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ (x > 0 \wedge y > 1+x) \vee (x < 0 \wedge x < y < x+1)\right\}\right]$

24. $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right) + \arcsin(1-y).$
$\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -y^2 \le x \le y^2 \wedge 0 < y \le 2\right\}\right]$

25. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}\right).$
$\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \ge 1 \wedge \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} < 1\right\}\right]$

26. $f(x,y) = y + \arccos x + \arcsin(x+y).$
$\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -1 \le x \le 1,\ -1-x \le y \le 1-x\right\}\right]$

27. $f(x,y) = \ln(x \sin y) + \sqrt{y \sin x}.$
$\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x \sin y > 0 \wedge y \sin x \ge 0\right\}\right]$

28. $f(x,y,z) = \sqrt{4-z-x^2-y^2} + \ln\left(x^2+y^2+z^2-4\right) - \sqrt[4]{z}.$
$\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ \sqrt{4-x^2-y^2} < z \le 4-x^2-y^2\right\}\right]$

29. $f(x,y,z)=\sqrt{(2-x^2-y^2-z)(z-x^2-y^2)}$.
$\left[D(f)=\left\{\begin{array}{c}(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ \left(z\le 2-x^2-y^2\wedge z\ge x^2+y^2\right)\vee\\ \vee\left(z\ge 2-x^2-y^2\wedge z\le x^2+y^2\right)\end{array}\right\}\right]$

30. $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$.
$\left[D(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x^2+y^2-z^2<1\right\}\right]$

31. $f(x,y,z)=\sqrt{\arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)}$.
$\left[D(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ 0<\sqrt{x^2+y^2}\le z\right\}\right]$

V cvičeniach 32 – 35 pre danú funkciu: a) nájdite a načrtnite definičný obor, b) zistite, čo je grafom funkcie a načrtnite ho

32. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.
$\left[D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x^2+y^2\le 1\right\}\right]$

33. $f(x,y)=\frac{1}{2x^2+3y^2}$.
$\left[D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ (x,y)\ne(0,0)\right\}\right]$

34. $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2-2x+4y-4}$.
$\left[D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ (x-1)^2-(y-2)^2\ge 1\right\}\right]$

35. $f(x,y)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2-y^2}$.
$\left[D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x^2+y^2\le 9\right\}\right]$

36. Daná je funkcia $f(x,y)=4-x^2-y^2$

(a) načrtnite jej graf a zistite, či je ohraničená

(b) načrtnite graf zúženia $f|_A$ ak $A=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ |x|\le 1, |y|\le 1\right\}$.

37. Daná je funkcia $f(x,y)=\sqrt{2x^2+4y^2}$. Načrtnite graf zúženia $f|_A$, $f|_B$ ak

(a) $A=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ 2x^2+4y^2\le 1\right\}$

(b) $B=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ |x|\le 1, |y|\le 1\right\}$.

1.2 Limita a spojitosť funkcie.

1. Dodefinujte funkciu $f(x,y)=\frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. $[f(0,0)=-6]$

2. Dodefinujte funkciu $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. [Funkcia sa nedá dodefinovať v $(0,0)$ aby bola spojitá]

3. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. [Funkcia sa nedá dodefinovať v bode $(0,0)$ aby bola spojitá.]

4. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. $\left[f(0,0) = -\frac{1}{4}.\right]$

5. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ tak, aby bola v bode $(2,2)$ spojitá. $\left[f(2,2) = \frac{3}{8}.\right]$

6. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = (2x+3y)\cos\frac{1}{xy}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. [Funkcia sa dá dodefinovať v bode $(0,0)$ $f(0,0) = 0$.]

7. Daná je funkcia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zistite, či je v bode $(0,0)$ spojitá. [Je spojitá.]

8. Daná je funkcia $f : A = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : y \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(6xy)}{y} & (x,y) \in A \\ k & (x,y) = (3,0) \end{cases}.$$

Určte číslo k tak, aby funkcia bola v bode $(3,0)$ spojitá. $[k = 18]$

9. Daná je funkcia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zistite, či je v bode $(0,0)$ spojitá. [Nie je.]

10. Daná je funkcia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zistite, či je v bode $(0,0)$ spojitá. [Nie je.]

11. Daná je funkcia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zistite, či je f spojitá. [Je spojitá všade s výnimkou bodu $(0,0)$.]

V príkladoch 12 – 30 vypočítajte limity ak existujú:

12. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. $[0]$

13. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,-6)} \frac{(x+y)^2-25}{x+y+5}$. $[-10]$

14. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. [neexistuje]

15. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$. [neexistuje]

16. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(2,3)} \frac{y-3}{x+y-5}$. [neexistuje]

17. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{2xy}{xy+2x-y}$. [neexistuje]

18. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$. [neexistuje]

19. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{y^2}{x^4+y^2}$. [neexistuje]

20. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(2,3)} \frac{\sin x+2}{(x^2-y^2+5)^2}$. $[+\infty]$

21. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

22. $\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(1,1,1)} \frac{\sin(x+y-z-1)}{x+y-z-1}$. $[1]$

23. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}$. $[-4]$

24. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{xy}$. $[0]$

25. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$. $[4]$

26. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$. $[e]$

27. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(-2,1)} \frac{(2x+y)^2-9}{4xy+2y^2+6y}$. $[-3]$

28. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. [neexistuje]

29. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(3,4)} \frac{4-\sqrt{x+3y+1}}{15-x-3y}$. $\left[\frac{1}{8}\right]$

30. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,2)} \frac{3y^2-3xy-6y}{1-\sqrt{x-y+3}}$. $[12]$

1.3 Parciálne derivácie.

V úlohách 1 – 5 sú dané funkcie $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$. Zistite, či sú diferencovateľné v bode $(0,0)$, keď

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. [nie je]

2. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. [nie je]

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{2x^4+y^4}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. [nie je]

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. [nie je]

5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. [nie je]

6. Daná je funkcia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}.$$

Vypočítajte parciálne derivácie v bode $(0,0,0)$ a zistite, či je funkcia v bode $(0,0,0)$ diferencovateľná.

$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \infty,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = -\infty,\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\ \text{neexistuje; nie je diferencovateľná.}\right]$

V úlohách 7 – 10 pomocou definície vypočítajte parciálne derivácie funkcií v bode $\mathbf{a}$, keď f a $\mathbf{a}$ sú dané:

7. $f(x,y) = (x^2+y)\sin(x+y)$, $\mathbf{a} = (0,\pi)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = -\pi,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = -\pi\right]$

8. $f(x,y) = 4x^3 - 2y^2 + 3xy^2 + 5y$, $\mathbf{a} = (1,2)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 24,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 9\right]$

9. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5}$, $\mathbf{a} = (1,2)$.
$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\ \text{neexistuje},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\ \text{neexistuje}\right]$

10. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $\mathbf{a} = (0,0)$.
$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\right]$

V úlohách 11 – 17 vypočítajte parciálne derivácie, gradient a diferenciál funkcie f v bode $\mathbf{a}$ (ak existujú), keď f a $\mathbf{a}$ sú dané:

11. $f(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \ln(xy)$, $\mathbf{a} = (1,e)$.
$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x}(1,e) = \frac{3}{e^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,e) = -\frac{1}{e^3},\ grad f(1,e) = \left(\frac{3}{e^2}, -\frac{1}{e^3}\right), \\ Df(1,e)(\mathbf{h}) = \frac{3}{e^2}h_1 - \frac{1}{e^3}h_2,\ \text{kde}\ \mathbf{h} = (h_1,h_2) \end{array}\right]$

12. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5}$, $\mathbf{a} = (0,0)$.
$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\frac{2}{\sqrt{5}},\ grad f(0,0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \\ Df(0,0)(\mathbf{h}) = -\frac{1}{\sqrt{5}}h_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}h_2,\ \text{kde}\ \mathbf{h} = (h_1,h_2) \end{array}\right]$

13. $f(x,y)=\frac{2}{(3x^2+4y^2)^2}$, $\mathbf{a}=(-1,1)$.

$\left[\begin{array}{c}\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=\frac{24}{343},\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)=-\frac{32}{343},\ gradf(-1,1)=\left(\frac{24}{343},-\frac{32}{343}\right),\\ Df(-1,1)(\mathbf{h})=\frac{24}{343}h_1-\frac{32}{343}h_2,\ \text{kde } \mathbf{h}=(h_1,h_2)\end{array}\right]$

14. $f(x,y)=x^2y\ln(x+y)$, $\mathbf{a}=(-1,2)$.

$\left[\begin{array}{c}\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2)=2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2)=2,\ gradf(-1,2)=(2,2),\\ Df(-1,2)(\mathbf{h})=2h_1+2h_2,\ \text{kde } \mathbf{h}=(h_1,h_2)\end{array}\right]$

15. $f(x,y,z)=\left(\frac{y}{z}\right)^x$, $\mathbf{a}=(1,4,2)$.

$\left[\begin{array}{c}\frac{\partial f}{\partial x}(1,4,2)=2\ln 2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,4,2)=\frac{1}{2},\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,4,2)=-1,\\ gradf(1,4,2)=\left(2\ln 2,\frac{1}{2},-1\right),\\ Df(1,4,2)(\mathbf{h})=2\ln 2h_1+\frac{1}{2}h_2-h_3,\ \text{kde } \mathbf{h}=(h_1,h_2,h_3)\end{array}\right]$

16. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $\mathbf{a}=(0,0)$.

$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ \text{neexistuje},\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\ \text{neexistuje}\right]$

17. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$, $\mathbf{a}=(2,1)$.

$\left[\begin{array}{c}\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=\frac{\sqrt{6}}{6},\ gradf(2,1)=\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\\ Df(2,1)(\mathbf{h})=\frac{\sqrt{6}}{3}h_1+\frac{\sqrt{6}}{6}h_2,\ \text{kde } \mathbf{h}=(h_1,h_2)\end{array}\right]$

V úlohách 18 – 23 zistite, či je funkcia $\mathbf{f}:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^m$ spojite diferencovateľná a napíšte jej deriváciu a diferenciál v bode $\mathbf{a}$, ak existujú:

18. $\mathbf{f}(x,y,z)=\left(2\cos(xy-z),(2x-z)^2y^3\right)$, $\mathbf{a}=\left(\pi,1,\frac{\pi}{2}\right)$.

$\left[\begin{array}{c}\text{je spojite diferencovateľná}\ \ Df\left(\pi,1,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}-2 & -2\pi & 2\\ 6\pi & \frac{27}{4}\pi^2 & -3\pi\end{pmatrix},\\ Df\left(\pi,1,\frac{\pi}{2}\right)(\mathbf{h})=\begin{pmatrix}-2h_1-2\pi h_2+2h_3\\ 6\pi h_1+\frac{27}{4}\pi^2h_2-3\pi h_3\end{pmatrix}.\end{array}\right]$

19. $\mathbf{f}(x,y)=\left(e^{\frac{x}{y}},x^y\right)$, $\mathbf{a}=(2,1)$.

$\left[\begin{array}{c}\text{je spojite diferencovateľná}\ \ D\mathbf{f}(2,1)=\begin{pmatrix}e^2 & -2e^2\\ 1 & 2\ln 2\end{pmatrix},\\ D\mathbf{f}(2,1)(\mathbf{h})=\begin{pmatrix}e^2h_1-2e^2h_2\\ h_1+(2\ln 2)h_2\end{pmatrix}.\end{array}\right]$

20. $\mathbf{f}(x,y)=(x\cos y,x\sin y)$, $\mathbf{a}=\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$.

$\left[\begin{array}{c}\text{je spojite diferencovateľná}\ \ D\mathbf{f}\left(3,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\\ D\mathbf{f}\left(3,\frac{\pi}{2}\right)(\mathbf{h})=\begin{pmatrix}-3h_2\\ h_1\end{pmatrix}.\end{array}\right]$

21. $\mathbf{f}(x,y,z)=(x\cos y,x\sin y,z)$, $\mathbf{a}=\left(1,\frac{\pi}{2},0\right)$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{je spojite diferencovateľná } D\mathbf{f}\left(1,\frac{\pi}{2},0\right)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \\ D\mathbf{f}\left(1,\frac{\pi}{2},0\right)(\mathbf{h})=\begin{pmatrix} -h_2\\ h_1\\ h_3\end{pmatrix}. \end{array}\right]$$

22. $\mathbf{f}(x,y,z)=(x\cos y\cos z, x\sin y\cos z, x\sin z)$, $\mathbf{a}=(1,0,0)$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{je spojite diferencovateľná } Df(1,0,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \\ D\mathbf{f}(1,0,0)(\mathbf{h})=\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix} \end{array}\right].$$

23. $f(x,y)=\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $\mathbf{a}=\left(\frac{3}{2},1\right)$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{je spojite diferencovateľná } D\mathbf{f}\left(\frac{3}{2},1\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}, \\ D\mathbf{f}\left(\frac{3}{2},1\right)(\mathbf{h})=\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\\ \frac{3}{\sqrt{13}}h_1+\frac{2}{\sqrt{13}}h_2\end{pmatrix} \end{array}\right]$$

24. Nech $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\ln y$. Dokážte, že pre $y>0$ platí: $x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{f(x,y)}{\ln y}$. [Platí.]

25. Nech $f:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Vypočítajte $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}$ a $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$ ak existujú. [obe neexistujú.]

26. Vypočítajte $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ a $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$ ak existujú, keď

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

$$\left[\begin{array}{c}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x^2\frac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=2,\\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=4x^2y\frac{x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}\text{- neexistuje.}\end{array}\right]$$

27. Nech $f:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.
Vypočítajte $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$.
$\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=0,\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=0\right]$

28. Ukážte, že pre funkciu $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ platí: $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial z^2} = 0$. [Platí]

29. Ukážte, že pre funkciu $f(x,y) = xe^y + ye^x$ platí $\frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial x^2 \partial y}$. [Platí]

V úlohách 30 – 33 vypočítajte diferenciál druhého rádu funkcie f v bode $\mathbf{a}$ keď :

30. $f(x,y) = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$, $\mathbf{a} = (0,0)$.
$\left[D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = -\frac{1}{\sqrt{8}}h^2 - \frac{1}{\sqrt{8}}k^2, \text{ kde } \mathbf{h} = (h,k)\right]$

31. $f(x,y) = \ln\left(3x^2 + 2y^2\right)$, $\mathbf{a} = (1,0)$.
$\left[D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = -2h^2 + \frac{4}{3}k^2, \text{ kde } \mathbf{h} = (h,k)\right]$

32. $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$, $\mathbf{a} = (1,1,0)$.
$\left[D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = -hl - kl, \text{ kde } \mathbf{h} = (h,k,l)\right]$

33. $f(x,y,z) = xy + \cos z - y \operatorname{tg} z$, $\mathbf{a} = (1,0,0)$.
$\left[D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = -l^2 + 2hk - 2kl, \text{ kde } \mathbf{h} = (h,k,l)\right]$

V príkladoch 34 – 36 vypočítajte deriváciu funkcie $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ ak $\mathbf{g}$ a $\mathbf{f}$ sú dané :

34. $\mathbf{g}(u,v) = (\cos u, uv)$, $\mathbf{f}(x,y) = \left(x^2 + y, y^2\right)$.

$$\left[\begin{array}{c} D\mathbf{h}(x,y) = D\mathbf{g}(f(x,y)) \cdot D\mathbf{f}(x,y) = \\ = \begin{pmatrix} -\sin\left(x^2+y\right) & 0 \\ y^2 & x^2+y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -2x\sin\left(x^2+y\right) & -\sin\left(x^2+y\right) \\ 2xy^2 & 2x^2y + 3y^2 \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

35. $\mathbf{g}(u,v) = (u+v, u-v, uv)$, $\mathbf{f}(x,y) = (ye^x, x\sin y)$.

$$\left[\begin{array}{c} D\mathbf{h}(x,y) = D\mathbf{g}(f(x,y)) \cdot D\mathbf{f}(x,y) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ x\sin y & ye^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} ye^x + \sin y & e^x + x\cos y \\ ye^x - \sin y & e^x - x\cos y \\ xye^x \sin y + ye^x \sin y & xe^x \sin y + xye^x \cos y \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

36. $\mathbf{g}(u,v) = \left(uv, \frac{u}{v}, u\right)$, $\mathbf{f}(x,y) = (\ln x, \cos y)$.

$$\left[\begin{array}{c} D\mathbf{h}(x,y) = D\mathbf{g}(f(x,y)) \cdot D\mathbf{f}(x,y) = \\ = \begin{pmatrix} \cos y & \ln x \\ \frac{1}{\cos y} & -\frac{\ln x}{\cos^2 y} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\cos y}{x} & -\ln x \sin y \\ \frac{1}{x\cos y} & \frac{\ln x \sin y}{\cos^2 y} \\ \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

37. Aký uhol s osou o_x zviera dotyčnica v bode $T=(1,1,?)$ ku krivke určenej rovnicami $y=1, z=\sqrt{1+x^2+y^2}$. Interpretujte túto úlohu geometricky a načrtnite obrázok. $\left[\alpha=\frac{\pi}{6}.\right]$

38. K elipsoidu $x^2+2y^2+z^2=1$. Nájdite dotykovú rovinu, ktorá je rovnobežná s rovinou $4x+2y+z=0$.
$\left[4x+2y+z\pm\sqrt{19}=0\right]$

V úlohách 40 – 44 nájdite rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie f v bode T keď je dané:

39. $f(x,y)=xy,\ T=(?,2,2)$.
$[\tau: 2x+y-z-2=0,\ n: x=1+2t, y=2+t, z=2-t]$

40. $f(x,y)=x^4+2x^2y-xy+x,\ T=(1,?,2)$.
$[\tau: 5x+y-z-3=0,\ n: x=1+5t, y=0+t, z=2-t]$

41. $f(x,y)=y2^{xy^2}$,

   (a) $T=\left(\frac{1}{2},2,?\right)$.
   $$\left[\begin{array}{c}\tau: (32\ln 2)\,x+(4+16\ln 2)\,y-z-48\ln 2=0,\\ n: x=\frac{1}{2}+32\ln 2t,\ y=2+(4+16\ln 2)\,t,\ z=8-t\end{array}\right]$$
   (b) $T=(2,1,?)$.
   $$\left[\begin{array}{c}\tau: (4\ln 2)\,x+(4+16\ln 2)\,y-z-24\ln 2=0,\\ n: x=2+4\ln 2t,\ y=1+(4+16\ln 2)\,t,\ z=4-t\end{array}\right]$$

42. $f(x,y)=2x^2+y^2,\ T=(1,1,?)$.
$[\tau: 4x+2y-z-3=0,\ n: x=1+4t,\ y=1+2t,\ z=3-t]$

43. $f(x,y)=2x^2-4y^2,\ T=(2,1,?)$.
$[\tau: 8x-8y-z-4=0,\ n: x=2+8t,\ y=1-8t,\ z=4-t]$

44. Nájdite deriváciu funkcie $f(x,y)=e^y\cos(x+y)$ v bode $\mathbf{a}=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ v smere vektora $\mathbf{e}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
$\left[f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

V príkladoch 45, 46 nájdite deriváciu funkcie v bode $\mathbf{a}$ v smere jednotkového vektora $\mathbf{e}$, ktorý je určený bodmi A, B keď je dané :

45. $f(x,y,z)=3x^3-4y^3+2z^4,\ A=(2,2,1),\ B=(5,4,6)$.
$\left[f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=\frac{52}{\sqrt{38}}\right]$

46. $f(x,y)=3x^2-6xy^4+11y^5,\ A=(1,1),\ B=(4,5)$.
$\left[f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=\frac{124}{5}\right]$

47. Nech $f:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R},\ f(x,y,z)=xy^2+z^3-xyz$. Nájdite deriváciu funkcie f v bode $\mathbf{a}=(1,1,2)$ v smere vektora $\mathbf{e}$, ktorý zviera so súradnicovými osami uhly $\alpha=\frac{\pi}{3},\ \beta=\frac{\pi}{4},\ \gamma=?$
$[f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=5]$

V úlohách 48 – 50 nájdite smer, v ktorom je derivácia v smere maximálna a hodnotu tejto derivácie, keď je dané :

48. $f(x,y) = 3x^4 + 7y^2 - 4x^2y$, $\mathbf{a} = (1,0)$.
$\left[\mathbf{e} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right),\ f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = 4\sqrt{10}\right]$

49. $f(x,y) = \ln\frac{x+y}{x-y}$, $\mathbf{a} = (3,0)$.
$\left[\mathbf{e} = (0,1),\ f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \frac{2}{3}\right]$

50. $f(x,y) = 3x^2 - 6xy^4 + 11y^5$, $\mathbf{a} = (1,1)$.
$[\mathbf{e} = (0,1),\ f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = 31]$

51. Nájdite deriváciu funkcie $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ v bode $\mathbf{a} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ v smere ľubovoľného jednotkového vektora $\mathbf{e}$. Zistite v akom smere je derivácia

(a) nulová, $\left[\mathbf{e}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

(b) najväčšia, $\left[\mathbf{e}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

(c) najmenšia. $\left[\mathbf{e}_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

1.4 Extrémy.

V príkladoch 1 – 24 nájdite lokálne extrémy funkcií :

1. $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
$\left[f(0,0) = 0 \text{ relatívne minimum, v bodoch } (1,4),\ (1,-4),\ \left(-\frac{5}{3},0\right) \text{ nemá extrémy}\right]$

2. $f(x,y) = e^{2x}\left(x + y^2 + 2y\right)$.
$\left[f\left(\frac{1}{2},-1\right) = -\frac{e}{2} \text{ relatívne minimum}\right]$

3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy + 215$.
$[f(6,6) = -1 \text{ relatívne minimum, v bode } (0,0) \text{ nemá extrém}]$

4. $f(x,y) = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$.
$$\left[\begin{array}{c} f(1,1) = -82 \text{ relatívne minimum,} \\ f(-1,-1) = 82 \text{ relatívne maximum,} \\ \text{v bodoch } \left(\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3\sqrt{14}}{14}\right), \\ \left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3\sqrt{14}}{14}\right) \text{ nemá extrémy} \end{array}\right]$$

5. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$.
$$\left[\begin{array}{c} f(-1,-1) = 3 \text{ relatívne maximum,} \\ \text{v bode } (0,0) \text{ nemá extrém} \end{array}\right]$$

6. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$.
$[f(1,1) = 1 \text{ relatívne minimum}]$

7. $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$
$$\left[\begin{array}{c} f\left(1,\frac{1}{2}\right) = 4 \ \text{ relatívne minimum,} \\ \text{v bode } (0,0) \ \text{ nemá extrém} \end{array}\right]$$

8. $f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.
$\left[f\left(\frac{5}{2},\frac{4}{5}\right) = 30 \ \text{ relatívne minimum}\right]$

9. $f(x,y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right).$
$[f(21,20) = 282 \ \text{ relatívne maximum}]$

10. $f(x,y) = xy(2 - x - y).$
$$\left[\begin{array}{c} f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} \text{ relatívne maximum,} \\ \text{v bodoch } (0,0), (0,2), (2,0) \ \text{ nemá extrémy} \end{array}\right]$$

11. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left(2y^2 + x^2\right).$
$$\left[\begin{array}{c} f(0,0) = 0 \text{ relatívne minimum,} \\ f(0,1) = \frac{2}{e},\ f(0,-1) = \frac{2}{e} \ \text{ relatívne maximum,} \\ \text{v bodoch } (1,0), (-1,0) \ \text{ nemá extrémy} \end{array}\right]$$

12. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$
$$\left[\begin{array}{c} f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = -12, \\ f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = -12, \\ \text{relatívne minimum,} \\ \text{v bode } (0,0) \text{ nemá extrémy} \end{array}\right]$$

13. $f(x,y) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{2}{3}}\left(1 - y^2\right)^{\frac{2}{3}}.$
$$\left[\begin{array}{c} f(0,0) = 1 \text{ relatívne maximum;} \\ \text{v bodoch priamok } x = 1,\ x = -1, \\ y = 1,\ y = -1 \text{sú lokálne minimá.} \end{array}\right]$$

14. $f(x,y) = x^2y^2(1 - x - y).$
$$\left[\begin{array}{c} f\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right) = \frac{16}{3125} \ \text{ relatívne maximum,} \\ \text{v bodoch } \{(x,0) \wedge x > 1\} \text{ a } \{(0,y) \wedge y > 1\} \\ \text{sú lokálne maximá, pre ktoré } f(.,.) = 0; \\ \text{v bodoch } \{(x,0) \wedge x < 1\} \text{ a } \{(0,y) \wedge y < 1\} \\ \text{sú lokálne minimá, pre ktoré } f(.,.) = 0; \\ \text{v bodoch } (0,1) \text{ a } (1,0) \text{ nemá extrémy} \end{array}\right]$$

15. $f(x,y) = x^2y^2(3 - 4x + 6y).$
$$\left[\begin{array}{c} f\left(\frac{3}{10},-\frac{1}{5}\right) = \frac{27}{12400} \text{ relatívne maximum,} \\ \text{v bodoch } \left\{(x,0) \wedge x > \frac{3}{4}\right\} \text{ a} \\ \left\{(0,y) \wedge y < \frac{-1}{2}\right\} \ \text{ sú lokálne maximá,} \\ \text{pre ktoré } f(.,.) = 0; \text{ v bodoch} \\ \left\{(x,0) \wedge x < \frac{3}{4}\right\} \text{ a } \left\{(0,y) \wedge y > \frac{-1}{2}\right\} \text{ sú lokálne minimá,} \\ \text{pre ktoré } f(.,.) = 0; \\ \text{v bodoch } \left(\frac{3}{4},0\right) \text{ a } \left(0,\frac{1}{2}\right) \text{ nemá extrémy} \end{array}\right]$$

16. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x.$
$\left[f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) = -\frac{4}{3}\right.$ relatívne minimum$\left.\right]$

17. $f(x,y,z) = 3x^2 + 3x + 2y^2 + 2yz + 2y + 2z^2 - 2z.$
$\left[f\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right) = -\frac{7}{4}\right.$ relatívne minimum$\left.\right]$

18. $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz.$
[v bode $(2,1,7)$ nemá extrém]

19. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$
[$f(-1,-2,3) = -14$ relatívne minimum]

20. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$
[v bode $(0,0,0)$ nemá extrém]

21. $f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz + 2yz + 1.$
[$f(0,0,0) = 1$ relatívne minimum]

22. $f(x,y,z) = y^2 + 2z^2 + 2x - xy - xz.$
[v bode $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ nemá extrém]

23. $f(x,y,z) = 2x - y + z - yz - x^2 - y^2 - z^2.$
[$f(1,-1,1) = 2$ relatívne maximum]

24. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$
[$f(24,-144,-1) = -6913$ relatívne minimum; v bode $(0,0,-1)$ nie je extrém]

Nájdite lokálne extrémy funkcie a nakreslite graf funkcie f, ak:

25. $f(x,y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}.$
[$f(0,0) = 2$ minimum]

26. $f(x,y) = -x^2 + 4x - y^2 - 6y - 9.$
[$f(2,-3) = 4$ maximum]

27. $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x - 2y.$
[v bode $(-1,-1)$ nie je extrém]

28. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno, nájdite jej prvú a druhú deriváciu v príslušnom bode, keď $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$, $\mathbf{a} = (6,8)$.
$\left[g'(6) = -\frac{4}{3},\ g''(6) = -\frac{25}{27}\right]$

29. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno, nájdite jej prvé derivácie v príslušnom bode, keď $x^2 + y^2 + z^5 + 2x - y - 4 = 0$, $\mathbf{a} = (1,0,1)$.
$\left[\frac{\partial g(1,0)}{\partial x} = -\frac{4}{5},\ \frac{\partial g(1,0)}{\partial y} = \frac{1}{5}\right]$

30. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno, nájdite jej prvú a druhú deriváciu v príslušnom bode, keď $x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 = 0$, $\mathbf{a} = (0, 1)$.
[$g\,'(0) = 2, g''(0) = 10$]

31. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno, nájdite jej prvú a druhú deriváciu v príslušnom bode, keď $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$, $\mathbf{a} = (1, 1)$.
[$g\,'(1) = -1, g''(1) = -8$]

32. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite, či je v danom bode extrém, keď $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0$, $\mathbf{a} = (-1, 0)$.
[je, $g\,(-1) = 0$ je relatívne maximum]

33. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite, či je v danom bode extrém, keď $x^4 + y^3 + 2x^2y + 2 = 0$, $\mathbf{a} = (1, -1)$.
[je, $g\,(1) = -1$ je relatívne maximum]

34. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno, zistite či je v danom bode extrém, keď $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0$, $\mathbf{a} = (-3, -2)$.
[je, $g\,(-3) = -2$ je relatívne minimum]

35. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno, zistite či je implicitne určená funkcia g v danom bode konvexná alebo konkávna, ak $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, $\mathbf{a} = (1, 1)$. [konkávna]

36. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite rovnicu dotykovej roviny funkcie g v danom bode.. $x^2 - y^2 + z^2 - 6 = 0$, $\mathbf{a} = (1, 2, -3)$.
$\left[\frac{1}{3}\,(x-1) - \frac{2}{3}\,(y-2) - z - 3 = 0\right]$

37. Zistite, či danou rovnicou a bodom $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 21 = 0$, $\mathbf{a} = (2, 2, 1)$ je implicitne určená funkcia. Ak áno, zistite rovnicu dotykovej roviny funkcie g, ak dotyková rovina má byť rovnobežná s rovinou $6x + 4y + z = 0$.
[$12x + 8y + 2z - 21 = 0$]

38. Zistite, či danou rovnicou a bodom $x_1^2 + x_2^2 + y^4 + 2x_1 - x_2 - 4 = 0$, $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ je implicitne určená funkcia. Ak áno, zistite rovnicu dotykovej roviny.
[$4x_1 - x_2 + 4y - 8 = 0$]

39. Zistite, či danou rovnicou a bodom $\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, $\mathbf{a} = (1, 0)$ je implicitne určená funkcia. Ak áno, zistite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie g v bode $\mathbf{a}$.
[$x - y - 1 = 0$]

V príkladoch 40 – 49 nájdite viazané extrémy danej funkcie na množine M.

40. $f(x,y) = x^3 + y^3$, $M = \{(x,y)\,;\, x+y-3=0\}$.
$\left[f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} \text{ je relatívne minimum}\right]$

41. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $M = \{(x,y)\,;\, 2x-y=0\}$.
$\left[\begin{array}{c} f\left(\frac{12}{27},\frac{24}{27}\right) = -\frac{32}{81} \text{ je relatívne minimum,} \\ f(0,0) = 0 \text{ je relatívne maximum} \end{array}\right]$

42. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \left\{(x,y)\,;\, x^2+4y^2-1=0\right\}$.
$\left[\begin{array}{c} f\left(0,\frac{1}{2}\right) = f\left(0,-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{ sú relatívne minimá,} \\ f(1,0) = f(-1,0) = 1 \text{ sú relatívne maximá} \end{array}\right]$

43. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 10$, $M = \left\{(x,y)\,;\, x^2+y^2-9=0\right\}$.
$\left[\begin{array}{c} f\left(\frac{\sqrt{27}}{2},\frac{3}{2}\right) = 19 - \frac{27}{4}\sqrt{3} \text{ je relatívne minimum,} \\ f\left(-\frac{\sqrt{27}}{2},\frac{3}{2}\right) = 19 + \frac{27}{4}\sqrt{3} \text{ je relatívne maximum,} \\ \text{v bode } (0,-3) \text{ nie je extrém} \end{array}\right]$

44. $f(x,y) = x^2 + 2y$, $M = \left\{(x,y)\,;\, x^2-2x+2y^2+4y=0\right\}$.
$\left[\begin{array}{c} f(0,0) = 0 \text{ je relatívne minimum,} \\ f(2,-2) = 0 \text{ je relatívne maximum} \end{array}\right]$

45. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \left\{(x,y)\,;\, \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1\right\}$.
$\left[f\left(\frac{pq^2}{p^2+q^2},\frac{p^2q}{p^2+q^2}\right) = \frac{p^2q^2}{p^2+q^2},\ p,q \text{ - pevné je minimum}\right]$

46. $f(x,y) = x + y$, $M = \left\{(x,y)\,;\, \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}, a>0\right\}$
$\left[\begin{array}{c} f\left(\sqrt{2}a,\sqrt{2}a\right) = 2\sqrt{2}a \text{ je relatívne minimum,} \\ f\left(-\sqrt{2}a,-\sqrt{2}a\right) = -2\sqrt{2}a \text{ je relatívne maximum} \end{array}\right]$

47. $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $M = \{(x,y)\,;\, x+y=2\}$.
$[f(1,1) = 2 \text{ je relatívne minimum}]$

48. $f(x,y) = xy - x + y - 1$, $M = \{(x,y)\,;\, x+y=1\}$.
$\left[f\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{ je relatívne maximum}\right]$

49. $f(x,y) = xy - x + y - 1$, $M = \left\{(x,y)\,;\, y=x^2\right\}$.
$\left[\begin{array}{c} f(-1,1) = 0 \text{ je relatívne maximum,} \\ f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right) = -\frac{32}{27} \text{ je relatívne minimum} \end{array}\right]$

50. Daným bodom $\mathbf{p} = (1,4)$ veďte priamku tak, aby súčet kladných úsekov ohraničených na súradnicových osiach bol najmenší. (Nakreslite obrázok!).
$[2x + y - 6 = 0]$

51. Do kužeľa o výške 9 a polomere 3 vpíšte valec najväčšieho objemu (Nakreslite obrázok!).
$[r = 2, v = 3]$

V príkladoch 52 – 59 nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu, ktorú nadobúda daná funkcia na kompaktnej množine M.

52. $f(x,y)=x^2+y^2$, $M=$ úsečka pq, $p=(-1,4)$, $q=(1,0)$.
$\left[\begin{array}{c}\max f=f(-1,4)=17,\\ \min f=f\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}\end{array}\right]$

53. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$, $M=$obdĺžnik (aj s vnútrom) určený bodmi $\mathbf{a}=(0,-1)$, $\mathbf{b}=(2,-1)$, $\mathbf{c}=(2,2)$, $\mathbf{d}=(0,2)$. $\left[\begin{array}{c}\max f=f(2,-1)=13,\\ \min f=f(1,1)=-1=f(0,-1)\end{array}\right]$

54. $f(x,y)=3xy$, $M=\left\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\le 2\right\}$.
$\left[\begin{array}{c}\max f=f(1,1)=3=f(-1,-1),\\ \min f=f(-1,1)=-3=f(1,-1)\end{array}\right]$

55. $f(x,y)=2-x^2-y^2+2x-2y$, $M=\left\{(x,y)\,;\,x^2-2x+y^2+2y\le 0\right\}$.
$\left[\begin{array}{c}\max f=f(1,-1)=4,\\ \min f=2=f(u,v),\\ \text{kde }\ (u-1)^2+(v+1)^2=2\end{array}\right]$

56. $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16$, $M=\left\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\le 25\right\}$.
$\left[\begin{array}{c}\max f=f(-5,0)=101,\\ \min f=f(5,0)=-19\end{array}\right]$

57. $f(x,y)=x^2-2y^2+4xy-6x-1$, $M=\{(x,y)\,;\,x\ge 0,y\ge 0,y\le 3-x\}$.
$\left[\begin{array}{c}\max f=f(0,0)=-1,\\ \min f=f(0,3)=-19\end{array}\right]$

58. $f(x,y)=x^2-xy+y^2-3x+10$, $M=\left\{(x,y)\,;\,x\ge y,x^2+y^2\le 9\right\}$.
$\left[\begin{array}{c}\max f=f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=14.5+\frac{9}{\sqrt{2}},\\ \min f=f(2,1)=7\end{array}\right]$

59. $f(x,y)=2x^2-xy+2y^2-15x+20$, $M=\left\{(x,y)\,;\,x\le 5,\ x^2-y^2\ge 1\right\}$.
$\left[\begin{array}{c}\max f=f\left(5,-2\sqrt{6}\right)=43+10\sqrt{6},\\ \min f=f(4,1)=-10\end{array}\right]$

60. Za akých predpokladov môžu byť rovnice $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$ riešené pre r, ϑ ako funkcie x, y. Kde je inverzná funkcia diferencovateľná.

61. Riešte rovnice $x=r\cos\vartheta\cos\varphi$, $y=r\cos\vartheta\sin\varphi$, $z=r\sin\vartheta$ pre r, ϑ, φ ako funkcie premenných x, y, z. Kedy je táto inverzia diferencovateľná.

62. Ukážte, že $\mathbf{f}:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}^2$, $\mathbf{f}(x,y)=\left(x^3+2xy+y^2,x^2+y\right)$ je lokálne invertovateľná v okolí bodu $(1,1)$. Vypočítajte $D\mathbf{f}^{-1}(4,2)$ a nájdite afinnú aproximáciu $\mathbf{f}^{-1}(u,v)$ v okolí bodu $(4,2)$.

63. Nech $\mathbf{f}:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3$, $\mathbf{f}(x,y,z)=(x+y+z,xy+yz+zx,xyz)$. Nech a,b,c sú rôzne reálne čísla. Ukážte, že $\mathbf{f}$ má inverziu $\mathbf{g}$ v okolí bodu $\mathbf{a}=(a,b,c)$ a že $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))=[(c-b)(a-c)(b-a)]^{-1}$.

1.5 Integrály.

V úlohách 1 - 6 vypočítajte dvojné integrály:

1. $\iint_I x^2 y \cos\left(xy^2\right) dxdy,\ I = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.
   $\left[-\frac{\pi}{16}\right]$
2. $\iint_I y e^{x+y} dxdy,\ I = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.
   $\left[e^2 - 1\right]$
3. $\iint_I \frac{1}{(2x+y+1)^2} dxdy,\ I = \langle 0, 4 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.
   $\left[\ln \frac{3}{\sqrt{5}}\right]$
4. $\iint_I \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy,\ I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.
   $\left[\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right]$
5. $\iint_I \ln(1+x)^{2y}\, dxdy,\ I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.
   $[2 \ln 2 - 1]$
6. $\iint_I \frac{1}{(1-xy)^2} dxdy,\ I = \langle 2, 3 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.
   $\left[\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right]$

   V úlohách 7 – 19 vypočítajte dvojné integrály. Načrtnite obrázok množiny A.

7. $\iint_A \cos(x+y)\, dxdy,\ A = \{(x,y)\,;\, 0 \le x \le \pi,\ x \le y \le \pi\}$.
   $[-2]$
8. $\iint_A |xy| dxdy,\ A = \{(x,y)\,;\, 1 \le |x| \le 2,\ 1 \le |y| \le 2\}$.
   $[9]$
9. $\iint_A y e^x dxdy,\ A = \left\{(x,y)\,;\, y^2 \le x \le y+2\right\}$.
   $\left[\frac{1}{2}\left(e^4 + 5e\right)\right]$
10. $\iint_A (x+y)\, dxdy,\ A = \{(x,y)\,; 0 \le x \le 2,\ y \le x \le 2y\}$.
    $\left[\frac{7}{3}\right]$
11. $\iint_A \frac{x^2}{y^2} dxdy,\ A = \left\{(x,y)\,;\, 0 \le \frac{1}{x} \le y \le x,\ x \le 2\right\}$.
    $\left[\frac{9}{4}\right]$
12. $\iint_A \left(3x^2 + 2y\right) dxdy,\ A = \left\{(x,y)\,;\, x^2 \le y \le \sqrt{x},\ x \ge 0\right\}$.
    $\left[\frac{39}{70}\right]$
13. $\iint_A |x| dxdy,\ A = \left\{(x,y)\,;\, x^2 \le y,\ 4x^2 + y^2 \le 12\right\}$.
    $\left[4\sqrt{3} - \frac{10}{3}\right]$
14. $\iint_A \frac{x}{3} dxdy,\ A = \{(x,y)\,;\, x \le 2 + \sin y,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le 2\pi\}$.
    $\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

15. $\iint_A xydxdy,\ A = \left\{(x,y)\,;\ x-4 \le y,\ y^2 \le 2x\right\}.$
$\left[\int_{-2}^{3}\left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xydx\right)dy = \frac{975}{16}\right]$

16. $\iint_A \sqrt{xy-y^2}dxdy,\ A = \left\{(x,y)\,;\ 0 \le y \le 3,\ \frac{x}{10} \le y \le x\right\}.$
$[162]$

17. $\iint_A \left(x^2+y^2\right)dxdy,$ A je ohraničená krivkami $y=0,\ y-x+1,\ y=x+1.$
$\left[\frac{1}{3}\right]$

18. $\iint_A \left(x^2+y\right)dxdy,$ A je ohraničená krivkami $y=\frac{1}{2}x,\ y=2x,\ xy=2,\ x \ge 0.$
$\left[\frac{17}{6}\right]$

19. $\iint_A \frac{1}{x+y+1}dxdy,$ A je trojuholník $KLM,\ K=(1,2),\ L=(5,2),\ M=(4,4).$
$\left[\frac{72}{5}\ln 18 - 16\ln 16 + \frac{8}{5}\ln 8\right]$

V úlohách 20 – 23 vypočítajte plošný obsah rovinných obrazcov určených množinou A, keď

20. A je ohraničená krivkami: $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ a $x^2+y^2=4.$
$\left[\pi-\frac{4}{3}\right]$

21. A je ohraničená krivkami: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\ y^2=x+1$ a obsahuje bod $(0,0).$
$\left[8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$

22. $A=\left\{(x,y)\,;\ 0 \le y \le x,\ x^2+y^2 \le 2x\right\}.$
$\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right]$

23. $A=\left\{(x,y)\,;\ x \le y \le \sqrt{3x},\ 4x \le x^2+y^2 \le 8x\right\}.$
$\left[\pi-6+3\sqrt{3}\right]$

V úlohách 24 – 35 pouitím vhodnej transformácie vypočítajte dané integrály a načrtnite obrázok A.

24. $\iint_A \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$
$\left[\frac{\pi}{6}\right]$

25. $\iint_A xy^2dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ 2y \le x^2+y^2 \le 4y\right\}.$
$[0]$

26. $\iint_A \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\ dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}.$
$\left[\frac{2}{3}\pi ab\right]$

27. $\iint_A \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\right\}.$
$\left[-6\pi^2\right]$

28. $\iint_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 \le ax\right\}.$
$\left[\frac{a^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)\right]$

29. $\iint_A (12 - 3x - 4y)\, dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\ x^2 + 4y^2 \le 4\right\}.$
$[25\pi]$

30. $\iint_A \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\ 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x\right\}.$
$\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$

31. $\iint_A (x - y)\, dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 \le x + y\right\}.$
$[0]$

32. $\iint_A (1 - 2x - 3y)\, dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 \le 4\right\}.$
$[4\pi]$

33. $\iint_A y dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 \le a^2,\ y \le x\right\}.$
$\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}a^3\right]$

34. $\iint_A \sin\left(\pi\sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le x \le y\right\}.$
$\left[\frac{1}{4}\right]$

35. $\iint_A \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\ y \le \sqrt{r^2 - x^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$
$\left[\frac{\pi}{4}\left(1 + r^2\right)\ln\left(1 + r^2\right) - r^2\right]$

V úlohách 36 – 49 vypočítajte trojné integrály. Načrtnite obrázok množiny A.

36. $\iiint_A (1 - x)\, yz dxdydz,\ A = \{(x, y, z)\,;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z \le 1 - x - y\}.$
$\left[\frac{1}{144}\right]$

37. $\iiint_A z dxdydz,\ A = \left\{(x, y, z)\,;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}.$
$\left[\frac{\pi}{8}\right]$

38. $\iiint_A z^2 dxdydz,\ A = \left\{(x, y, z)\,;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2}\right\}.$
$\left[\frac{\pi}{15}\left(2\sqrt{2} - 1\right)\right]$

39. $\iiint_A \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz,\ A = \left\{(x, y, z)\,;\ x^2 + y^2 \le z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\right\}.$
$\left[2\frac{2-\sqrt{2}}{5}\pi r^5\right]$

40. $\iiint_A \left(x^2 + y^2\right) dxdydz,\ A = \left\{(x, y, z)\,;\ x^2 + y^2 \le 2z,\ z \le 2\right\}.$
$\left[\frac{16}{3}\pi\right]$

41. $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz,\ A = \left\{(x, y, z)\,;\ x^2 + y^2 + z^2 \le z\right\}.$
$\left[\frac{\pi}{10}\right]$

42. $\iiint_A \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz$, $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, 0 \leq z \leq c,\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \leq 0\right\}$.
$\left[\frac{a^2 b^2 \sqrt{c}}{36}\right]$

43. $\iiint_A \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$, $A = \left\{(x,y,z)\,;\, 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\, z \geq 0\right\}$.
$\left[\frac{844}{15}\pi\right]$

44. $\iiint_A x^2 yz dxdydz$, $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \leq 0,\, 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\right\}$.
$\left[-\frac{1}{840}\right]$

45. $\iiint_A xyz dxdydz$, $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$.
$\left[\frac{1}{48}\right]$

46. $\iiint_A (2x + 3y - z)\, dxdydz$, A je ohraničená plochami $z = 0$, $z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = b$, $a > 0$, $b > 0$.
$\left[\frac{ab^2(-6a+20b)}{24}\right]$

47. $\iiint_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dxdydz$, A je štvorsten ohraničený rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.
$\left[\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{8}\right]$

48. $\iiint_A z dxdydz$, A je ohraničená plochami $z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$ a $z = 2$.
$[\pi]$

49. $\iiint_A x dxdydz$, A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = -2z + 9$, $z = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
$\left[\frac{81}{5}\right]$

V úlohách 50 – 63 nájdite objem množiny A. Načrtnite obrázok!

50. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq y^2\right\}$.
$\left[\frac{\pi}{4}\right]$

51. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, -1 \leq x \leq 1,\, \sqrt{\frac{1-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\, 0 \leq z \leq 4\right\}$.
$\left[\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]$

52. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 12,\, x^2 + y^2 \leq 4z\right\}$.
$\left[\frac{48\sqrt{3}-40}{3}\pi\right]$

53. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 \leq 2x,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$.
$\left[\frac{16}{9}(3\pi - 4)\right]$

54. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.
$\left[\frac{19}{3}\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]$

55. A je ohraničená plochami $z = 6 - x^2 - y^2$ a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
$\left[\frac{32}{3}\pi\right]$

56. A je ohraničená plochami $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$.
[8]

57. A je ohraničená plochami $z = x^2 + y^2$ a $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.
$\left[\frac{7}{12}\right]$

58. A je ohraničená plochami $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$.
$\left[4\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]$

59. A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5$ a $x + y + z = 8$.
$[117\pi]$

60. A je ohraničená plochami $2z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
$\left[\frac{4}{3}\pi\right]$

61. A je ohraničená plochami $z = 0$, $z = 2 - y$, $y = x^2$.
$\left[\frac{32}{15}\sqrt{2}\right]$

62. A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = z - 2$.
$\left[\frac{7}{2}\pi\right]$

63. A je ohraničená plochami $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$.
$\left[\frac{9}{2}\right]$