Matematická analýza II.

BOCK, I.

1 Úvod

Všetky prírodné, ekonomické a spoločenské javy sa odohrávajú v čase a v priestore. Naviac, často obsahujú viac nezávislých zložiek, ktoré vstupujú do rŏznych závislostí. Na ich kvalitatívne a kvantitatívne vyjadrenie nám slúžia funkcie viacerých premenných, ktorých hodnoty môžu byť skalárne, alebo vektorové veličiny. Budeme sa zaoberať ich vlastnosťami, ako aj použitím, ktoré, môže mať diferenciálny, alebo integrálny charakter. V prípade fyzikálnych, dynamických a mechanických aplikácii sa často jedná o funkcie časovej premennej t a priestorových premenných $x,\ y,\ z$. V matematických modeloch ekonomických a spoločenských javov sa používajú premenné $x_1,\ ...,\ x_m$. Tieto zdanlivo rôzne javy možno zjednotiť do jednej teórie o, čo sa budeme v ďalšom texte pokúšať.

2 Skalárne a vektorové funkcie (zobrazenia)

Budeme sa zaoberať funkciami zobrazujúcimi množinu $M \subset \mathbb{R}^m,\ n \geq 1$ do vektorového priestoru $\mathbb{R}^n,\ n \geq 1$. $\mathbb{R}^m$ je reálny vektorové priestor, ktorého prvky sú stĺpcové vektory

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} = (x_1, ..., x_m)^T \in \mathbb{R}^m,\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., m.$$

Analogické tvrdenie platí aj pre priestor $\mathbb{R}^n$.

Tam, kde nemôže prísť k nedorozumeniu budeme písať $x \in \mathbb{R}^m, m \geq 1$. V špeciálnych prípadoch $m = 2$, alebo $m = 3$ použijeme

$$\vec{r} = \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3, \qquad \vec{r} = \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2,$$

alebo aj

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Káždú funkciu $f : M \to \mathbb{R}^n,\ M \subset \mathbb{R}^m,\ n > 1$ možno vyjadriť v tvare

$$f = (f_1, ..., f_n),\ f_i : M \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., n,$$

pričom funkcie f_i sa nazývajú zložky funkcie f a sú definované vzťahom

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))^T,\ x \in M.$$

Ak $m > 1, n = 1$. nazýva sa funkcia f skalárne, ak $m = n > 1$, vektorové pole. Uvedieme niektoré geometrické interpretácie funkcie f.

Množinu

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : x \in M,\ y = f(x)\}$$

nazývame grafom funkcie $f : M \to \mathbb{R}^n$. V prípade $m = 2,\ n = 1$ je graf $Gr(f)$ jednoduchou plochou v priestore $\mathbb{R}^3$. Nie je možné priame geometrické vyjadrenie grafu funkcie $f : M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}^m$ v prípadoch $m > 2$. Namiesto toho má význam v prípadoch $m = 2,\ m = 3$ uvažovať tzv. úrovňové krivky resp. úrovňové plochy. Preľubovolné číslo $c \in \mathbb{R}$ sú to množiny

$$M_c = \{(x, y) \in M : f(x, y) = c\},$$

resp.

$$M_c = \{(x, y, z) \in M : f(x, y, z) = c\}.$$

Je zrejmé, že množina M_c môže byť aj prázdna. Naopak $M_c = M$ len v prípade konštantnej funkcie $f \equiv c$. Úrovňové množiny M_c majú dôležité aplikácie napr. v geofyzike, meteorológii, roentgenológii.

Dôležitým špeciálnym prípadom je vektorová funkcia $f : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ jednej premennej t. Obor hodnôt $H(f)$ tejto funkcie je v prípade $n = 2$ rovinnou a v prípade $n = 3$ priestorovou krivkou.

Ďalšou významnou triedou funkcií z hľadiska ich geometrickej interpretácie sú funkcie $g : M \to \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^2$. Ak sú splnené niektoré ďalšie podmienky, o ktorých sa zmienime neskôr, tak obor hodnôt $H(g) \subset \mathbb{R}^3$ je plochou v priestore $\mathbb{R}^3$. Aj graf vyššie spomenutej funkcie $f : M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}^2$ je plochou v predchádzajúcom zmysle. Ak definujeme funkciu $g : M \to \mathbb{R}^3$ predpisom

$$g(u, v) = (u, v, f(u, v))^T,\ (u, v) \in M,$$

tak dostaneme rovnosť $Gr(f) = H(g)$.

Významnou vlastnosťou skalárnych aj vektorových funkcií je ohraničenosť. Hovoríme, že funkcia $f : M \to \mathbb{R}^n,\ M \subset \mathbb{R}^m$; je ohraničená, ak existuje $L \in \mathbb{R}$, pre ktoré $|f(x)| \leq L$ pre všetky $x \in M$.

Aby sme sa ďalej mohli zaoberať pojmami limity a spojitosti funkcie viac premenných, zavedieme niektoré typy množín v priestore $\mathbb{R}^m$.

Pripomeňme si, že $\mathbb{R}^m$ je euklidovský priestor so skalárnym súčinom a normou

$$(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_m y_m, \quad |x| = (x, x)^{1/2}, \quad x,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Geometricky chápeme normu prvku $x \in \mathbb{R}^m$ ako dĺžku vektora $\vec{r} = (x_1, ..., x_m)^T$ alebo vzdialenosť bodu x od bodu $\overline{0} = (0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^m$. Ak $x,\ y \in \mathbb{R}^m$, tak číslo $|x - y|$ je vzdialenosťou bodov $x,\ y$.

Definícia 2.1 *Nech $a \in \mathbb{R}^m,\ \varepsilon > 0$.*

a) Množina

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^m :\ |x - a| < \varepsilon\}$$

sa nazýva ε-okolie bodu a.

b) Množinu $O^o_\varepsilon(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ nazývame deravým okolím bodu a.

Okolie $O_\varepsilon(a)$ je v dvojrozmernom prípade vnútro kruhu a v trojrozmernom prípade vnútro gule so stredom $a \in \mathbb{R}^2$ a polomerom ε. Deravé okolie $O_\varepsilon(a)$ je vnútrom predchádzajúceho kruhu resp. gule s vynechaním stredu a.

Nakoľko sa nebudeme zaoberať pojmami limity a spojitosti v izolovaných bodoch definičného odboru M funkcie f, zavedieme ako kontrast pojem hromadného bodu množiny.

Definícia 2.2 *Bod $a \in \mathbb{R}^m$ nazývame hromadným bodom množiny M, ak pre každé $\varepsilon > 0$ platí $M \cap O^o_\varepsilon(a) \neq \emptyset$.*

Pomocou pojmu okolia bodu zavedieme pojmy limity postupnosti bodov v priestore $\mathbb{R}^m$ a funkcie viac premenných analogicky ako v prípade reálnej (skalárnej) funkcie jednej premennej.

Definícia 2.3 *a) Bod $a \in \mathbb{R}^m$ je limitou postupnosti $\{a_k\} \subset \mathbb{R}^m$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $k_0 \in N$, že $a_k \in O_\varepsilon(a)$ pre všetky $k \geq k_0$. Označenie: $\lim_{k\to\infty} a_k = a$*

b) Nech $a \in \mathbb{R}^m$ je hromadným bodom definičného odboru $M \subset \mathbb{R}^m$ funkcie $f : M \to \mathbb{R}^n$. Bod $b \in \mathbb{R}^n$ je limitou funkcie f v bode a, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou: $f(M \cap O^o_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(b)$ Označenie: $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Limita postupnosti a funkcie má analogické vlastnosti ako v jednorozmernom prípade. Z hľadiska zisťovania existencie resp. neexistencie limity funkcie má veľký význam nasledujúce tvrdenie o limite zúženia $f_{|A}$ funkcie f, ktoré možno dokázať priamo z definície limity.

Tvrdenie 2.4 *Nech $a \in \mathbb{R}^m$ je hromadným bodom množiny $A \subset M \subset \mathbb{R}^m$. Ak $f : M \to \mathbb{R}^n$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, tak $\lim_{x\to a} f_{|A}(x) = b$.*

Príklad 2.5 *Uvažujme funkciu $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$. Bod $\bar{0}$ je hromadným bodom množín $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \{\bar{0}\}$.*

Platí vzťah $f(x,y) = xg(x,y)$, $g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in M$.

Funkcia g je ohraničěná: $|g(x,y)| \leq \frac{1}{2}$. Súčasne $\lim_{(x,y)\to 0} x = 0$ a podľa vety o limite súčinu ohraničenej funkcie a funkcie, ktorej limita v danom bode je rovná nule je

$$\lim_{(x,y)\to\bar{0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Príklad 2.6 *Uvažujme funkciu $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Bod $\bar{0}$ je hromadným bodom množín $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \{\bar{0}\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} :\ x = y\}$. Existujú limity*

$$\lim_{(x,y)\to\bar{0}} f_{|A} = \lim_{x,\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to\bar{0}} f_{|B} = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to\bar{0}} f(x,y)$ neexistuje, pretože limity dvoch rôznych zúžení funkcie f sa nerovnajú.

Limita v predchádzajúcom príklade neexistovala, pretože skúmaná funkcia mala v dvoch rôznych smeroch rôzne limity. Nasledujúci príklad ukazuje, že aj v prípade rovnosti limity v všetkých smeroch, nemusí výsledná limita funkcie existovať.

Príklad 2.7 *Uvažujme funkciu $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$. Bod $\bar{0}$ je hromadným bodom množín*

$$M_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} :\ y = kx\},$$

kde k jeľubovoľné reálne číslo. Zúženie $f_{|M_k}$ má tvar

$$f_{|M_k}(x,y) = \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2},\ x \neq 0.$$

Platia vzťahy

$$\lim_{(x,y)\to\bar{0}} f_{|M_k}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = 0\ \forall k \in \mathbb{R},\ \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

a teda limity vo všetkých smeroch sú rovné nule. Zistime ešte limitu zúženia $f_{|P}$ definovaného na parabole

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} :\ y = x^2\}.$$

Platí

$$\lim_{(x,y)\to\bar{0}} f_{|P}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

z čoho vyplýva neexistencia limity pôvodnej funkcie.

Pomocou limity zavedieme dôležitý pojem spojitosti funkcie. Samotná definícia sa nelíši od známej definície pre reálnu funkciu jednej premennej.

Definícia 2.8 *Nech $a \in M$ je hromadným bodom definičného odboru $M \subset \mathbb{R}^m$ funkcie $f : M \to \mathbb{R}^n$. Funkcia f je spojitá v bode a, ak $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

V ďalšom texte budeme predpokladať, že všetky body definičného oboru funkcie sú jeho hromadné body.

Priamo z definícií limít funkcie a postupnosti vyplývajú nasledujúce dôležité vety udávajúce ďalšie charakteristiky spojitosti funkcie v danom bode.

Veta 2.9 *Funkcia $f : M \to \mathbb{R}^n$ je spojitá v bode $a \in M \subset \mathbb{R}^m$ práve vtedy, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou: $f(M \cap O_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(f(a))$.*

Veta 2.10 *Funkcia $f : M \to \mathbb{R}^n$ je spojitá v bode $a \in M \subset \mathbb{R}^m$, práve vtedy, ak pre každú postupnosť spĺňajúcu*

$$\{a_k\} \subset M, \ \lim_{k\to\infty} a_k = a$$

platí

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = f(a).$$

Prirodzeným spôsobom zavedieme spojitosť funkcie na množine.

Definícia 2.11 *a) Funkcia $f : M \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, ak je spojitá v každom bode $a \in M$.*
b) Funkcia $f : M \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na množine $A \subset M$, ak je spojitá v každom bode $a \in A$.

Príklad 2.12 *Funkcie $p_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $p_k(x) = x_k$, $k = 1, ..., m$ sú spojité.*
Vyplýva to z nerovností $|x_k - a_k| \leq |x - a|$, $k = 1, ..., m$.

Popri zrejmých tvrdeniach o spojitosti funkcie vzniknutej aritmetickými operáciami zo spojitých funkcií, má veľký význam nasledujúca veta o spojitosti zloženej funkcie, ktorú možno dokázať pomocou Vety 2.10.

Veta 2.13 *Nech $h : M \to \mathbb{R}^p$, $M \subset \mathbb{R}^m$, $g : P \to \mathbb{R}^n$, $h(M) \subset P$; sú spojité funkcie. Potom aj zložená funkcia $f = g \circ h : M \to \mathbb{R}^n$ je spojitá.*

Pomocou Príkladu 2.12 a Vety 2.13 je možné dokázať spojitosť zložených funkcií, ktoré vzniknú zo spojitých elementárnych funkcií jednej premennej.

Príklad 2.14 *Uvažujme funkciu*

$$f : M \to R, \ f(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}, \ x+y+z \geq 0.$$

Funkciu vyjadríme v tvare

$$f = g \circ h, \ g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \ g(t) = \sqrt{t};$$
$$h : M \to \mathbb{R}, \ h(x,y,z) = x+y+z, \ M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y+z \geq 0\}.$$

Funkcie $p_k : R^3 \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,3$; $\sqrt{.} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sú spojité. Funkcia $h = p_1 + p_2 + p_3$ je spojitá na svojom definičnom obore $\mathbb{R}^3$ a teda aj na množine M. Potom je aj funkcia $f = g \circ h : M \to \mathbb{R}$ spojitá.

Na záver uvedieme vetu o limite a spojitosti vektorových funkcií, ktorej dôkaz je založený na nerovnostiach $|y_k - b_k| \le |y - b|,\ k = 1, ..., n$ preľubovoľné dvojice bodov $y,\ b \in \mathbb{R}^n$.

Veta 2.15 *Nech* $f : M \to \mathbb{R}^n,\ M \subset \mathbb{R}^m,\ f = (f_1, ..., f_n)^T$.

a) Ak $a \in \mathbb{R}^m$ *je hromadný bod množiny* M, *tak*
$\lim_{x\to a} f(x) = b = (b_1, ..., b_n)^T$ *práve vtedy, keď* $\lim_{x\to a} f_k(x) = b_k$,
$k = 1, ..., n$.

b) Funkcia $f : M \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá (v bode a) práve vtedy, keď funkcie* $f_k : M \to \mathbb{R},\ k = 1, ..., n$ *sú spojité (v bode a).*

3 Viacrozmerný diferenciálny počet

Medzi (vektorovými) funkciami zobrazujúcimi podmnožiny $M \subset \mathbb{R}^m$ do priestoru $\mathbb{R}^n$ významnú úlohu hrajú lineárne zobrazenia. Mnohé mechanické, fyzikálne, chemické zákony majú lineárny charakter, pričom sa často jedná o priblíženie s určitým stupňom presnosti. V prípade reálnej funkcie jednej premennej je geometrickou interpretáciou tohto procesu dotyčnica ku grafu funkcie. V prípade reálnej funkcie dvoch premennej sa jedná o nahradenie grafu funkcie v dostatočne malom okolí daného bodu dotykovou rovinou. Vo všeobecnom prípade nahradzujeme funkciu $f : M \to \mathbb{R}^n, M \subset R^m$ lineárnym zobrazením $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

3.1 Derivácia a diferenciál

Pripomeňme si, že v jednorozmernom prípade je existencia derivácie funkcie $f : (\alpha, \beta) \to R$ v bode a ekvivalentná s jej diferencovateľnosťou v bode a. Znamená to, že prírastok funkčných hodnôt v bode a možno vyjadriť v tvare

$$f(a + x) - f(a) = f'(a)x + r(x),$$

kde $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia spojitá v bode 0 a spĺňajúca konvergenciu $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{|x|} = 0$.

Vo viacrozmernom prípade budeme ďalej predpokladať, že funkcia f je definovaná na otvorenej množine.

Definícia 3.1 *a) Bod* $a \in M$ *sa nazýva vnútorný bod množiny* $M \subset \mathbb{R}^m$, *ak existuje* $\varepsilon > 0$, *pre ktoré* $O_\varepsilon(a) \subset M$.

b)Množina $M \subset \mathbb{R}^m$ *sa nazýva otvorená, ak obsahuje len svoje vnútorné body.*

Definícia 3.2 *Funkcia* $f : M \to \mathbb{R}^n,\ M \subset \mathbb{R}^m$ *je diferencovateľná v bode* $a \in M$, *ak existujú lineárne zobrazenie* $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *a funkcia* $r : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *s vlastnosťami*

$$f(a + x) - f(a) = Lx + r(x),\ x \in \mathbb{R}^m \qquad \lim_{x\to\bar{0}} \frac{r(x)}{|x|} = \bar{0}.$$

Zobrazenie L *sa nazýva derivácia funkcie* f *v bode* $a \in M$ *a označuje sa* $L := f_*(a)$.

Výraz $Df(a, x) = f_*(a)x$ *sa nazýva diferenciál funkcie* f *v bode* a.

Ľahko vidno, že diferencovateľnosť je ekvivalentná aj s vlastnosťou

$$\lim_{x\to\bar{0}} \frac{f(a + x) - f(a) - Lx}{|x|} = \bar{0}.$$

Ako už bolo spomenuté, v prípade $m = n = 1$ je samotná existencia derivácie v bode a ako limity

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ekvivalentná s diferencovateľnosťou a platí $Lx = f'(a)x = Df(a,x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Ako je známe z lineárnej algebry, v prípadeľubovoľných $m,\ n \in \mathbb{N}$ a lineárneho zobrazenia $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ existuje práve jedna matica $[L] = (l_{ij})$ typu $n \times m$, pre ktorú $Lx = [L]x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^m$. Píšeme tiež priamo $L = [L]$.

Odvodíme tvar matice $[L]$.

Ak $m = 1, n > 1$, tak diferencovateľnosť funkcie $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n,\ f = (f_1, ..., f_n)^T$ v bode $a \in (\alpha, \beta)$ je ekvivalentná s diferencovateľnosťou jej zložiek f_i v bode a a derivácia má tvar

$$f_*(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ . \\ . \\ . \\ f_n'(a) \end{pmatrix}.$$

3.2 Parciálne derivácie

Nech ďalej $m > 1,\ n = 1$. Ak funkcia $f : M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}^m$ je diferencovateľná v bode $a \in M$, tak derivácia $f_*(a)$ je reprezentovaná riadkovým vektorom

$$[f_*(a)] = (l_1, ..., l_m).$$

Z definície derivácie dostávame

$$\lim_{x \to \bar{0}} \frac{f(a+x) - f(a) - f_*(a)x}{|x|} = \lim_{x \to \bar{0}} \frac{f(a+x) - f(a) - l_1x_1 - ...l_mx_m}{|x|} = 0.$$

Aby sme získali tvar koeficientov, budeme uvažovať limity zúžené na jednotlivé súradné osi. Dostávame tak rovnosti

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_m) - f(a_1, ..., a_m) - l_i t}{|t|} = 0,$$

alebo ekvivalentne

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_m) - f(a_1, ..., a_m)}{t} = l_i,\ i = 1, ..., m.$$

Pre každé $i = 1, ..., m$ nazývame číslo l_i parciálnou deriváciou funkcie f podľa premennej x_i v bode a a označujeme

$$l_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),\ i = 1, ..., m.$$

Porovnaním s definíciou derivácie funkcie jednej premennej dostaneme nasledujúcu definíciu parciálnej derivácie, z ktorej vidno aj spôsob jej výpočtu.

Definícia 3.3 *Nech $f : M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}^m,\ a = (a_1, ..., a_m)^T \in M$.*

a) Ak existuje derivácia $\varphi_i'(a_i)$ funkcie

$$\varphi_i : (a_i - \delta, a_i + \delta) \to R,\ \delta > 0,\ \varphi_i(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_m),$$

tak číslo $\varphi_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ nazývame parciálnou deriváciou funkcie f podľa premennej x_i, i=1,…,m; v bode a.

b) Ak existuje $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ v každom bode $a \in M$, tak funkciu $\frac{\partial f}{\partial x_i} : M \to \mathbb{R}$ nazývame parciálnou deriváciou funkcie f podľa premennej $x_i,\ i = 1, ..., m$.

Poznámka 3.4 *V prípade funkcie dvoch resp. troch premenných* $x,\ y,\ z$ *označujeme* $\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}$ *parciíalne derivácie podľa premenných* $x,\ y,\ z$.

Príklad 3.5 *Nájdime parciálne derivácie v bode* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *a parciálne derivácie funkcie*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

a) Ak $(a,b)\neq(0,0)$*, tak*

$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}(a,b)=\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+b^2}(a)=\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}(a)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}(a,b)=\frac{d}{dy}\sqrt{a^2+y^2}(b)=\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}(b)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b) Parciálne derivácie podľa x *aj* y *neexistujú v bode* $(0,0)$*. Skutočne,* $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ *neexistuje, pretože* $\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=-1,\ lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=1.$ *Analogický výsledok dostaneme aj pre parciálnu deriváciu podľa premennej* y*.*

c) Súčasne dostávame

$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y)\neq(0,0).$$

Pri výpočte parciálnych derivácii funkcie viac premenných považujeme premenné, podľa ktorých nederivujeme za konštanty a postupujeme ako pri výpočte derivácii funkcie jednej premennej.

Príklad 3.6 *Nájdime parciálne deriv'acie podľa všetkých premenných funkcie* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\sin(x+y^2+z^3)$.

Riešenie:
$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos(x+y^2+z^3),\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y\cos(x+y^2+z^3),\frac{\partial f}{\partial z}=3z^2\cos(x+y^2+z^3).$

3.3 Rovnica dotykovej roviny

Nech existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ funkcie $f:M\to\mathbb{R},\ (a,b)\in M\subset\mathbb{R}^2$. Platia implikácie $Gr(f(\cdot,b))\subset Gr(f),\ Gr(f(a,\cdot))\subset Gr(f)$, kde $Gr(f(\cdot,b)),\ Gr(f(a,\cdot))$ sú grafy funkcií $x\to f(x,b),\ y\to f(a,y)$. Dotyčnice ku krivkám $z=f(x,b),\ z=f(a,y)$ v bode (a,b) majú na základe definície parciálnych derivácii rovnice

$$y=b,\ z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a);$$
$$x=a,\ z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Smerové vektory $\vec{p}=(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)),\ \vec{q}=(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b))$ oboch dotyčníc sú lineárne nezávislé a spolu s bodom $T=(a,b,f(a,b))$ jednoznačne určujú dotykovú rovinu τ ku grafu $Gr(f)$ funkcie f v bode T. Rovina τ má rovnicu

$$z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Vektor

$$\vec{n}=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b),-1\Big)$$

je normálovým (kolmým) vektorom k dotykovej rovine τ.

Príklad 3.7 *Nájdime rovnicu dotykovej roviny a normálového vektora ku grafu funkcie* $f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{1}{xy}$ *v bode* $T = (1, 2, \frac{1}{2})$.

Parciálne derivácie funkcie f *v bode* $(1,2)$ *sú*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{1}{x^2 y}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{1}{2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{1}{xy^2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dotyková rovina v bode T *má potom rovnicu*

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2)$$

a po úprave

$$2x + y - 4z + 6 = 0.$$

Normálový vektor k dotykovej rovine je

$$\vec{n} = (2, 1, -4).$$

3.4 Vlastnosti diferencovateľných funkcií

Rovnakým postupom ako v prípade reálnej funkcie viac premenných možno odvodiť maticový tvar derivácie funkcie $f : M \to \mathbb{R}^n,\ M \subset \mathbb{R}^m$.

Veta 3.8 *Nech* $f : M \to \mathbb{R}^n,\ M \subset \mathbb{R}^n,\ f = (f_1, ..., f_n)$ *je diferencovateľná v bode* $a \in M$. *Potom existujú parciálne derivácie* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : M \to \mathbb{R}^n,\ i = 1, ..., n; j = 1, ..., m$ *a matica derivácie* $f_*(a)$ *má tvar*

$$[f_*(a)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a), & \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Priamo z definície derivácie a jej maticového vyjadrenia vyplýva spojitosť diferencovateľnej funkcie:

Veta 3.9 *Ak funkcia* $f : M \to \mathbb{R}^n,\ M \subset \mathbb{R}^m$ *je diferencovateľná v bode* $a \in M$, *tak je v tom bode spojitá.*

Na základe predchádzajúcich viet je nutnou podmienkou diferencovateľnosti funkcie v bode a jej spojitosť a existencia všetkých parciálnych derivácii každej zložky v bode a. Nasledujúci príklad potvrdzuje, že uvedené podmienky nie sú postačujúce.

Príklad 3.10 *Zistime, či funkcia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ *je diferencovateľná v bode* $(0,0)$.

Riešenie:

Funkcia f *je spojitá v bode* $(0,0)$ *a* $f(0,0) = 0$. *Platia vzťahy*

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ &\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ &f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) = \sqrt{|xy|} = r(x,y), \end{aligned}$$

Funkcia f je diferencovateľná práve vtedy keď $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{|(x,y)|} = 0$.

V našom prípade $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *neexistuje, pretože*

$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x0|}}{\sqrt{x^2+0^2}} = 0,\ \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xx|}}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
a teda funkcia f nie je diferencovateľná v bode $(0,0)$.

Nasledujúca veta, ktorej dôkaz možno nájsť v literatúre (J. Brabec, B. Hrůza: Matematická analýza II, SNTL-ALFA, Praha 1986, J.Moravčík, J.Moravský, R.Šulka: Matematická analýza 2, ALFA, Bratislava 1988.), uvádza postačujúcu podmienku diferencovateľnosti.

Veta 3.11 *Nech funkcia $f : M \to \mathbb{R}^n,\ M \subset \mathbb{R}^m,$ má v niektorom okolí bodu $a \in M$ parciálne derivácie všetkých zložiek podľa všetkých premenných a spojité v bode a. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode a.*

Poznámka 3.12 *Ak existujú a sú spojité všetky parciálne derivácie z predchádzajúcej vety na celom definičnom obore M funkcie f, tak je funkcia f diferencovateľná v každom bode $a \in M$ a v tomto prípade ju nazývame spojite diferencovateľnou. Symbolom $\mathcal{C}^1(M)$ označujeme množinu všetkých spojite diferencovateľných funkcií na množine M. Zrejme $\mathcal{C}^1(M) \subset \mathcal{C}(M)$, kde $\mathcal{C}(M)$ je množina všetkých spojitých funkcií na množine M.*

3.5 Derivácia zloženej funkcie a derivácia v smere

Uvažujme zloženú funkciu $f = g \circ h : M \to \mathbb{R}^n,\ M \subset \mathbb{R}^m$, skladajúcu sa z funkcií $h : M \to \mathbb{R}^p,\ g : P \to \mathbb{R}^n,\ h(M) \subset P \subset \mathbb{R}^p$. Veta 2.13 obsahovala tvrdenie o spojitosti funkcie f za predpokladu spojitosti funkcií $g,\ h$. Teraz sa budeme zaoberať diferencovateľnosťou funkcie f v závislosti na diferencovateľnosti funkcií $f,\ g$. V jednorozmernom prípade ($m = n = 1$) platí dôležité pravidlo o derivovaní zloženej funkcie v tvare

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x),\ x \in M.$$

Ak nahradíme súčin reálnych čísel z množiny $\mathbb{R}$ súčinom (skladaním) lineárnych zobrazení, dostaneme priamo z definície derivácie vektorovej funkcie nasledujúce pravidlo o derivovan'i zložených vektorových funkcií.

Veta 3.13 *Nech funkcie $h : M \to \mathbb{R}^p$ resp. $g : P \to \mathbb{R}^n,\ h(M) \subset P \subset \mathbb{R}^p$ sú diferencovateľné v bodoch $a \in M$ resp. $b = h(a) \in P$. Potom je funkcia $f = g \circ h : M \to \mathbb{R}^n$ diferencovateľná v bode a, pričom derivácie funkcií $f,\ g,\ h$ spĺňajú vzťah*

$$f_*(a) = g_*(h(a)) \circ h_*(a).$$

Ako je známe z lineárnej algebry súčin $A \circ B$ lineárnych zobrazení $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n,\ B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ je reprezentovaný súčinom $[A] \cdot [B]$ matíc $[A]$ typu $n \times p$ a $[B]$ typu $p \times m$. Použitím Vety 2.8 o vzťahu derivácie vektorovej funkcie a parciálnych derivácii dostaneme nasledujúce vyjadrenie matice derivácie zloženej funkcie f pomocou matíc parciálnych derivácii funkcií $g,\ h$:

$$[f_*(a)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(h(a)), & \dots, & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(h(a)) \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(h(a)), & \dots, & \frac{\partial g_n}{\partial y_p}(h(a)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial h_1}{\partial x_m}(a) \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial h_p}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Súčasne dostávame vyjadrenie parciálnych derivácii funkcie f v tvare

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g_j}{\partial y_i}(h(a)) \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(a), \ j = 1, ..., n; \ k = 1, ..., m.$$

Ako dôsledok dostaneme dôležité z hľadiska praktického použitia "reťazové" pravidlo na výpočet parciálnych derivácii skalárnej funkcie viac premenných.

Dôsledok 3.14 *(Reťazové pravidlo) Nech $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^m$, $f = g \circ h$, $h : M \to \mathbb{R}^p$, $g : P \to \mathbb{R}$, $h(M) \subset P$. Ak funkcie g, h sú spojite diferencovateľné, tak aj funkcia f je spojite diferencovateľná a platí vzťah*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g_j}{\partial y_i}(h(x)) \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(x), \ j = 1, ..., n; \ k = 1, ..., m, \ x \in M.$$

Príklad 3.15 *Nech je daná funkcia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Nájdime parciálne derivácie funkcie f podľa všetkých premenných.*

Riešenie:
Funkciu f vyjadríme v tvare $f = g \circ h$, $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{t}$. Funkcia g je spojite diferencovateľná na množine $P = (0, \infty)$. Funkcia h je spojite diferencovateľná a platí $h(M) \subset P$, kde $M = \mathbb{R} \setminus \overline{0}$. Funkcia f je potom spojite diferencovateľná na množine M a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(h(x, y, z)) \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ (x, y, z) \neq \overline{0},$$

Podobne

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ (x, y, z) \neq \overline{0}.$$

Parciálne derivácie skalárnej funkcie f vyjadrujú zmeny hodnôt tejto funkcie v smere jednotlivých súradných osí. Často nás zaujíma aj chovanie funkcie v iných smeroch. Napríklad zmena teploty telesa v niektorom smere a pod. Preto je užitočné zaviesť deriváciu funkcie v smere ľubovoľného jednotkového vektora. Definujeme ju pomocou zloženej funkcie jednej premennej.

Definícia 3.16 *Nech $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^m$, $a \in M$, $\vec{e} \in \mathbb{R}^m$, $|\vec{e}| = 1$.*
Ak existuje derivácia

$$\frac{d}{dt} f(a + t\vec{e})(0),$$

tak ju nazývame deriváciou funkcie f v smere $\vec{e}$ v bode a a označujeme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a).$$

Skôr ako prejdeme k výpočtu derivácie v smere, zavedieme pre diferencovateľnú funkciu $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^m$ vektorovú funkciu

$$\mathrm{grad} f : M \to \mathbb{R}^m, \ \mathrm{grad} f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_m}).$$

Porovnaním s definíciou derivácie skalárnej a vektorovej funkcie v bode
$a \in M$ vidíme, že riadkový vektor $\mathrm{grad} f(a)$ je jednoriadkovou maticou lineárneho zobrazenia $f_*(a)$: $\mathrm{grad} f(a) = [f_*(a)]$. Namiesto symbolu grad používame aj symbol ∇ a môžeme ho chápať aj ako lineárny operátor grad : $\mathcal{C}^1(M) \to [\mathcal{C}(M)]^m$, kde $\mathcal{C}^1(M)$ je priestor spojite diferencovarených skalárnych funkcií a $[\mathcal{C}(M)]^m$ je priestor spojitých vektorových polí na množine M.

Príklad 3.17 *Nech* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *Potom podľa Príkladu 3.15 je*

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f(x,y,z) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},\ \vec{r} = (x,y,z) \neq \overline{0}. \end{aligned}$$

Vráťme sa teraz k derivácii v smere. Pomoocou gradientu funkcie dostaneme jej nasledujúce vyjadrenie.

Veta 3.18 *Nech* $f : M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}^m$ *je spojite diferencovateľná funkcia. Potom existuje derivácia v smere ľubovoľného jednotkového vektora*
$\vec{e} = (e_1, ..., e_m)^T$ *v každom bode* $a \in M$ *a platí vzťah*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i = \mathrm{grad} f(a) \cdot \vec{e}.$$

Dôkaz. Bod a je vnútorným bodom množiny M. Potom existuje $\delta > 0$ a spojite diferencovateľná funkcia

$$\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = f(a + t\vec{e}) = f(a_1 + te_1, ..., a_m + te_m),\ \varphi(0) = f(a).$$

Podľa definície derivácie v smere vektora $\vec{e}$ a reťazového pravidla pre parciálne derivácie zloženej funkcie existuje

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a) = \varphi'(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i = \mathrm{grad} f(a) \cdot \vec{e},$$

čím je dôkaz vety skončený.

Príklad 3.19 *Nájdime deriváciu funkcie* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *v smere vektora* $\vec{e} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ *v bode* $a = (1,1,1)$.

Riešenie:

Podľa Príkladu 3.17
$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,1,1) = \frac{1}{|(1,1,1)|}(1,1,1) \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}.$

Poznámka 3.20 *Na základe Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti* $|\vec{b} \cdot \vec{e}| \leq |\vec{b}||\vec{e}|$ *platnej preľubovoľné vektory* $\vec{b},\ \vec{e} \in \mathbb{R}^m$. *dostaneme pre deriváciu diferencovateľnej funkcie* f *v smereľubovoľného jednotkového vektora* $\vec{e}$ *odhad*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a)\right| \leq |\mathrm{grad} f(a)|.$$

Predpokladajme, že $\mathrm{grad} f(a) \neq \overline{0}$. *Ak zvolíme* $\vec{e} = \frac{\mathrm{grad} f(a)}{|\mathrm{grad} f(a)|}$, *tak*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a) = |\mathrm{grad} f(a)|.$$

Tento výsledok znamená, že zo všetkých smerov je derivácia a teda aj kladná zmena funkcie v smere $\vec{e} = \frac{\mathrm{grad} f(a)}{|\mathrm{grad} f(a)|}$ *v bode* a *najväčšia. Naopak najväčšia záporná zmena je v smere* $\vec{e} = -\frac{\mathrm{grad} f(a)}{|\mathrm{grad} f(a)|}$

Pomocou gradientu funkcie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ odvodíme rovnicu dotykovej roviny k ploche σ určenej rovnicou

$$\sigma :\ f(x,y,z) = C.$$

Nech $K \subset \sigma$ jeľubovoľná krivka ležiaca v ploche σ vyjadrená funkciou

$$g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3, \ -\infty < \alpha < \beta < \infty.$$

Znamená to, že

$$K = g([\alpha, \beta]), \ f(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) = 0, \ \alpha \leq t \leq \beta.$$

Nech

$$a = (a_1, a_2, a_3) \in K, \ g(t_0) = a, \ \alpha < t_0 < \beta.$$

Použitím reťazového pravidla pri derivovaní zloženej funkcie $f \circ g$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) g_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) g_2'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(a) g_3'(t_0) = \text{grad} f(a) \cdot g'(t_0) = 0$$

Teda vektor grad$f(a)$ je kolmý naľubovoľný vektor ležiaci v dotykovej rovine τ k ploche σ. Rovnica dotykovej roviny má potom tvar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z - a_3) = 0.$$

Príklad 3.21 *Odvoďme rovnicu dotykovej roviny k elipsoidu*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ a > 0, \ b > 0, \ c > 0$$

v bode (x_0, y_0, z_0).

Rovnica má tvar

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

a pretože bod (x_0, y_0, z_0) *sa nachádza na elipsoide, môžeme ju vyjadriť aj v tvare*

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

3.6 Parciálne derivácie vyšších rádov

Budeme sa zaoberať skalárnými funkciami $f : M \to \mathbb{R}, \ M \subset \mathbb{R}^m$. Ak existuje parciálna derivácia $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, podľa niektorej premennej $x_i, \ i = 1, ..., m$, je prirodzenou otázka existencie parciálnej derivácie tejto funkcie podľa premennej x_j v niektorom, prípadne vo všetkých bodoch $a \in M$. Dostávame sa tak k parciálnym deriváciam vyšších rádov, ktoré majú uplatnenie pri aproximácii a extrémoch funkcií viac premenných ako aj pri matematickom modelovaní v prírodných a ekonomických vedách.

Definícia 3.22 *Nech existuje parciálna derivácia* $\frac{\partial f}{\partial x_i} : M \to \mathbb{R}, \ i \in \{1, ..., m\}$ *funkcie* $f : M \to \mathbb{R}, \ M \subset \mathbb{R}^m$. *Ak existuje parciálna derivácia* $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, *nazývame ju parciálnou deriváciou druhého rádu funkcie* f *podľa* $x_i, \ x_j$
(v tomto poradí) v bode a *a označujeme* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, *alebo skrátene* $f_{,ij}^{(2)}(a)$.

Ak existuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ *v každom bode* $a \in M$, *tak funkciu* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : M \to \mathbb{R}$ *nazývame parciálnou deriváciou druhého rádu funkcie* f *podľa* $x_i, \ x_j$.

Ak $i = j$, *tak píšeme* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Hodnota parciálnej derivácie druhého rádu podľa rôznych premenných $x_i, \ x_j$ v bode a závisí od poradia derivovania. Podľa nasledujúcej vety, ktorú uvedieme bez dôkazu, v prípade spojitej druhej derivácie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ môžeme poradie derivovania zamieňať.

Veta 3.23 *Nech $a \in M \subset \mathbb{R}^m$, $f : M \to \mathbb{R}$. Ak existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ v niektorom okolí $O_\delta(a)$ bodu a a parciálna derivácia druhého rádu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je spojitá v bode a, tak existuje aj parciálna derivácia $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Prirodzeným spôsobom je možné zaviesť aj parciálne derivácie tretích a vyšších parciálnych derivácii. Označenie: $\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_j}} = f,^{(j)}_{i_1,...,i_j}$.

Je zrejmé, že v prípade, že všetky parciálne derivácie sú spojité, môžeme poradie derivovania zamieňať. Symbolom $\mathcal{C}^k(M)$ označíme množinu všetkých k-krát spojite diferencovateľných funkcií $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^m$ t.j. funkcií so všetkými spojitými parciálnymi deriváciami do rádu k v každom bode množiny M.

Pripomeňme si, že pre funkciu $f \in \mathcal{C}^1(M)$ definujeme diferenciál funkcie f v bode $a \in M$ výrazom $Df(a, x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) x_i = \text{grad} f(a) \cdot x$, $x \in \mathbb{R}^m$. Pomocou parciálnych derivácii vyšších rádov definujeme vyššie diferenciály.

Definícia 3.24 *Nech $f \in \mathcal{C}^k(M)$, $a \in M$. Potom výraz*

$$D^j f(a, x) = \sum_{i_1,...,i_j}^m f,^{(j)}_{i_1,...,i_j}(a) x_{i_1} ... x_{i_j}, \ x \in \mathbb{R}^m$$

je j-ty diferenciál funkcie f v bode a.

Symbolicky m$\not{o}$žeme vyjadriť j-ty diferenciál v tvare

$$D^j f(a, x) = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^j f(a).$$

Príklad 3.25 *Určme druhý diferenciál v bode $a = (1, 1)$ funkcie*

$$f : M \to \mathbb{R}, \ f(x, y) = \ln(x + 2y), \ M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + 2y > 0\}.$$

Riešenie:
Parciálne derivácie na množine M sú dané vzorcami

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + 2y}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x + 2y},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + 2y)^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{2}{(x + 2y)^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{4}{(x + 2y)^2}.$$

Parciálne derivácie druhého rádu majú v bode $(1, 1)$ hodnoty

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = -\frac{1}{9}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = -\frac{2}{9}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = -\frac{4}{9}$$

a druhý diferenciál má tvar

$$D^2(f, a) = -\frac{1}{9} x^2 - \frac{4}{9} xy - \frac{4}{9} y^2, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pomocou vyšších diferenciálov vyjadríme Taylorov polynóm funkcie viac premenných a odvodíme Taylorov vzorec vyjadrujúci aproximáciu funkcie polynómom k-teho stupňa. Jedná sa o zovšeobecnenie známych výsledkov pre funkciu jednej premennej.

Definícia 3.26 *Nech* $f \in \mathcal{C}^k(M),\ a \in M,\ .$ *Potom výraz*

$$T_k(a,x) = f(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} D^j f(a,x),\ x \in \mathbb{R}^m$$

sa nazýva Taylorov polynóm k-teho stupňa funkcie f *v bode* a*.*

Veta 3.27 *(Taylorova). Nech* $f \in \mathcal{C}^{k+1}(M),\ a \in M.$ *Potom*

$$f(a+x) = T_k(a,x) + R_k(a,x)$$

pre všetky x*, pre ktoré* $a + x \in M$*, pričom*

$$R_k(a,x) = \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(a + \vartheta_x x, x),\ \vartheta_x \in (0,1).$$

Dôkaz. Definujme funkciu jednej premennej

$$\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R},\ \alpha < 0,\ \beta > 1,\ \varphi(t) = f(a + tx).$$

Zrejme $\varphi(0) = f(a),\ \varphi(1) = f(x)$. Aplikáciou Taylorovej vety pre funkciu jednej premennej dostaneme vzťah

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\vartheta)}{(k+1)!},\ \vartheta \equiv \vartheta_x \in (0,1).$$

Použitím reťazového pravidla pre parciálnu deriváciu zloženej funkcie dostaneme vzťah

$$\varphi'(0) = Df(a,x)$$

a jeho viacnásobným použitím

$$\varphi^{(j)}(0) = D^j f(a,x),\ j = 1, ..., k;\ \varphi^{(k+1)}(\vartheta_x) = D^{k+1} f(a + \vartheta_x x, x),$$

čím je dôkaz vety skončený.

4 Extrémy funkcií

Pomocou parciálnych derivácii budeme vyšetrovať dô ležitú kvalitatívnu charakteristiku skalárnych funkcií viac premenných, ich maximálnu a minimálnu hodnotu v určitom okolí bodov, ako aj na danej množine.

4.1 Lokálne extrémy.

Pripomíname, že sa zaoberáme funkciami definovanými na otvorenej množine M t.j. obsahujúcej len vnútorné body.

Definícia 4.1 *Funkcia* $f : M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}^m$ *nadobúda v bode* $a \in M$ *lokálne maximum (minimum), ak existuje také okolie* $O(a) \subset M$ *bodu* a*, že* $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a)$ $)$ *pre všetky body* $x \in O(a)$*.*

Ak $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a)$ $)$ *pre všetky body* $x \in O(a),\ x \neq a$*, tak funkcia* f *nadobúda v bode* a *ostré lokálne maximum (minimum).*

Lokálne maximum, alebo minimum funkcie nazývame aj lokálnym extrémom. Ako je známe z teórie funkcií jednej premennej, ak diferencovateľná reálna funkcia f jednej premennej nadobúda lokálny extrém v bode a, tak $f'(a) = 0$. Pretože parciálne derivácie funkcie viac premenných sú definované ako derivácie funkcií jednej premennej definovaných na jednotlivých súradných osiach, uvedená nutná podmienka existencie lokálneho extrému ša lahko prenesie aj na funkcie viac premenných.

Veta 4.2 *(Nutná podmienka extrému)*
Nech funkcia $f : M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}^m$ *má v bode* a *lokálny extrém. Ak existujú parciálne derivácie* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a),\ i = 1, ..., m,$ *tak*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0,\ i = 1, ..., m,$$

Dôkaz. Definujme pre pevné $i \in \{1, ..., m\}$ a dostatočne malé $\delta > 0$ funkciu

$$\varphi_i : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R},\ \varphi_i(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i-1}, ..., a_m).$$

Podľa definície parciálnej derivácie v bode a je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \varphi_i'(0).$$

Pretože funkcia f nadobúda v bode a lokálny extrém, nadobúda lokálny extrém aj funkcia φ_i v bode 0, pre ktorú $\varphi_i(0) = f(a)$ a $\varphi_i = f_{|M_i}$ - zúženie funkcie f na množinu

$$M_i = \{x \in M :\ x = a + t\vec{e}_i,\ t \in (-\delta, \delta)\},$$

kde $\vec{e}_i$ jednotkový vektor s jednotkovou i-tou súradnicou. Potom $\varphi_i'(0) = 0$ a teda aj $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0,\ i = 1, ..., m$, čím je dôkaz vety skončený.

Definícia 4.3 *Bod* $a \in M$ *sa nazýva stacionárny bod funkcie* $f : M \to \mathbb{R}$, *ak v ňom existujú všetky parciálne derivácie funkcie* f *a sú rovné nule t.j.* $\mathrm{grad} f(a) = \overline{0}$.

Ak má funkcia f v bode a lokálny extrém, tak aj derivácia v smere $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = 0$ v prípade ľubovoľného jednotkového vektora $\vec{e}$. Pri hľadaní bodov lokálnych extrémov funkcie vychádzame z jej stacionárnych bodov a zisťujeme splnenie ďalších už postačujúcich podmienok pre lokálne maximum, alebo minimum. Používame pritom druhý diferenciál a teda parciálne derivácie druhého rádu. Rozhodujúcu úlohu hrá znamienko druhého diferenciálu, ktorý je kvadratickou formou v priestore $\mathbb{R}^m$.

Pripomeňme si, že kvadratickou formou v priestore $\mathbb{R}^m$ nazývame funkciu $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tvaru

$$\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j,\ a_{ij} \in \mathbb{R},\ a_{ij} = a_{ji},\ i, j \in \{1, ..., m\}.$$

Definícia 4.4 *Kvadratická forma* $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *sa nazýva*
a) kladne definitná, ak $\varphi(x) > 0$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}^m,\ x \neq \overline{0}$,
b) záporne definitná, ak $\varphi(x) < 0$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}^m,\ x \neq \overline{0}$,
c)kladne semidefinitná, ak $\varphi(x) \geq 0$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}^m$,
d)záporne semidefinitná, ak $\varphi(x) \leq 0$ *pre všetky* $x \in \mathbb{R}^m$,
e) indefinitná, ak existujú body $y,\ z \in \mathbb{R}^m$, *pre ktoré* $\varphi(y) < 0,\ \varphi(z) > 0$.

Nasledujúca veta z lineárnej algebry prináša kritérium rozpoznávania charakteru kvadratickej formy.

Veta 4.5 *(Sylvestrovo kritérium)*
Nech φ je kvadratická forma definovaná predpisom

$$\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_i x_j,\ a_{ij} = a_{ji},\ i,j \in \{1,...,m\}.$$

Označme $\triangle_k$ determinanty

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} a_{11},\ a_{12},\ ...,\ a_{1k} \\ a_{21},\ a_{22},\ ...,\ a_{2k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1},\ a_{k2},\ ...,\ a_{kk} \end{vmatrix},\ k = 1,...,m.$$

Potom platí: Forma φ je kladne definitná práve vtedy, keď $\triangle_k > 0,\ k = 1,...,m;$ záporne definitná, práve vtedy keď $(-1)^k\triangle_k > 0,\ k = 1,...,m.$ Ak $\triangle_m \neq 0$ a kvadratická forma φ nie je definitná, tak je indefinitná.

Pomocou definitnosti kvadratickej formy vyslovíme postačujúcu podmienku existencie lokálnych extrémov.

Veta 4.6 *Nech funkcia $f : M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}^m$ je dvakrát spojite diferencovateľná v bode $a \in M$ a nech $\operatorname{grad} f(a) = \overline{0}$. Ak je kvadratická forma $x \to D^2f(a,x)$ kladne definitná, tak funkcia f má v bode a ostré lokálne minimum; ak je záporne definitná, má f v bode a ostré lokálne maximum; ak je indefinitná, funkcia f nemá v bode a lokálny extrém.*

Dôkaz. Na základe Taylorovej vety vyjadríme funkciu f v okolí bodu a v tvare

$$f(a+x) = f(a) + \frac{1}{2}D^2f(a + \vartheta_x x, x),\ 0 < \vartheta_x < 1.$$

Ak je kvadratická forma $x \to D^2f(a,x)$ kladne definitná, tak na základe spojitosti všetkých parciálnych derivácii druhého rádu, dostaneme nerovnosť

$$D^2f(a + \vartheta_x x, x) > 0,\ x \in O_\delta(\overline{0})$$

pre niektoré dostatoćne malé číslo $\delta > 0.$, z ktorej vyplýva nerovnosť

$$f(a+x) > f(a)\ \forall x \in O_\delta(\overline{0})$$

a teda v bode a nastáva ostré lokálne minimum.

Podobne dokážeme aj postačujúcu podmienku ostrého lokálneho maxima ako aj podmienku neexistencie lokálneho extrému.

Priamou aplikáciou Sylvestrovho kritéria na zistenie definitnosti kvadratickej formy $x \to D^2f(a,x)$ dostaneme postačujúcu podmienku lokálnych extrémov vyjadrenú pomocou parciálnych derivácii druhého rádu.

Veta 4.7 *Nech funkcia $f : M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}^m$ je dvakrát spojite diferencovateňá v bode $a \in M$ a nech $\operatorname{grad} f(a) = \overline{0}$. Označme $D_k(a)$ determinanty*

$$D_k(a) = \begin{vmatrix} f_{,11}^{(2)}(a),\ f_{,12}^{(2)}(a),\ ...,\ f_{,1k}^{(2)}(a) \\ f_{,21}^{(2)}(a),\ f_{,22}^{(2)}(a),\ ...,\ f_{,2k}^{(2)}(a) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{,k1}^{(2)}(a),\ f_{,k2}^{(2)}(a),\ ...,\ f_{,kk}^{(2)}(a) \end{vmatrix},\ k = 1,...,m.$$

Potom platí:

a) Ak $D_k(a) > 0,\ k = 1, ..., m;$ *tak funkcia* f *má v bode* a *ostré lokálne minimum.*

b) Ak $(-1)^k D_k(a) > 0,\ k = 1, ..., m;$ *tak funkcia* f *má v bode* a *ostré lokálne maximum.*

c) Ak $D_m(a) \neq 0$ *a neplatia prípady a), b), tak funkcia* f *nemá v bode* a *lokálny extrém.*

Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie viac premenných postupujeme podľa predchádzajúcej vety.
a) Nájdeme najprv všetky stacionárne body $a_1, ..., a_r$ funkcie spĺňajúce nutnú podmienku existencie lokálneho extrému.
b) Vypočítame hodnoty všetkých parciálnych derivácii druhého rádu v stacionárnych bodoch.
c) Vypočítame hodnoty determinantov $D_k(a_j)$, $k = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, r$.
d) Určíme charakter lokálnych extrémov podľa znamienok determinantov $D_k(a_j)$, $k = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, r$.

Príklad 4.8 *Nájdime lokálne extrémy funkcie* f *danej predpisom*
$f(x, y) = x^3 + y^2 + xy - x^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

Riešenie:

a) Stacionárne body sú riešením algebraického systému rovníc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x + y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y = 0.$$

Systém má dve riešenia - stacionárne body $a = (0, 0),\ b = (\frac{5}{6}, -\frac{5}{12})$.
b) Parciálne derivácie druhého rádu funkcie f *sú*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

c) Lokálne extrémy určíme podľa hodnôt determinantov v stacionárnych bodoch:

$$D_1(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -2,$$
$$D_2(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) - [\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)]^2 = -5$$

V bode $a = (0, 0)$ *nenastáva extrém, pretože oba determinanty sú záporné.*

$$D_1(b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{5}{6}, -\frac{5}{12}) = 3 > 0,$$
$$D_2(b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{5}{6}, -\frac{5}{12})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{5}{6}, -\frac{5}{12}) - [\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{5}{6}, -\frac{5}{12})]^2 = 5$$

V bode $b = (\frac{5}{6}, -\frac{5}{12})$ *nastáva ostré lokálne minimum, pretože oba determinanty sú kladné.*

Poznámka 4.9 *V predchádzajúcom príklade mali parciálne derivácie druhého rádu v bode* $(0, 0)$ *opačné znamienko. V tomto prípade hovoríme, že funkcia* f *má v stacionárnom bode* $a = (0, 0)$ *sedlový bod, charakterizovaný tým, že funkcia* f *zúžená na os* $\mathcal{O}_x$ *v ňom dosahuje maximum a na os* $\mathcal{O}_y$ *minimum.*

Príklad 4.10 *Nájdime lokálne extrémy funkcie* f *danej predpisom*
$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

Riešenie:
a) Stacionárne body sú riešením algebraického systému rovníc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 12y = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 12x + 2y = 0, \\
\partial f \partial z &= 2z + 2 = 0
\end{aligned}$$

Systém má dve riešenia — stacionárne body $a = (0,0,1)$*,* $b = (24, -144, -1)$*.*
b) Parciálne derivácie druhého rádu funkcie f *sú*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.
\end{aligned}$$

c) Lokálne extrémy určíme podľa hodnôt determinantov v stacionárnych bodoch:

$$\begin{aligned}
D_1(a) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,1) = 0, \\
D_2(a) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,1) - [\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,1)]^2 = -144 \\
D_3(a) &= 2D_2(a) = -288
\end{aligned}$$

V bode $a = (0,0,1)$ *nenastáva extrém, pretože determinanty* $D_2(a)$*,* $D_3(a)$ *sú záporné.*

$$\begin{aligned}
D_1(b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(24,-144,-1) = 144 > 0, \\
D_2(b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(24,-144,-1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(24,-144,-1) - \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(24,-144,-1)\Big]^2 = 144 \cdot 2 - 12^2 = 144 > 0, \\
D_3(b) &= 2 \cdot D_2(b) = 288 > 0\,.
\end{aligned}$$

V bode $b = (\frac{5}{6}, -\frac{5}{12})$ *nastáva lokálne minimum, pretože všetky determinanty sú kladné.*

4.2 Globálne extrémy

Budeme sa zaoberať podmienkami existencie a metódou hľadania maxima a minima funkcie $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^m$ na celej množine M.

Definícia 4.11 *Funkcia* $f : M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}^m$ *nadobúda v bode* $a \in M$ *maximum (minimum), ak* $f(x) \le f(a)$ $(f(x) \ge f(a))$ *pre všetky body* $x \in M$*.*

Ako je známe, spojitá reálna funkcia jednej premennej nadobúda na každom uzavretom intervale maximum aj minimum. V prípade funkcie viac premenných platí analogické tvrdenie v prípade ohraničených uzavretých množín.

Definícia 4.12 *Množina* $M \subset \mathbb{R}^m$ *je*
a) ohraničená, ak existuje také $K \ge 0$*, že* $|x| \le K$ *pre všetky* $x \in M$*,*
b) uzavretá, ak obsahuje všetky svoje hromadné body.
c) Množina $M \subset \mathbb{R}^m$ *je kompaktná, ak je ohraničená a uzavretá.*

Uzavretosť množiny M znamená, že množina M obsahuje limity všetkých konvergentných postupností $\{x_n\} \subset M$. Ľahko sa dá dokázať nasledujúci vzťah medzi otvorenou a uzavretou množinou.

Tvrdenie 4.13 *Množina $M \subset \mathbb{R}^m$ je uzavretá práve vtedy, keď je množina $\mathbb{R}^m \setminus M$ otvorená.*

Definícia 4.14 *Množina ∂M je hranicou množiny M, ak každý jej bod je hromadným bodom množín M aj $\mathbb{R}^m \setminus M$. Množina $\overline{M} = M \cup \partial M$ sa nazýva uzáver množiny M.*

Poznámka 4.15 *Množina $\overline{M}$ je najmenšia uzavretá množina obsahujúca množinu M.*

Veta 4.16 *Spojitá funkcia $f : M \to \mathbb{R}$ nadobúda na kompaktnej množine $M \subset \mathbb{R}^m$ maximum a minimum.*

Dôkaz. Ukážeme najprv, že funkcia je ohraničená. Nech nie je napríklad zhora ohraničená. Potom existuje postupnosť $\{x_n\} \subset M$, pre ktorú
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Postupnosť $\{x_n\}$ je ohraničná a potom obsahuje konvergentnú podpostupnosť $\{x_{k_n}\}$, pre ktorú $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x \in M$, pretože množina M je uzavretá. Na základe spojitosti funkcie f a podľa Vety 2.10 je $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x)$. Potom aj pôvodná postupnosť $\{f(x_n)\}$ má limitu $f(x) < \infty$ a teda funkcia f je zhora ohraničená. Rovnakým spôsobom by sme dokázali, že funkcia f je aj zdola ohraničená.

Označme
$$s = \inf\{f(x) : \ x \in M\}, \ S = \sup\{f(x) : \ x \in M\}.$$
Na základe definície infima a suprema existujú postupnosti $\{a_n\} \subset M$, $\{b_n\} \subset M$, pre ktoré
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = s, \ \lim_{n\to\infty} f(b_n) = S.$$
Opäť z kompaktnosti množiny M a spojitosti funkcie f dostaneme podpostupnosti $\{a_{k_n}\}$, $\{b_{k_n}\}$, pre ktoré
$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in M, \ \lim_{n\to\infty} f(a_{k_n}) = f(a) = \min\{f(x) : \ x \in M\},$$
$$\lim_{n\to\infty} b_{k_n} = b \in M, \ \lim_{n\to\infty} f(b_{k_n}) = f(b) = \max\{f(x) : \ x \in M\}.$$
Predchádzajúca veta ako aj nutné podmienky existencie lokálnych extrémov umožňujú nasledujúci postup pri hľadaní globálnych extrémov spojite diferencovateľnej funkcie $f : M \to \mathbb{R}$, na kompaktnej množine $M = M^o \cup \partial M \subset \mathbb{R}^m$, kde M^o je vnútro a ∂M hranica množiny M :
a) Nájdeme všetky stacionárne body funkcie f na množine M^o a jej hodnoty v nich,
b) Nájdeme hodnoty maxima a minima funkcie f na hranici ∂M,
c) Určíme maximum a minimum funkcie f na množine M ako najväčšiu resp. najmenšiu hodnotu z predchádzajúcich hodnôt.

Príklad 4.17 *Nájdime globálne extrémy funkcie danej predpisom $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 6y$ na množine $M = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \le 25\}$.*

Riešenie:
Stacionárne body funkcie f spĺňajú systém rovníc
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 6 = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6 = 0.$$
Jeho riešením je bod $a = (3,-3)$, ktorý sa nachádza v množine
$$M^o = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 < 25\}$$

a funkcia f v ňom nadobúda hodnotu $f(3,-3) = -18$.

Hranicou množiny M je kružnica, ktorú môžeme vyjadriť v tvare

$$\partial M = \{(x,y) : \ x = 5\cos t, \ 5\sin t, \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Dosadením do vyjadrenia funkcie f dostaneme úlohu hľadania stacionárnych bodov funkcie jednej premennej

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(t) = \cos^2 t + \sin^2 t - 6\cos t + 6\sin t = 1 - 6\cos t + 6\sin t.$$

Stacionárne body sú riešením rovnice

$$6\sin t + 6\cos t = 0,$$

ktorej riešením sú body $t_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$, ktorým odpovedajú body $b = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), \ c = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Funkcia f v nich nadobúda hodnoty $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - 6\sqrt{2}, \ f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + 6\sqrt{2}$.

Porovnaním hodnôt $f(a), \ f(b), \ f(c)$ dostávame

$$\max\{f(x) : x \in M\} = f(c) = 1 + 6\sqrt{2}, \ \min\{f(x) : x \in M\} = f(a) = -18.$$