# Matematická analýza II. Integrálny počet.

BOCK, I.

Integrálny počet pre funkcie jednej premennej zvykne byť postavený ako protiklad diferenciálneho počtu. Je to hlavne kvôli tomu, že primitívna funkcia k funkcii $f$, ktorej deriváciou je práve funkcia $f$, je základom
Newtonovho-Leibnizovho vzorca pre výpočet určitých integrálov. Určitý integrál nezápornej funkcie $f$ na intervale $[a, b]$ vyjadruje obsah krivočiareho lichobežníka

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq y, \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Táto geometrická interpretácia sa prirodzeným spôsobom zovšeobecní na výpočet objemov trojrozmerných útvarov pomocou integrálov funkcií dvoch premenných. V prípade funkcie troch premenných nám integrál vyjadruje napríklad hmotnosť nehomogénneho telesa s premennou hustotou vyjadrenou uvedenou funkciou. Rovnako môže vyjadrovať množstvo elektrického náboja v telese s premennou hustotu náboja. Uvedené aplikácie sú základom definícii integrálov dvoch, troch a viac premenných. Pri ich výpočte sa opierame o známe poznatky integrálneho počtu funkcie jednej premennej.

## 1 Dvojný integrál

Nech $f : A \to \mathbb{R}, \ A \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená funkcia definovaná na ohraničenej množine $A$. V jednorozmernom integrálnom počte je množina $A$ ohraničený interval s krajnými bodmi $a, b, \ a < b$, ktorého veľkosť (obsah) je $b - a$. V dvojrozmernom prípade má množina $A$ rôznorodý tvar a preto popri samotnom integrále z funkcie $f$ sa budeme najskôr venovať pojmu obsahu (miere) množiny $A \subset \mathbb{R}^2$.

### 1.1 Meratelné množiny

Za základ odvodenia pojmu miera ohraničenej množiny v rovine $\mathbb{R}^2$ si zvolíme obsah štvorca. V záujme čo najjednodchšieho vyčlenenia tzv. meratelných množín a ich a definície ich miery budeme uvažovať siete $\mathcal{S}_r^2$ tvorené $r-$štvorcami

$$I_{jk} = [\frac{j}{2^r}, \frac{j+1}{2^r}] \times [\frac{k}{2^r}, \frac{k+1}{2^r}], \ j, \ k \in \mathbb{Z},$$

kde $\mathbb{Z}$ je množina všetkých celých čísel.

**Definícia 1.1** *Ľubovoľné konečné zjednotenie $E = \cup_{i=1}^m I_i$ prvkov $r-$štvorcovej siete $\mathcal{S}_r^2$ sa nazýva polygón siete $\mathcal{S}_r^2$ a číslo*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^m \mu(I_i) = \frac{m}{4^r}$$

*je jeho mierou (obsahom).*

Každý štvorec siete $\mathcal{S}_r^2$ je zjednotením štyroch štvorcov siete $\mathcal{S}_{r+1}^2$ a teda každý polygón siete $\mathcal{S}_r^2$ je aj polygónom siete $\mathcal{S}_{r+1}^2$ s rovnakým obsahom. Prázdnu množinu považujeme za polygón ľubovoľnej siete $\mathcal{S}_r^2$ a kladieme $\mu(\emptyset) = 0$.

Pomocou postupností polygónov vpísaných a opísaných ohraničenej množine $A$ a konvergencie postupností ich mier odvodíme jej meratelnosť a mieru.

Pre ľubovoľné $r \in \mathbb{N}$ označíme $A_{(r)}$ zjednotenie všetkých štvorcov siete $\mathcal{S}_r^2$, obsiahnutých vo vnútri $A^o$ mnoǐny $A$. Ak v $A^o$ neleží žiadny štvorec siete $\mathcal{S}_r^2$, tak $A_{(r)} = \emptyset$ a kladieme $\mu(A_{(r)}) = 0$. Súčasne označíme $A^{(r)}$ zjednotenie všetkých štvorcov siete $\mathcal{S}_r^2$, ktoré majú neprázdny prienik s uzáverom $\overline{A}$ množiny $A$.

Množiny $A_{(r)},\ A^{(r)}$ sú polygóny a na základe ohraničenosti množiny $A$ spĺňajú nerovnosti

$$0 \le \mu(A_{(r)}) \le \mu(A^{(r)}) \le M < \infty,$$
$$\mu(A_{(r)}) \le \mu(A_{(r+1)}),\ \mu(A^{(r+1)}) \le \mu(A^{(r)}),\ r \in \mathbb{N}.$$

Teda postupnosti $\mu(A_{(r)})$ resp. $\mu(A^{(r)})$ sú neklesajúce resp. nerastúce a ohraničené. Potom existujú ich limity a má význam nasledujúca definícia.

**Definícia 1.2** *Nezáporné čísla definované vzťahmi*

$$\underline{\mu}(A) = \lim_{r\to\infty} \mu(A_{(r)}), \quad \overline{\mu}(A) = \lim_{r\to\infty} \mu(A^{(r)})$$

*sa nazývajú vnútorná resp. vonkajšia miera množiny $A$.*

Čísla $\mu(A_{(r)})$ resp. $\mu(A^{(r)})$ sú dolným resp. horným odhadom obsahu množiny $A$. Je zrejmé, pre dostatočne veľké hodnoty $r$ by sa mali od seba čo najmenej líšiť, čo nastáva v prípade rovnosti vnútornej a vonkajšej miery množiny $A$.

**Definícia 1.3** *Ohraničená množina $A$ sa nazýva meratelná, ak $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$ a nezáporné číslo $\mu(A) = \underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$ nazývame mierou množiny $A$.*

Priamo z definície meratelnosti možno ukázať že systém meratelných množín je uzavretý vzhľadom na konečné množinové operácie:

**Veta 1.4** *Nech množiny $A,\ B \subset \mathbb{R}^2$ sú meratelné. Potom aj množiny $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$ sú meratelné.*

Nasledujúca veta vyjadruje základné vlastnosti miery.

**Veta 1.5** *Nech množiny $A,\ B \subset \mathbb{R}^2$ sú meratelné.*
*a) Ak $A \subset B$, tak $\mu(A) \le \mu(B)$.*

*b) $\mu(A) \cup \mu(B) \le \mu(A) + \mu(B)$. c) Ak $A \cap B = \emptyset$, tak $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

V nasledujúcom príklade ukážeme, že definovaná miera odpovedá bežnému geometricky chápanému obsahu množiny v rovine $\mathbb{R}^2$.

**Príklad 1.6** *Nech $I = [a,b] \times [c,d],\ a < b,\ c < d$. Potom množina $I$ je meratelná a $\mu(I) = (b-a)(d-c)$.*

*Tvrdenie dokážeme na základe definície meratelnosti a miery.*

*Nech $p \equiv p(r)$ a $q \equiv q(r)$ sú počty intervalov $[\frac{j}{2^r}, \frac{j+1}{2^r}]$ nachádzajúcich sa v otvorených intervaloch $(a,b)$ resp. $(c,d)$. Potom platia nerovnosti*

$$\mu(I_{(r)}) = \frac{pq}{4^r} \le (b-a)(d-c)\ \frac{(p+2)(q+2)}{4^r} = \mu(I^{(r)}),$$

*z ktorých dostávame*

$$\underline{\mu}(I) = \lim_{r\to\infty} \mu(I_{(r)}) = \lim_{r\to\infty} \mu(I^{(r)}) = \overline{\mu}(I) = \mu(I) = (b-a)(d-c).$$

Na základe definície vnútornej a vonkajšej miery platí nasledujúce kritérium meratelnosti množiny.

**Veta 1.7** *Množina $A$ je meratelná práve vtedy keď jej hranica $\partial A$ je meratelná a $\mu(\partial A) = 0$.*

Ľahko vidno, že prázdna a jednobodová množina sú meratelné a majú nulovú mieru, rovnako ako aj každá konečná množina bodov v $\mathbb{R}^2$.

Ak $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, tak jej graf

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = f(x)\}$$

je meratelná množina a má nulovú mieru. Toto tvrdenie možno dokázať pomocou rovomernej spojitosti funkcie $f$ na intervale $[a, b]$. Ak je funkcia $f$ aj nezáporná, dostaneme meratelnosť krivočiareho lichobežníka

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Ako je známe z integrálneho počtu pre funkcie jednej premennej, je obsah množiny $A$ rovný $P(A) = \int_a^b f(x)$. V nasledujúcej časti ukážeme rovnosť obsahu a miery množiny $A$ podobne ako v prípade obdĺžnika $I = [a, b] \times [c, d]$.

## 1.2 Integrovatelné funkcie

Zavedená miera množiny v dvojrozmernom priestore je základom definície dvojného integrála funkcie dvoch premenných cez meratelnú množinu. Kvôli jednoduchosti začneme s integrálom cez obdĺžnik. V tomto prípade možno zaviesť integrál ako limitu postupnosti integrálov z funkcií po častiach konštantných na jednotlivých podobdĺžnikoch deliacich pôvodny obdĺžnik.

**Definícia 1.8** *Nech body*

$$a = x_0^{(r)} < x_1^{(r)} < ... < x_{m(r)}^{(r)} = b, \ c = y_0^{(r)} < y_1^{(r)} < ... < y_{n(r)}^{(r)} = d,$$
$$I_{jk}^{(r)} = [x_j^{(r)} - x_{j-1}^{(r)}] \times [y_k^{(r)} - y_{k-1}^{(r)}], \ j = 1, ..., m(r), \ k = 1, ..., n(r), \ r \in \mathbb{N}$$

*určujú postupnosť delení $\mathcal{D}_r = \{I_{jk}^{(r)}\}_{j=1,...,m(r)}^{k=1,...,n(r)}$ obdĺžnika $I = [a, b] \times [c, d]$.*

*Postupnosť $\{\mathcal{D}_r\}$ je normálna, ak $\lim_{r\to\infty} \|\mathcal{D}_r\| = 0$, kde*

$$\|\mathcal{D}_r\| = \max_{j=1,...,m(r), \ k=1,...,n(r)} \mu(I_{jk}^{(r)})$$

*je norma delenia $\mathcal{D}_r$, $r \in \mathbb{N}$.*

Zavedieme integrálny súčet funkcie $f$ vyjadrujúci v prípade nezápornej funkcie približnú hodnotu objemu kvádra so základňou $I = [a, b] \times [c, d]$ a premennou výškou $f(x, y)$, $(x, y) \in I$. Integrál funkcie $f$ dostaneme ako limitu konvergentnej postupnosti integrálnych súčtov.

**Definícia 1.9** *Nech $f : I \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia.*

*a) Nech $\mathcal{D} = \{I_{jk}\}_{j=1,...,m}^{k=1,...,n}$ je delenie obdĺžnika $I$, $V = \{(\xi_j, \eta_k)\}$ je výber bodov $(\xi_j, \eta_k) \in I_{jk}$ v delení $\mathcal{D}$. Potom súčet*

$$S(f; \mathcal{D}, V) = \sum_{j,k=1}^{m,n} f(\xi_j, \eta_k)\mu(I_{j,k})$$

*sa nazýva integrálny súčet funkcie $f$ príslušný k deleniu $(\mathcal{D}, V)$.*

*b) Hovoríme, že funkcia $f$ je integrovateľná na množine $I$, ak pre ľubovolnú normálnu postupnosť delení $\{\mathcal{D}_r\}$ a lubovolný výber bodov $V_r$ v delení $\mathcal{D}_r$ je odpovedajúca postupnosť integrálnych súčtov $\{S(f;\mathcal{D}_r,V_r)\}$ konvergentná. Číslo*

$$S=\lim_{r\to\infty} S(f;\mathcal{D}_r,V_r)$$

*nazývame (dvojným) integrálom funkcie $f$ na množine $I$ a označujeme*

$$S=\int_I f d\mu=\int\int_I f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy.$$

**Poznámka 1.10** *Hodnota integrála funkcie $f$ je jednoznačne určená a nezávisí od výberu postupnosti integrálnych súčtov.*

*Nech $T=\lim_{r\to\infty} S(f;\mathcal{D}'{}_r,V'_r)$. Potom aj postupnosť $\{\mathcal{D}''{}_r\}$ definovaná vzťahmi $\mathcal{D}''_{2r-1}=\mathcal{D}_r$, $\mathcal{D}''_{2r}=\mathcal{D}'_r$ je normálnou postupnosťou delení obdĺžnika $I$. Ak $\{S(f;\mathcal{D}''_r,V''_r)\}$ je postupnosť integrálnych súčtov s výberom bodov $V''_r=V_r\cup V'_r$ a $U=\lim_{r\to\infty} S(f;\mathcal{D}''_r,V''_r)$, tak $U=S=T$, pretože postupnosti $\{S(f;\mathcal{D}_r,V_r)\}$, $\{S(f;\mathcal{D}'_r,V'_r)\}$ sú vybrané z postupnosti $\{S(f;\mathcal{D}''_r,V''_r)\}$.*

Na rozdiel od integrála cez obdĺžnik $[a,b]\times[c,d]$, kedy nám stačilo jeho delenie na konečný počet podobdĺžnikov, budeme uvažovať meratelnú množinu rozdelenú na konečný počet jej meratelných podmnožín.

**Definícia 1.11** *Delenie neprázdnej meratelnej množiny $A\subset\mathbb{R}^2$ je ľubovolný systém*

$$\mathcal{D}=\{A_1,...,A_s\}$$

*neprázdnych meratelných množín, pre ktoré*

$$A=A_1\cup...\cup A_s,\ \mu(A_i\cap A_j)=0,\ \text{pre } i\neq j,\ i,j=1,...,s.$$

*Symbolom $\Delta A$ označujeme množinu všetkých delení množiny $A$.*

*Hovoríme, že delenie $\mathcal{D}'=\{A'_1,...,A'_t\}$ je zjemnenie delenia $\mathcal{D}$ , ak každá množina $A'_i\in\mathcal{D}'$ je podmnožinou niektorej množiny $A_j\in\mathcal{D}$ a každá množina $A_k\in\mathcal{D}$ je zjednotením niektorých množín systému $\mathcal{D}'$. Píšeme $\mathcal{D}'\succ\mathcal{D}$.*

*Ak $\mathcal{D}=\{A_1,...,A_s\}$ je delenie množiny $A$, tak množinu bodov*

$$V=\{p_1,...,p_s\},\ p_j\in A_j,\ j=1,...,s$$

*nazývame výberom bodov v delení $\mathcal{D}$ a označujeme $V\sqsubset\mathcal{D}$.*

Zavedieme integrálny súčet funkcie $f$ vyjadrujúci v prípade nezápornej funkcie približnú hodnotu objemu kvádra so základňou $A$ a premennou výškou
$f(x,y),\ (x,y)\in A$; konvergentnú postupnosť integrálnych súčtov a integrál ako ich limitu.

**Definícia 1.12** *Nech $f:A\to\mathbb{R}$ je ohraničená funkcia definovaná na meratelnej množine $A\subset\mathbb{R}^2$.*

*a) Nech $\mathcal{D}=\{A_1,...,A_s\}$ je delenie množiny $A$, $V=\{p_1,...,p_s\}$ je výber bodov v delení $\mathcal{D}$. Potom súčet*

$$S(f;\mathcal{D},V)=\sum_{i=1}^{s} f(p_i)\mu(A_i)$$

*sa nazýva integrálny súčet funkcie $f$ príslušný k deleniu $(\mathcal{D},V)$.*

*b) Hovoríme, že množina integrálnych súčtov $\{S(f;\mathcal{D},V)\}$ má limitu $S\in\mathbb{R}$ a píšeme*

$$\lim_{\mathcal{D}} S(f;\mathcal{D},V)=S,$$

*ak k ľubovolnému $\varepsilon > 0$ existuje delenie $\mathcal{D}_0 \in \Delta A$ tak, že pre každé delenie $\mathcal{D} \succ \mathcal{D}_0$ a každý výber bodov $V \sqsubset \mathcal{D}$ platí*

$$|S(f;\mathcal{D},V) - S| < \varepsilon.$$

*Číslo $S$ sa nazýva dvojný integrál funkcie $f$ na množine $A$ a označuje*

$$S = \int_A f d\mu = \int\int_A f(x,y)dxdy.$$

Podobne ako v prípade integrála na obdĺžniku hodnota integrála $\int_A f d\mu$ nezávisí na výbere delení množiny $A$ a je jednoznačne určená. Ak
$A = [a,b] \times [c,d]$, tak obe definície integrálov sú ekvivalentné.

Priamo z definície integrála a aditivity miery množiny vyplýva vzťah medzi mierou množiny a integrálom.

**Veta 1.13** *Ak $A$ je meratelná množina, tak funkcia $f \equiv 1$ je integrovatelná na $A$ a platí*

$$\mu(A) = \int_A d\mu.$$

*Proof.* Pre každé delenie $\mathcal{D} = \{A_1, ..., A_s\}$ a každý výber bodov $V \sqsubset \mathcal{D}$ je

$$S(f;\mathcal{D},V) = \sum_{i=1}^{s} \mu(A_i) = \mu(A)$$

a teda $S = \lim_{\mathcal{D}} S(f;\mathcal{D},V) = \mu(A) = \int_A d\mu$.

Z vlastností integrálnych súčtov

$$\begin{aligned} &S(f+g;\mathcal{D},V) = S(f;\mathcal{D},V) + S(g;\mathcal{D},V), \\ &S(cf;\mathcal{D},V) = cS(f;\mathcal{D},V),\ c \in \mathbb{R}, \\ &f \le g \Rightarrow S(f;\mathcal{D},V) \le S(g;\mathcal{D},V) \end{aligned}$$

vyplývajú vlastnosti dvojného integrála analogické ako v prípade určitého integrála funkcie jednej premennej:

**Veta 1.14** *Nech sú funkcie $f,\ g$ integrovatelné na množine $A$ . Potom*
*a) Funkcie $f+g,\ cf,\ c \in \mathbb{R}$ sú integrovatelné na $A$ a platí*

$$\int_A (f+g)d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu,\ \int_A cf d\mu = c\int_A f d\mu,$$

*b) Ak $f \le g$ na $A$, tak*

$$\int_A f d\mu \le \int_A g d\mu.$$

Z druhej časti predchádzajúcej vety vyplýva nasledujúca veta o odhadoch integrála.

**Veta 1.15** *Nech integrovatelná na $A$ funkcia $f$ splňa odhady*

$$\alpha \le f(x,y) \le \beta,\ |f(x,y)| \le \gamma$$

*pre všetky $(x,y) \in A$. Potom*

$$\alpha\mu(A) \le \int_A f d\mu \le \beta\mu(A),\ \Big|\int_A f d\mu\Big| \le \gamma\mu(A).$$

Na základe posledných odhadov integrála $\int_A f d\mu$ zavedieme dôleťitý pojem v teórii integrovateľných funkcií *strednú hodnotu funkcie*. Pripomeňme si, že ohraničená a uzavretá množina sa nazýva kompaktná. Ak ľubovolné dva body mnoiny $A$ možno spojiť lomenou čiarou ležiacou v$A$, nazývame množinu $A$ súvislou.

**Veta 1.16** *(Veta o strednej hodnote) Nech funkcia $f$ je integrovatelná na množine $A$, $\mu(A) > 0$. Potom existuje číslo $f_s$ - stredná hodnota funkcie $f$, pre ktoré*

$$f_s \in [\inf_A f, \sup_A f], \ \ f_s = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu.$$

$$\alpha\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq \beta\mu(A), \ \Big| \int_A f d\mu \Big| \leq \gamma\mu(A).$$

*Ak naviac funkcia $f$ je spojitá na kompaktnej súvislej množine $A$, tak existuje bod $(\xi, \eta) \in A$ tak, že*

$$\int \int_A f d\mu = f(\xi, \eta)\mu(A).$$

*Proof.* Ak v predchádzajúcej vete položíme $\alpha = \inf_A f, \ \beta = \sup_A f$
a predelíme prvé dve nerovnosti v jej tvrdení s kladným číslom $\mu(A)$, tak dostaneme splnenie vlastností strednej hodnoty $f_s$.

Ak naviac funkcia $f$ je spojitá na kompaktnej množine $A$, tak existujú body $(\xi_1, \eta_1), \ (\xi_2, \eta_2) \in A$, pre ktoré

$$f(\xi_1, \eta_1) = \min_A f = \alpha, \ f(\xi_2, \eta_2) = \max_A f = \beta.$$

Súčasne $f_s \in [\alpha, \beta]$. Spojitým obrazom kompaktnej súvislej množiny $A \in \mathbb{R}^2$ je kompaktná súvislá množina $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$ a teda existuje bod $(\xi, \eta) \in A$, pre ktorý $f(\xi, \eta) = f_s = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu$, čo dokazuje druhú časť vety.

Doteraz sme sa nezaoberali otázkou určovania integrovatelnosti funkcie $f$ v závislosti na jej vlastnostiach. Bez dôkazu uvedieme vetu o integrovatelnosti spojitých funkcií, analogickú ako v prípade funkcie jednej premennej.

**Veta 1.17** *Ak funkcia $f$ je ohraničená a spojitá na meratelnej množ ine $A$, tak je na $A$ integrovatelná.*

Predchádzajúce vety vyjadrovali závislosť integrála $int_A f d\mu$ na funkcii $f$. Jednou z najdôležitejších vlastností integrála je aditivita vzhľadom na množiny integrovania, vyplývajúca priamo z definície integrála.

**Veta 1.18** *Nech $B, \ C \subset \mathbb{R}^2$ sú meratelné množiny, $\mu(B \cap C) = 0, \ A = B \cup C$. Funkcia $f$ je integrovateľná na množine $A$ práve vtedy, keď je integrovatelná na množinách $B$ a $C$, pričom*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu + \int_C f d\mu.$$

Z práve uvedenej vlastnosti vyplýva

**Dôsledok 1.19** *Ak $A$ je meratelná, $C \subset A$ , $\mu(C) = 0$, tak $f$ je integrovatelná na $A$ práve vtedy, keď je integrovatelná na $A \setminus C$, pričom platí*

$$\int_A f d\mu = \int_{A \setminus C} f d\mu.$$

Ak niektorá vlastnosť platí na množine $A \setminus C,\ \mu(C) = 0,$ hovoríme, že uvedená vlastnosť platí takmer všade. Z predchádzajúceho dôsledku a Vety o integrovatelnosti spojitej funkcie dostaneme

**Dôsledok 1.20** *Ak funkcia $f$ je ohraničená a takmer všade spojitá na meratelnej množine $A$, tak je na $A$ integrovatelná.*

**Príklad 1.21** *Nech*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\},$$
$$f : A \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \sin \frac{1}{xy},\ \text{ak } (x, y) \neq (0, 0),\ f(0, 0) = 0.$$

*Množina $A$ je meratelná, pretože jej hranica je zjednotením grafov dvoch spojitých funkcií a teda má nulovú mieru. Funkcia $f$ je ohraničená na množine $A$ a spojitá na $A \setminus \{(0, 0)\}$ a teda takmer všade spojitá na $A$. Potom je funkcia $f$ na $A$ integrovatelná.*

## 1.3 Výpočet dvojného integrála

Základnou metódou výpočtu dvojného integrála je postupný výpočet jedno- duchých integrálov.

Uvažujme najprv integrál cez obdĺžnik (dvojrozmerný interval) $I = [a, b] \times [c, d]$ . Vieme, že v prípade nezápornej funkcie $f : I \to \mathbb{R}$ vyjadruje integrál $\int_I f d\mu$ objem kvádra so základňou $I$ a premennou výškou $f(x, y),\ (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Predstavme si uvedený kváder rozdelený na súčet kvádrov so základňou $dI = [c, d]dx$. Ak položíme

$$dV = \int_c^d f(x, y)dy$$

infinitezimálny objem kvádra premennej výšky $f(x, y),\ y \in [c, d],$ dostaneme celkový objem v tvare

$$V = \int_I f(x, y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx.$$

Podobne by sme dostali aj vzťah

$$V = \int_I f(x, y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x, y)dx)dy.$$

Predpokladajme kvôli jednoduchosti takmer všade spojitú funkciu $f$. Predchádzajúce úvahy vyjadríme v nasledujúcej vete.

**Veta 1.22** *(O postupnom integrovaní). Nech $f\ : I \to \mathbb{R},\ I = [a, b] \times [c, d]$ je takmer všade spojitá funkcia. Nech existujú integrály*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

*pre všetky $x \in [a, b]$. Funkcia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrovatelná a platí*

$$\int_I f(x, y)dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx.$$

Existencia dvojného integrála vyplýva zo spojitosti takmer všade t.j. až na množinu miery nula funkcie $f$. Existenciu "vnútorných" integrálov musíme predpokladať, pretože funkcia $y \to f(x, y)$ nemusí byť takmer všade spojitá ako funkcia jednej premennej $y$. Je zrejmé, že v tvrdení vety môžeme vymeniť poradie integrovania pri splnení príslušných predpokladov. Dôkaz tvrdenia vety je štandardný s použitím definícii jednoduchého a dvojného integrála.

**Príklad 1.23** *Vypočítajme objem telesa*

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le x + y\}.$$

*Riešenie: Objem je dvojným integrálom*

$$V = \int\int_I (x+y)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 (x+y)dxdy.$$

*Pretože integrovaná funkcia je spojitá, sú splnené predpoklady Vety o postupnom integrovaní a dostaneme*

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^2 (x+y)dy)dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 (2x+2)dx = 3.$$

*Pri zmene poradia premenných dostaneme*

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y)dxdy = \int_0^2 (\int_0^1 (x+y)dx)dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 (\frac{1}{2} + y)dy = 3.$$

*Teda výsledný objem* $V = 3$.

Predchádzajúci postup môžeme zovšeobecniť aj na prípad ľubovolnej mera- telnej množiny $A \subset \mathbb{R}^2$. Interval $[a, b]$ nahradíme množinou

$$A' = \{x \in \mathbb{R} :\ \exists y \in \mathbb{R},\ (x, y) \in A\}$$

Vnútorný integrál bude cez množinu

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} :\ (x, y) \in A\},\ x \in A'$$

závislú na premennej $x \in A'$.

**Veta 1.24** *(Fubiniho veta). Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *je takmer všade spojitá funkcia. Nech existujú integrály*

$$F(x) = \int_{A_x} f(x, y)dy$$

*pre všetky* $x \in A'$. *Funkcia* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je integrovatelná a platí*

$$\int_A f(x, y)dxdy = \int_{A'} F(x)dx = \int_{A'} (\int_{A_x} f(x, y)dy)dx.$$

Vo Fubiniho vete môžeme v prípade splnenia príslušných perdpokladov vymeniť premenné a dostaneme vzťah

$$\int_A f(x, y)dxdy = \int_{A''} (\int_{A_y} f(x, y)dx)dy,$$
$$A'' = \{y \in \mathbb{R} :\ \exists x \in \mathbb{R},\ (x, y) \in A\}.$$

Fubiniho vetu aplikujeme pri výpočte dvojných integrálov cez množiny čiastočne ohraničené grafmi dvoch spojitých funkcii. Presnejšie ich zavedieme v nasledujúcej definícii.

**Definícia 1.25** *Nech*

$$g : [a, b] \to \mathbb{R},\ h : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \le g$$

*sú spojité funkcie. Množinu*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$$

*nazývame elementárnou oblasťou typu* $(x, y)$.

Po výmene premenných v predchádzajúcej definícii dostaneme elementárnu oblasť typu $(y,x)$.

V prípade elementárnej oblasti $A$ typu $(x,y)$ dostaneme vo Fubiniho vete $A' = [a,b],\ A_x = [g(x), h(x)],\ x \in [a,b]$. Ak funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je takmer všade spojitá, tak je na množine $A$ integrovatelná a platí

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy)dx,$$

ak existuje vnútorný integrál $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$ pre všetky $x \in [a,b]$.

Podobne v prípade elementárnej oblasti $A$ typu $[y,x]$ máme vzťah

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx)dy.$$

Všetky integrály v predchádzajúcich vzorcoch existujú, ak je funkcia
$f : A \to \mathbb{R}$ spojitá.

**Príklad 1.26** *Vypočítajme integrál* $\int\int_A x^2ydxdy$, *kde* $A \subset \mathbb{R}^2$ *je množina ohraničená priamkou* $y = x$ *a parabolou* $y^2 = 4x\}$.
*Riešenie: Množinu* $A$ *môžeme vyjadriť ako elementárnu oblasť typu* $(x,y)$ *aj* $(y,x)$. *Parabola s priamkou majú spoločné body* $\overline{O} = (0,0),\ P = (4,4)$. *Potom*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 4,\ x \le y \le 2\sqrt{x}\}$$

*a dostávame*
$\int\int_A x^2ydxdy = \int_0^4 (\int_x^{2\sqrt{x}} x^2ydy)dx = \int_0^4 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_x^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 (2x^3 - \frac{x^4}{2})dx$
$= 128 - \frac{1024}{10} = \frac{128}{5}$.
*Ak vyjadríme množinu* $A$ *ako elementárnu oblasť typu* $(y,x)$ :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 4,\ \frac{y^2}{4} \le x \le y\},$$

*dostaneme*
$\int\int_A x^2ydxdy = \int_0^4 (\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} x^2ydx)dy = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3}y\right]_{\frac{y^2}{4}}^{y} dy = \int_0^4 \frac{1}{3}(y^4 - \frac{y^7}{64})dy$
$= \frac{1}{3}(\frac{1024}{5} - 128) = \frac{128}{5}$.

## 1.4 Výpočet integrálov substitúciou

V jednorozmernom prípade platí vzorec na výpočet integrálu substitúciou v tvare

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))|\phi'(t)|ddt,$$

kde $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je prostá spojite diferencovatelná funkcia zobrazujúca interval $[\alpha,\beta]$ na interval $[a,b]$.

V dvojrozmernom prípade je substitúcia sprostredkovaná zobrazením
$\Phi : G \to \mathbb{R}^2,\ G \subset \mathbb{R}^2$ ktoré môže zobraziť napríklad obdĺžnik $I$ aj na geometricky zložitejšiu ohraniěnú mnoǐnu $A$.

**Definícia 1.27** *Zobrazenie* $\Phi : G \to \mathbb{R}^2,\ G \subset \mathbb{R}^2$ *je regulárne, ak je spojite diferencovatelné a* $J(\Phi)(s,t) \ne 0\ \forall (s,t) \in G$, *kde*

$$J(\Phi)(s,t) = \det \Phi'_*(s,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial s}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial s}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} \end{vmatrix},\ (s,t) \in G.$$

Determinant $J(\Phi)$ nazývame aj Jacobiho determinant, alebo Jakobián zobrazenia $\Phi$.

**Príklad 1.28** *Nájdime regulárne zobrazenie $\Phi$, ktoré zobrazí pravouhlý trojuholník $T \subset \mathbb{R}^2$ s vrcholmi $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$ na trojuholník $A \subset \mathbb{R}^2$ s vrcholmi $(a_1,b_1),\ (a_2,b_2),\ (a_3,b_3)$.*
*Riešenie: Hľadané zobraznie $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ má tvar*

$$x := \Phi_1(s,t) = a_1 + (a_2 - a_1)s + (a_3 - a_1)t,$$
$$y := \Phi_1(s,t) = b_1 + (b_2 - b_1)s + (b_3 - b_1)t,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

*Jakobián zobrazenia*

$$J(\Phi)(s,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \end{vmatrix} (s,t) = \begin{vmatrix} a_2 - a_1,\ a_3 - a_1 \\ b_2 - b_1,\ b_3 - b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

*pretože vektory $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)^T,\ (a_3 - a_1, b_3 - b_1)^T$ sú lineárne nezávislé.*

Výpočet dvojného integrála substitíciou prevádzame podľa nasledujúcej vety.

**Veta 1.29** *Nech zobrazenie $\Phi : G \to \mathbb{R}^2,\ G \subset \mathbb{R}^2$, je spojite diferencovateľné a takmer všade regulárne. Nech $B \subset G$ je merateľná množina, $A = \Phi(B)$ a funkcia $f$ ohraničená a takmer všade spojitá na $A$. Potom množina $A$ je merateľná a*

$$\int_A f d\mu = \int_B (f \circ \Phi)|J(\Phi)| d\mu$$

Dôkaz vety je dosť obtiažny. Vetu aplikujeme hlavne na výpočet integrálov na kruhových oblastiach.

### Substitúcia polárnymi súradnicami

Definujeme transformáciu

$$\Phi : G \to \mathbb{R}^2,\ G = (0,\infty) \times [0,2\pi) \cup \{\overline{O}\}$$

vzťahmi

$$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi.$$

Platí $\Phi(G) = \mathbb{R}^2$ Je zrejmé, že zobrazenie je spojite diferencovateľné. Jeho jakobián

$$J(\Phi)(r,\varphi) = \rho$$

a teda zobrazenie je regulárne na množine $(0,\infty) \times [0,2\pi)$.

Dvojica $(\rho,\varphi)$ vyjadruje polárne súradnice bodu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vyjadrujúce jeho vzdialenosť $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ od bodu $\overline{O}$ a uhol $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ radiálneho vektora $\vec{r} = (x,y)^T$ s kladnou časťou osi $\mathcal{O}_x$.

Ak $A = \Phi(B),\ \Phi(r,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, tak

$$\int\int_A f(x,y)dxdy = \int\int_B f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho d\varphi.$$

**Príklad 1.30** *Vypočítajme integrál*

$$\int\int_A e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

*na množine*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

*Množina $A$ je štvrťkruh s jednotkovým polomerom. Pomocou polárnych súradníc máme $A = \Phi(B)$,*

$$B = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

*a*

$$\int\int_A e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int\int_B e^{-\rho^2}\, \rho\, d\rho d\varphi = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}\, \rho\, d\rho d\varphi =$$
$$\int_0^1 \rho e^{-\rho^2} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^1 2\rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{4}\Big[-e^{-\rho^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2}).$$

# 2 Trojný integrál

V prípade funkcie troch premenných zavedieme integrál cez meratelnú množinu v priestore $\mathbb{R}^3$ analogicky ako v prípade dvojného integrála. Takmer všetky vlastnosti dvojného integrála majú univerzálny charakter a preto uvedieme len niektoré.

Zavedieme najprv pojem meratelnej množiny a miery v $\mathbb{R}^3$. Celý priestor pokryjeme sieťou $\mathcal{S}_r^3$ tvorenou $r-$kockami

$$I_{jkl} = [\frac{j}{2^r}, \frac{j+1}{2^r}] \times [\frac{k}{2^r}, \frac{k+1}{2^r}] \times [\frac{l}{2^r}, \frac{l+1}{2^r}],\ j,\ k\ \ l \in \mathbb{Z}.$$

kde $\mathbb{Z}$ je množina všetkých celých čísel.

**Definícia 2.1** *Ľubovolné konečné zjednotenie $E = \cup_{i=1}^m I_i$ prvkov $r-$kockovej siete $\mathcal{S}_r^3$ sa nazýva polyeder siete $\mathcal{S}_r^3$ a číslo*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^m \mu(I_i) = \frac{m}{8^r}$$

*je jeho mierou (objemom).*

Pomocou postupnosti polyedrov možo zaviesť vnútornú, vonkajšiu mieru a meratelnosť ohraničenej množiny $A \subset \mathbb{R}^3$ rovnakým postupom ako v dvoj-rozmernom prípade. Preto definície a vety z časti 1.1 nebudeme opakovať.

Analogicky ako v Príklade 1.6 dostaneme meratelnosť kvádra

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3],\ a_i < b_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$$

s mierou (objemom)

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

Ďalej zavedieme trojný integrál funkcie $f$ na množine $A$ ako limitu postupnosti integrálnych súčtov funkcie $f$, ktoré sú rovako definované ako v dvojrozmernom prípade.

**Definícia 2.2** *Nech $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia definovaná na meratelnej množine $A \subset \mathbb{R}^3$. Hovoríme, že funkcia $f$ je na $A$ integrovatelná, ak existuje limita*

$$\lim_{\mathcal{D}} S(f; \mathcal{D}, V) = S$$

*množiny integrálnych súčtov funkcie $f$. Číslo $S$ sa nazýva trojný integrál funkcie $f$ na množine $A$ a označuje*

$$S = \int_A f d\mu = \int\int\int_A f(x, y, z) dxdydz.$$

Trojný integrál funkcie $f$ môžeme interpretovať ako homotnosť telesa
$A \subset \mathbb{R}^3$ s premennou hustotou $f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in A$. Ak $f \equiv 1$, tak integrál

$$\int_A d\mu = \int\int\int_A dxdydz = \mu(A) = V(A)$$

je mierou (objemom) množiny $A$ .

Rovnako ako u dvojných integrálov, je aj každá takmer všade na me- ratelnej množine $A \subset \mathbb{R}^3$ spojitá funkcia integrovatelná. Základom výpočtu trojných integrálov cez množinu $A$ je postupný výpočet jednoduchého a dvojného integrálu. Zavedieme množiny

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \exists z \in \mathbb{R}, \ (x, y, z) \in A\}$$
$$A_{xy} = \{z \in \mathbb{R} : \ (x, y, z) \in A, \ (x, y) \in A'\}.$$

Platí nasledujúca verzia Fubiniho vety.

**Veta 2.3** *Nech $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^3$ je takmer všade spojitá funkcia. Nech existujú integrály*

$$F(x, y) = \int_{A_{xy}} f(x, y, z)dz$$

*pre všetky $(x, y) \in A'$. Funkcia $F : A' \to \mathbb{R}$ je integrovatelná a platí*

$$\int\int\int_A f(x, y, z)dxdydz$$
$$= \int\int_{A'} F(x, y)dxdy = \int\int_{A'} (\int_{A_{xy}} f(x, y, z)dz)dxdy.$$

Ak množina $A$ má tvar

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in A', \ g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

kde $g$, $h : A' \to \mathbb{R}$ sú spojité funkcie, $g \leq h$, tak dostaneme

$$\int\int\int_A f(x, y, z)dxdydz = \int\int_{A'} (\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)dz)dxdy.$$

Ak naviac množina $A'$ je elementárnou oblasťou typu $(x, y)$ :

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

tak môžeme vyjadriť trojný integrál pomocou jednoduchých integrálov s premennými hranicami v tvare

$$\int\int\int_A f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)dz)dy)dx.$$

**Príklad 2.4** *Vypočítajme integrál $\int_A ydxdydz$, kde $A$ je štvorsten ohraničený rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 1$.*

*Množinu $A$ vyjadríme v tvare*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in A', \ 0 \leq z \leq 1 - 2x - y\},$$

*kde $A'$ je priemet štvorstenu $A$ do roviny $z = 0$. Je to trojuholník, ktorý môžeme vyjadriť ako elementárnu oblasť typu $(x, y)$ :*

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \ 0 \leq y \leq 1 - 2x\}.$$

$$\int\int\int_A y\,dxdydz = \int_0^{\frac{1}{2}}(\int_0^{1-2x}(\int_0^{1-2x-y)} ydz)dy)dx =$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}}(\int_0^{1-2x} y(1-2x-y)dy)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2}y^2(1-2x) - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-2x} dx =$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{6}(1-2x)^3dx = \int_0^1 \frac{1}{12}t^3dt = \frac{1}{48}.$$

Budeme pokračovať substitúciou v trojných integráloch.

**Definícia 2.5** *Zobrazenie $\Phi : G \to \mathbb{R}^3$, $G \subset \mathbb{R}^3$ je regulárne, ak je spojite diferencovatelné a $J(\Phi)(s,t,u) \neq 0\ \forall (s,t,u) \in G$, kde*

$$J(\Phi)(s,t,u) = \det \Phi'_*(s,t,u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial s}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \end{vmatrix},\ (s,t) \in G.$$

Pripomeňme si, že determinant $J(\Phi)$ nazývame Jacobiho determinant alebo jakobián zobrazenia $\Phi$.

Výpočet trojného integrála substitúciou prevádzame podľa nasledujúcej vety.

**Veta 2.6** *Nech zobrazenie $\Phi : G \to \mathbb{R}^3$, $G \subset \mathbb{R}^3$, je spojite diferencovatelné a takmer všade regulárne. Nech $B \subset G$ je meratelná množina, $A = \Phi(B)$ a funkcia $f$ ohraničená a takmer všade spojitá na $A$. Potom množina $A$ je meratelná a*

$$\int_A f d\mu = \int_B (f \circ \Phi)|J(\Phi)| d\mu.$$

Ďalej sa budeme zaoberať dvoma najčastejšie používanými substitúciami pomocou cylindrických a sférických súradníc.

**Substitúcia cylindrickými súradnicami**

Definujeme transformáciu

$$\Phi : G \to \mathbb{R}^3,\ G = [0,\infty) \times [0,2\pi) \times (-\infty,\infty)$$

vzťahmi

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z.$$

Platí $\Phi(G) = \mathbb{R}^2$ Je zrejmé, že zobrazenie je spojite diferencovatelné. Jeho jakobián

$$J(\Phi)(r,\varphi,z) = \rho$$

a teda zobrazenie je regulárne na množine $(0,\infty) \times [0,2\pi) \times (-\infty,\infty)$.

Trojica $(\rho,\varphi,z)$ vyjadruje cylindrické súradnice bodu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vyjadrujúce jeho vzdialenosť $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ od osi $\mathcal{O}_z$, uhol $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ vektora $\vec{\rho} = (x,y,0)^T$ s polrovinou $y = 0,\ x > 0$ a vzdialenosť od roviny $z = 0$.

Ak $A = \Phi(B)$, $\Phi(r,\varphi,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$, tak

$$\int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_B f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, d\rho d\varphi dz.$$

**Príklad 2.7** *Vypočítajme objem množiny*

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq y \leq 4 - x^2 - y^2\}.$$

*Riešenie:*

*Množina sa nachádza v prvom oktante medzi rovinami* $x = 0, \ y = 0$ *a rotačnými paraboloidami* $z = x^2 + y^2, \ z = 4 - x^2 - y^2$. *Prienik častí paraboloidov je štvrťkružnica s polomerom* $r = \sqrt{2}$ *a ležiaca v rovine* $z = 2$. *Po substitúcii pomocou cylindrických súradníc dostávame pre objem množiny* $A$ *vzťah*

$$V(A) = \int_A d\mu = \int\int\int_B \rho \, d\rho d\varphi dz,$$

$$B = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \ \rho^2 \leq z \leq 4 - \rho^2\}.$$

*Integrál cez množinu* $B$ *vypočítame pomocou Fubiniho vety:*

$$\int\int\int_B \rho \, d\rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{\sqrt{2}} \rho (\int_{\rho^2}^{4-\rho^2} dz) d\rho) d\varphi = \frac{\pi}{2} (\int_0^{\sqrt{2}} \rho (4 - 2\rho^2) d\rho$$

$$= \pi (\int_0^{\sqrt{2}} (2\rho - \rho^3) d\rho = \pi \Big[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{2}} = \pi.$$

**Substitúcia sférickými súradnicami**

Definujeme transformáciu

$$\Phi : G \to \mathbb{R}^3, \ G = [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

vzťahmi

$$x = r \cos\varphi \cos\theta, \ y = r \sin\varphi \cos\theta, \ z = r \sin\theta.$$

Platí $\Phi(G) = \mathbb{R}^3$ Je zrejmé, že zobrazenie je spojite diferencovateľné. Jeho jakobián

$$J(\Phi)(r, \varphi, \theta) = r^2 cos\theta$$

a teda zobrazenie je regulárne na množine $(0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\pi 2, \pi 2)$.

Trojica $(r, \varphi, \theta)$ vyjadruje sférické súradnice bodu $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vyjadrujúce jeho vzdialenosť $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ od bodu $\overline{O}$, uhol $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ vektora $\vec{\rho} = (x, y, 0)^T$ s polrovinou $y = 0, \ x > 0$ a uhol $\theta = \arcsin \frac{z}{r}$ radiálneho vektora $\vec{r} = (x, y, z)^T$ s rovinou $z = 0$.

Ak $A = \Phi(B), \ \Phi(r, \varphi, \theta) = (r \cos\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\theta)$, tak

$$\int\int\int_A f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\int\int\int_B f(r \cos\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\theta) \, r^2 \cos\theta \, dr d\varphi d\theta.$$

**Príklad 2.8** *Nájdime moment zotrvačnosti vzhľadom k osi $\mathcal{O}_z$ homogénneho telesa $A$ s jednotkovou hustotou ohraničeného plochami*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0.$$

*Riešenie:*

*Moment zotrvačnosti $J_z(A)$ vypočítame podľa vzorca*

$$J_z(A) = \int\int\int_A (x^2 + y^2)dxdydz,$$
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}.$$

*Množina $A$ je zdola ohraničená kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a zhora polosférou $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ , pričom uvedené plochy sa pretínajú v rovine $z = 1$. Potom je množina $A$ (v sférických súradniciach) obrazom množiny*

$$B = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

*Po substitúcii pomocou sférických súradníc dostaneme*

$$J_z(A) = \int\int\int_B r^2\cos^2\theta\, r^2\cos\theta\, drd\varphi d\theta = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos^3\theta drd\varphi d\theta$$
$$= 2\pi\frac{2^{5/2}}{5}\Big[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}\pi(\frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}) = \frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5).$$