Obsah

Kapitola 1

Integrálny počet FJP

1.1 Určitý integrál

1.1.1 Definícia určitého integrálu

Definícia 1 *1. Nech $\langle a, b\rangle$ je uzavretý interval. Nech $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ sú také, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$. Potom $k+1-$ticu $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nazývame delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nazývame deliace intervaly.*

2. Nech $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom číslo $\|D\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ nazývame norma delenia D.

3. Nech $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$. Ak $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$.

4. Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$ a $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je ľubovolné delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Nech body $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ sú ľubovolne zvolené pre $i = 1, 2, \ldots, k$. Potom číslo

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^{k} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazývame integrálny súčet funkcie f pre dané delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ a voľbu bodov $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

Definícia 2 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a každú voľbu bodov c_i v integrálnych súčtoch $S_{D_n}(f)$, postupnosť $(S_{D_n}(f))_{n=1}^{\infty}$ konverguje k tomu istému číslu J, tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Číslo*

$$J = \lim_{n\to\infty} S_{D_n}(f)$$

nazývame určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$ a označujeme

$$J = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Veta 1 *(Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Definícia 3 *Nech sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. *Funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a,b\rangle \subseteq A$.*
2. *V intervale $\langle a,b\rangle$existuje len konečný počet bodov, v ktorých táto funkcia nie je spojitá.*
3. *V každom bode z intervalu (a,b) existuje vlastná limita funkcie f sprava a aj zľava.*
4. *Existujú vlastné limity $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.*

Potom hovoríme, že funkcia f je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$.

Veta 2 *(Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a,b\rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

1.1.2 Vlastnosti určitého integrálu

Veta 3 *Nech funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ a $g : A \to \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a,b\rangle \subseteq A$ a $c \in \mathbb{R}$ je ľubovolná konštanta. Potom*

1. *Funkcia $(f+g) : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. *Funkcia $(cf) : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f.$$

3. *Funkcia $|f| : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b f \le \int_a^b |f|.$$

Veta 4 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na každom intervale $\langle c, d \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$.*

Veta 5 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a aj na intervale $\langle b, c \rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na intervale $\langle a, c \rangle$ a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Veta 6 *Nech funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ a $g : A \to \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$. Potom platí*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

1.1.3 Veta o strednej hodnote

Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale ohraničená. To znamená, že existujú $k, K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $k \leq f(x) \leq K$. Preto platí

$$\int_a^b k\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b K\, dx.$$

Z toho dostávame

$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq K(b-a).$$

A ďalej

$$k \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq K.$$

Číslo

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

nazývame stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 7 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom existuje $c \in \langle a, b\rangle$ také, že*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

To znamená, že spojitá funkcia dosahuje na intervale $\langle a, b\rangle$ svoju strednú hodnotu.

1.1.4 Hlavná veta integrálneho počtu

Definícia 4 *Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom funkciu*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt$$

nazývame funkcia hornej hranice integrálu funkcie f.

Veta 8 *Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

je spojitá.

Veta 9 *(Hlavná veta integrálneho počtu) Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b\rangle$) a navyše

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé} \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Definícia 5 *Nech je daná funkcia $f : I \to \mathbb{R}$, kde I je interval. Nech existuje funkcia $F : I \to \mathbb{R}$ taká, že*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé} \quad x \in I.$$

Potom funkciu $F : I \to \mathbb{R}$ nazývame primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$.

Veta 10 *Nech funkcia* $F_1 : I \to \mathbb{R}$ *je primitívnou funkciou funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$. *Potom funkcia* $F_2 : I \to \mathbb{R}$ *je primitívnou funkciou funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$ *práve vtedy, ak existuje* $c \in \mathbb{R}$ *také, že pre každé* $x \in I$ *je* $F_2(x) = F_1(x) + c$. *To znamená, že dve primitívne funkcie tej istej funkcie sa líšia iba o konštantu.*

Veta 11 *(Newtonov - Leibnitzov vzorec) Nech funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je jej ľubovolná primitívna funkcia. Potom*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Poznámka 1 *Definíciu určitého integrálu zovšeobecňujeme nasledujúcim spôsobom:*

1. $\int_a^a f = 0.$

2. *Ak* $a > b$, *definujeme* $\int_a^b f = -\int_b^a f.$

3. *Nech* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Môžeme definovať funkciu*

   $$G : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ G(x) = \int_x^b f(t)dt.$$

   Táto funkcia je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b\rangle$*) a platí*

   $$G'(x) = -f(x) \quad \text{pre každé} \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

4. *Nech* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia,* I *je interval a bod* $a \in I$. *Definujme funkciu* $G : I \to \mathbb{R},\ G(x) = \int_a^x f(t)dt$. *Nie je problém ukázať, že táto funkcia je diferencovateľná a* $G'(x) = f(x) \quad$ *pre každé* $\quad x \in I$.

Veta 12 *Nech* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia na intervale* I. *Potom k nej existuje primitívna funkcia.*

1.2 Neurčitý integrál

1.2.1 Definícia

Definícia 6 *Nech* I *je interval a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je funkcia. Potom jej ľubovolnú primitívnu funkciu* $F : I \to \mathbb{R}$ *nazývame neurčitý integrál funkcie* f. *Označujeme* $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Poznámka 2 *1. Je zrejmé, že označením $\int f(x)\,dx$ nie je výsledok jednoznačne určený. Je to jedna z primitívnch funkcií funkcie f. Teda $\int \sin x\,dx = -\cos x$ rovnako dobre, ako $\int \sin x\,dx = -\cos x + 356$. Teda tieto výsledky sa môžu líšiť o koštantu. Preto, keď napíšeme*

$$\int \sin x\,dx = \int \sin x\,dx,$$

nebude to znamenať, že

$$-\cos x = -\cos x + 356,$$

ale že existuje konštanta $c \in \mathbb{R}$ taká, že

$$-\cos x + c = -\cos x + 356.$$

2. Označenie $F(x) = \int f(x)\,dx$ nie je možné chápať ako rovnosť funkčných hodnôt. Rovnosť $\int sin3d3 = -\cos 3$ nedáva žiaden zmysel. Označenie $\int f(x)\,dx$ treba chápať ako úlohu o nájdení jednej z primtívnych funkcií funkcie f a rovnosť $F(x) = \int f(x)\,dx$ ako jeden z možných výsledkov uvedenej úlohy.

1.2.2 Metóda per partes

Veta 13 *Nech funkcie $f : I \to \mathbb{R}$ a $g : I \to \mathbb{R}$ sú spojito diferencovateľné na intervale I. Nech $H : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(f'g) : I \to \mathbb{R}$. Potom $(fg - H) : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(fg') : I \to \mathbb{R}$. V symbolike neurčitých integrálov to znamená, že*

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Dôsledok 1 *Nech funkcie $f : I \to \mathbb{R}$ a $g : I \to \mathbb{R}$ sú spojito diferencovateľné na intervale I a body $a, b \in I$ sú ľubovolne zvolené. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

1.2.3 Substitučná metóda

Veta 14 *(Prvá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $F : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$. Potom $(F \circ \varphi) : J \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$.*

Dôsledok 2 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $\alpha, \beta \in J$ sú ľubovolné. Potom*

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Veta 15 *(Druhá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I$ je spojito diferencovateľná bijekcia a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $G : J \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$. Potom $(G \circ \varphi^{-1}) : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$.*

Dôsledok 3 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I$ je spojito diferencovateľná bijekcia a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom pre každé $a, b \in I$ platí:*

$$\int_{a}^{b} f = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

1.2.4 Niektoré význačné substitúcie

I. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[k_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Vypočítame najmenší spoločný násobok $k = \operatorname{lcm}\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$.
2. Položíme
$$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t = \varphi^{-1}(x).$$
3. Potom
$$x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a} = \varphi(t).$$
4. Ďalej
$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{ad - bc}{(ct^k - a)^2} kt^{k-1}\,dt.$$
5. Ešte máme
$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad \text{preto} \quad \sqrt[k_i]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{\frac{k}{k_i}}.$$

6. Je zrejmé, že $\frac{k}{k_i}$ je celé číslo. Preto po dosadení do pôvodného integrálu dostávame integrál

$$\int R\left(c, \frac{b-dt^k}{ct^k-a}, t^{\frac{k}{k_1}}, t^{\frac{k}{k_2}}, \dots, t^{\frac{k}{k_s}}\right) \frac{ad-bc}{(ct^k-a)^2} kt^{k-1}\, dt,$$

čo je integrál z racionálnej funkcie.

II. Integrály typu

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,$$

kde $a > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x.$$

2. Potom
$$ax^2+bx+c = t^2 \pm 2\sqrt{a}xt + ax^2.$$
V tejto rovnosti vypadne druhá mocnina x. Preto môžeme vypočítať x.

3. Dostávame
$$x = \frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t} = \varphi(t).$$

4. Potom
$$dx = \varphi'(t)\, dt = \frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\, dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x = \pm t \pm \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t}.$$

6. Preto daný integrál
$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$
je prevedený na integrál z racionálnej funkcie
$$\int R\left(c, \frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t}, \pm t \pm \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t}\right)\left(\frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\right) dt.$$

III. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx,$$

kde $c>0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$

   Pre jednoduchosť budeme uvažovať len o jednej zo štyroch možností

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} - xt.$$

2. Potom

$$ax^2+bx+c = c - 2\sqrt{c}xt + x^2t^2.$$

   V tejto rovnosti vypadne c, preto môžeme krátiť x–om. Vypočítame x.

3. Dostávame

$$x = \frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a} = \varphi(t).$$

4. Potom

$$dx = \varphi'(t)\, dt = \frac{-2(t^2\sqrt{c}+tb+\sqrt{c}a)}{(t^2-a)^2}\, dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} - xt = \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a}\right) t.$$

6. Preto daný integrál

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx$$

   je prevedený na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c,\ \frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a},\ \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a}\right) t\right)\left(\frac{-2(t^2\sqrt{c}+tb+\sqrt{c}a)}{(t^2-a)^2}\right)\, dt.$$

IV. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, \sin x, \cos x\right)\, dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t = \varphi^{-1}(x).$$
2. Dostávame
$$x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$
3. Potom
$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$
4. Ďalej
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
5. Preto daný integrál
$$\int R\left(c, \sin x, \cos x\right)\,dx$$
prevedieme na integrál z racionálnej funkcie
$$\int R\left(c, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

V. Integrály typu

$$\int R\left(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x\right)\,dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\operatorname{tg} x = t = \varphi^{-1}(x).$$
2. Dostávame
$$x = \operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$
3. Potom
$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$
4. Ďalej
$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

5. Preto daný integrál

$$\int R\left(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x\right)\, dx$$

prevedieme na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, t, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

1.2.5 Príklady

Časť I

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x \sin x dx.$ .... $[\sin x - x\cos x]$.
2. $\int (x^3 - x + 1)e^{2x} dx.$ .... $\left[\frac{e^{2x}}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)\right]$.
3. $\int\limits_0^{\pi} (2x^2 + 3)\cos 2x dx.$ .... $[\pi]$.
4. $\int x \log_{10} 2x dx.$ .... $\left[\frac{x^2}{2}\left(\log_{10} 2x - \frac{1}{2\ln 10}\right)\right]$.
5. $\int e^x \sin x dx.$ .... $\left[\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right]$.
6. $\int \frac{e^x}{(e^x+3)^7} dx.$ .... $\left[-\frac{1}{6(e^x+3)^6}\right]$.
7. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]$.
8. $\int \frac{x}{\sqrt{3-4x^2}} \mathrm{d}x.$ .... $\left[-\frac{1}{4}\sqrt{3-4x^2}\right]$.
9. $\int \cos(\ln x)\, dx.$ .... $\left[\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right)\right]$.
10. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx.$ .... $[5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2|]$.
11. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3} dx.$ .... $\left[2\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - 2\ln|x+1|\right]$.
12. $\int \frac{1}{x^3+1} dx.$. $\left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right]$.
13. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}+2e^x+7} dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}(\ln 42 - \ln 15) - \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\operatorname{arctg}\frac{6}{\sqrt{6}} - \operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right]$.
14. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x+1}{\cos^4 x+\cos^3 x} \sin x dx.$ .... $\left[-\frac{7}{2} + 2\ln\frac{3}{2}\right]$.

15. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx.$ .... $\left[\frac{12}{\sqrt[12]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right|\right].$

16. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1},\ t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\right].$

17. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}}dx.$ ..... $\left[\frac{3t}{2} - \frac{\ln|1-2t|}{2} - \frac{33}{4(1-2t)},\ t = -x + \sqrt{x^2+x+3}\right].$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}}dx.$ .... $\left[-2\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{4-3x-x^2}-2}{x}\right)\right].$

19. $\int\limits_0^1 \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$ .... $[-8,345].$

20. $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right].$

21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}^2\,x+\mathrm{tg}\,x+1}dx.$ .... $\left[\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right].$

22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx.$ .... $[1,246].$

23. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5+2\cos x}dx.$ .... $[0,152].$

24. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = x\ln x,\ x = \frac{1}{2},\ x = 2,\ y = 0.$ .... $\left[-\frac{9}{16} + \frac{15}{8}\ln 2\right].$

   (b) Parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1,3]$, $B = [4,0]$. .... $\left[\frac{9}{4}\right].$

25. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi o_x. Polomery jeho podstáv sú $r = 1$, $R = 2$ a výška $v = 3$. .... $[7\pi].$

Časť II

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x\right].$

2. $\int x^2e^{3x}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)\right].$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(2x)\sin x dx.$ .... $\left[\frac{2}{5}e^{\pi} + \frac{1}{5}\right].$

4. $\int x\ln x^2 dx.$ .... $\left[\frac{x^2}{2}(\ln x^2 - 1)\right].$

5. $\int \ln(x^2+1)dx.$ .... $\left[x\ln(x^2+1) - 2x + 2\mathrm{arctg}\, x\right]$.

6. $\int\limits_1^e \ln^2 x\mathrm{d}x.$ .... $\left[e^{-2}\right]$.

7. $\int \frac{1}{4+3x^2}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$.

8. $\int \frac{x}{4+3x^2}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{6}\ln(4+3x^2)\right]$.

9. $\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x.$ .... $\left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right]$.

10. $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$ .... $\left[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\right]$.

11. $\int e^x \mathrm{cotg}\, e^x \mathrm{d}x.$ .... $[\ln|\sin e^x|]$.

12. $\int x\sqrt[3]{x+2}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4}\right]$.

13. $\int \frac{1-x}{x^2+x}dx.$ .... $[\ln|x| - 2\ln|x+1|]$.

14. $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2}dx.$ .... $\left[\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right]$.

15. $\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx.$ .... $\left[\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9}\ln|x+2|\right]$.

16. $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5}dx.$ .... $\left[\ln|x+5| - \ln|x+1| - \frac{3}{x+1}\right]$.

17. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7}dx.$ .... $\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7) - \frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right]$.

18. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7}dx.$

$\left[\frac{3}{10}\ln|x-1| - \frac{3}{20}\ln\left(x^2+2x+7\right) + \frac{\sqrt{6}}{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right]$.

19. $\int \frac{5x^3-5x^2-11x+5}{x^2-x-2}dx.$ .... $\left[\frac{5x^2}{2} + \ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right]$.

20. $\int \frac{e^x+10}{(e^{2x}-2e^x+5)}dx.$ .... $\left[2x - \ln\left|e^{2x} - 2e^x + 5\right| + \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{e^x-1}{2}\right)\right]$.

21. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{2x}+2e^x-3}{e^{2x}+e^x-6}dx.$ .... $\left[\ln\sqrt{5}\right]$.

22. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{2e^x+3}{e^{2x}+2e^x+2}e^x\mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln 2 + \mathrm{arctg}\, 3 - \frac{\pi}{4}\right]$.

23. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x+3}dx.$

$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sin^2 x + \sin x + 3\right) - \frac{\sqrt{11}}{11}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{11}}{11}\left(2\sin x + 1\right)\right)\right]$.

24. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5-\cos x)\sin x}{\cos^2 x-\cos x-2}dx.$ .... $[-3\ln 2]$.

25. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x+\sin^2 x+\sin x}dx.$
$\left[\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\ln|\sin^2 x+\sin x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+\sin x\right)\right]\right].$

26. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}dx.$ .... $[\ln(1+\sqrt[6]{x})]$.

27. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx.$ .... $[7+\ln 4]$.

28. $\int \frac{1-\sqrt[6]{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^4}}dx.$
$\left[\ln|x+1| - 3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right| - 6\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)\right].$

29. $\int \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}dx.$ .... $\left[\ln\left(2x+2\sqrt{2x-1}\right)+\frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}\right].$

30. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}dx.$ .... $\left[2\sqrt{x-1}-\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)^4-\frac{2}{1+\sqrt{x-1}}\right].$

31. $\int\limits_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x.$ .... $\left[8+\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right].$

32. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-2x^2}}dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arcsin\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)\right)\right]$

33. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx.$ .... $\left[\ln\left|\frac{-x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}\right|\right].$

34. $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.$ .... $[2\pi]$.

35. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$ .... $\left[-2\mathrm{arctg}\,t,\ t=\frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x}\right].$

36. $\int\limits_0^4 \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{4}{45}\right].$

37. $\int \frac{1}{3-\cos x}dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)\right].$

38. $\int \frac{1}{3+\cos x+\sin x}dx.$ .... $\left[\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{7}\left(2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)}{7}\right)\right].$

39. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}dx.$ .... $\left[-\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)\right].$

40. $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}dx.$ .... $\left[2(\ln|t-1|-\ln|t|-\mathrm{arctg}\,t),\ t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right].$

41. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(1+\mathrm{tg}\, x)^2} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right].$

42. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2}.$ .... $\left[\frac{1}{\sqrt{15}} \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \mathrm{tg}\, x\right)\right].$

43. $\int \mathrm{arctg}\, \frac{1}{x-1} dx.$ ... $\left[x\, \mathrm{arctg}\, \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln\left|x^2 - 2x + 2\right| + \mathrm{arctg}\,(x-1)\right].$

44. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 5x \cos x \mathrm{d}x.$ .... $[\frac{1}{6}]$

45. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

(a) $y = \frac{27}{x^2+9}$, $y = \frac{x^2}{6}$. .... $\left[\frac{3}{2}(3\pi - 2)\right].$

(b) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$. .... $[3 - e].$

46. Kruh $x^2 + y^2 = 8$ je rozdelený parabolou $y = \frac{x^2}{2}$ na dve časti. Vypočítajte obsah menšej z nich. .... $\left[2\pi + \frac{4}{3}\right].$

47. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \frac{2x}{\pi}$, $y = \sin x$, $x \geq 0$. .... $\left[\frac{\pi^2}{12}\right].$

Časť III

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x \ln x dx.$ .... $\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right].$

2. $\int x e^{-x} dx.$ .... $[-xe^{-x} - e^{-x}].$

3. $\int \mathrm{arctg}\, x dx.$ .... $\left[x \mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right].$

4. $\int x^2 3^x dx.$ .... $\left[\frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2 - \frac{x}{\ln 3} + \frac{1}{(\ln 3)^2}\right)\right].$

5. $\int x \mathrm{arccotg}\, x \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{x^2+1}{2} \mathrm{arccotg}\, x + \frac{x}{2}\right].$

6. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$ .... $\left[\pi^2 - 4\right].$

7. $\int\limits_0^1 x \mathrm{arccotg}\, x \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right].$

8. $\int \frac{x^2}{5+x^3} dx.$ .... $\left[\frac{1}{3} \ln\left|5 + x^3\right|\right].$

9. $\int \frac{1}{3+9x^2} dx.$ .... $\left[\frac{1}{3\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}x)\right].$

10. $\int \frac{x}{3+9x^2} dx.$ .... $\left[\frac{1}{18} \ln(3 + 9x^2)\right].$

11. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$ .... $\left[\frac{-1}{2\sin^2 x}\right].$

12. $\int \frac{\sin x}{\cos x - 1} dx.$ .... $[-\ln|\cos x - 1|].$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}} dx.$ .... $\left[-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2}\right].$

14. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[4]{\sin x + \cos x}} dx.$ .... $\left[-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\sin x + \cos x)^3}\right].$

15. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}\right].$

16. $\int \frac{x^2-x+2}{(x-3)(x-1)^2} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln(x-1)^2|x-3| + \frac{1}{x-1}\right].$

17. $\int \frac{3x^2-11x+7}{(x-3)(x^2-4x+4)} \mathrm{d}x.$ .... $\left[2\ln|x-2| + \ln|x-3| - \frac{3}{x-2}\right].$

18. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx.$ .... $\left[\ln\left(x^2+2x+5\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right].$

19. $\int \frac{x-1}{x^2-4x+7} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+7) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right].$

20. $\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+x} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| - 3\ln|x+1|\right].$

21. $\int \frac{3x^2-x-14}{x^3+x^2-5x+3} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + \frac{3}{x-1}\right].$

22. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)} \mathrm{d}x.$ $\left[\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$

23. $\int \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{4}\ln|1+x| - \frac{1}{4}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right].$

24. $\int\limits_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{16}\right].$

25. $\int\limits_4^5 \frac{2x^2-3x+10}{x^3-7x^2+10x} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln\frac{5}{18}\right].$

26. $\int\limits_1^2 \frac{x^3-3x^2-10x+6}{x^2-4x-5} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{5}{2} - \ln 3\right].$

27. $\int\limits_2^3 \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln 2 + \frac{9}{8}\right].$

28. $\int \frac{e^x}{4e^{2x}-8e^x+13} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}(e^x-1)\right].$

29. $\int \frac{2e^{2x}-3e^x+10}{e^{2x}-7e^x+10} \mathrm{d}x.$ .... $[x - 2\ln|e^x-2| + 3\ln|e^x-3|].$

30. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}} dx.$ .... $\left[6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\right)\right].$

31. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$ .... $\left[\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right| + 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right].$

32. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx.$ .... $\left[2\sqrt{1+x} + \ln|\sqrt{1+x}-1| - \ln|1+\sqrt{1+x}|\right].$

33. $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}dx.$ ... $\left[-\frac{t^2}{2} - 4t - 9\ln|t-3| + \ln|t+1|,\ t=\sqrt{2x+3}\right].$

34. $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$ .... $[\ln 9].$

35. $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\left(\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)\right]$

36. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx.$ .... $\left[\ln\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right].$

37. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}dx.$

$\left[2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t+1| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1},\ t=\sqrt{x^2-x+1}-x\right].$

38. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x}dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right].$

39. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx.$ .... $\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \ln\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right].$

40. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x-2}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln|\sin x - 1| + \frac{2}{3}(\sin x + 2)\right].$

41. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x-6}dx.$ .... $\left[\frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}\right].$

42. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{4-5\sin x}dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln 2\right].$

43. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\cos x-6}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{5}\ln\frac{2}{9}\right].$

44. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2\right].$

45. $\int \frac{1}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{\sqrt{7}}{14}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\operatorname{tg} x\right)\right].$

46. $\int\limits_0^{2\pi} \cos 3x\cos 4x\mathrm{d}x.$ .... $[0]$

47. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

(a) $y = x-1, y^2 = 2x+1.$ .... $\left[\frac{16}{3}\right].$

(b) $y = x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = 2.$ .... $\left[\frac{8}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\right].$

48. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \sin x$, $y = \frac{2x}{\pi}$. .... $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$.

Kapitola 2

Fourierove rady

Definícia 7 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, a+l \rangle \subseteq A$. Potom nekonečný funkcionálny rad*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) \right)$$

taký, že

$$a_n = \frac{2}{l} \int\limits_a^{a+l} f(x) \cos\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) \, dx \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

a

$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_a^{a+l} f(x) \sin\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) \, dx \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

sa nazýva trigonometrický Fourierov rad funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a+l \rangle$.

Definícia 8 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, a+l \rangle \subseteq A$. Potom funkciu $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takú, že*

1. $\bar{f}(a) = \frac{1}{2} \left(\lim\limits_{x \to a+} f(x) + \lim\limits_{x \to (a+l)-} f(x) \right)$,
2. $\bar{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim\limits_{t \to x+} f(t) + \lim\limits_{t \to x-} f(t) \right)$, *pre každé* $x \in (a, a+l)$,
3. $\bar{f}(x) = \bar{f}(x+l)$ *pre každé* $x \in \mathbb{R}$,

nazývame normalizované periodické pokračovanie funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a+l \rangle$.

Veta 16 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ spĺňa nasledujúce podmienky:*

1. *Je po čiastkach spojitá na intervale* $\langle a, a+l\rangle \subseteq A$.
2. *Funkcia* f *je na intervale* $\langle a, a+l\rangle$ *je po čiastkach spojito diferencovateľná. To znamená, že jej derivácia* f' *je na intervale* $\langle a, a+l\rangle$ *po čiastkach spojitá.*
3. *Nech* $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je normalizované periodické pokračovanie funkcie* $f : A \to \mathbb{R}$ *pre interval* $\langle a, a+l\rangle$.

Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi x}{l}\right)\right),$$

kde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) \, dx \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin\left(\frac{n2\pi x}{l}\right) \, dx \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

To znamená, že za uvedených podmienok je trigonometrický Fourierov rad funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ *pre interval* $\langle a, a+l\rangle$ *konvergentný a jeho súčtom je normalizované periodické pokračovanie funkcie* $f : A \to \mathbb{R}$ *pre interval* $\langle a, a+l\rangle$.

2.0.6 Príklady

1. Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ pre interval $\langle -1, 1\rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. .... [].
2. Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ pre interval $\langle 0, 1\rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. .... [].
3. Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ pre interval $\langle -2, 2\rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. .... [].
4. Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ pre interval $\langle -2, 0\rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. .... [].
5. Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ pre interval $\langle 1, 3\rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. .... [].
6. Funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ rozložte na intervale $(0, 2)$ do sínusového radu. .... [].

7. Funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ rozložte na intervale $(0, 2)$ do kosínusového radu radu. .... [] .

8. Nech
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre} \quad x \in (-\infty, 0\rangle; \\ -1, & \text{pre} \quad x \in (0, \infty). \end{cases}$$
Nájdite Fourierov rad tejto funkcie pre interval $\langle -2, 2\rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. .... [] .

9. Nech
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre} \quad x \in (-\infty, 2\rangle; \\ 3 - x, & \text{pre} \quad x \in (2, \infty). \end{cases}$$
Nájdite Fourierov rad tejto funkcie pre interval $\langle 1, 3\rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. .... [] .

Kapitola 3

Diferenciálny počet FVP

3.1 Množiny

Znakom $\mathbb{R}^m$ budeme označovať množinu

$$\mathbb{R}^m = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Prvky množiny $\mathbb{R}^m$ nazývame body, alebo vektory.

Na množine $\mathbb{R}^m$ definujeme dve operácie

(a) **Súčet vektorov**
Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$. Potom ich súčtom nazývame vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ taký, že

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) + (y_1, y_2, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m).$$

(b) **Súčin skaláru a vektora**
Nech (skalár) $c \in \mathbb{R}$ a (vektor) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom súčinom skaláru c a vektora $\mathbf{x}$ nazývame vektor

$$c\mathbf{x} = c(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_m).$$

Poznamenávame, že množina $\mathbb{R}^m$ spolu s uvedenými operáciami tvorí lineárny priestor.

Na množine $\mathbb{R}^m$ ďalej definujeme:

(a) **Skalárny súčin vektorov**
Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$. Potom ich skalárnym súčinom nazývame číslo (skalár)

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_m y_m.$$

(b) **Normu (absolútnu hodnotu) vektora**
Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom normou vektora $\mathbf{x}$ nazývame číslo

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}.\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}.$$

(c) **Vzdialenosť bodov**
Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sú dva body z $\mathbb{R}^m$. Potom ich vzdialenosťou nazývame číslo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2}.$$

Definícia 9 *Nech* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *a* $\varepsilon > 0$. *Epsilonovým okolím bodu* $\mathbf{a}$ *nazývame množinu* $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}$. *Prstencovým epsilonovým okolím bodu* $\mathbf{a}$ *nazývame množinu* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\mathbf{a}) = \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$.

V prípade $\mathbb{R}^1$ *definujeme aj epsilonové okolia* $\pm\infty$. *Množinu* $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ *nazývame* ε*-ovým okolím bodu* ∞. *Prstencové* ε*-ové okolie* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\infty)$ *definujeme predpisom* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(\infty)$. *Podobne definujeme epsilonové a prstencové epsilonové okolie mínus nekonečna vzťahom* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(-\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Definícia 10 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. *Budeme hovoriť, že bod* $\mathbf{a}$ *je hromadným bodom množiny* A, *ak v každom* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\mathbf{a})$ *leží bod množiny* A.

Definícia 11 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}^m$. *Komplementom množiny* A *nazývame množinu* $CA = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \notin A\}$.

Definícia 12 *Budeme hovoriť, že množina* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *je otvorená, ak pre každé* $\mathbf{a} \in A$ *existuje* $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$.

Ak množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *obsahuje všetky svoje hromadné body, tak sa nazýva uzavretá množina.*

Veta 17 *Množina* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *je otvorená práve vtedy, keď jej komplement* CA *je uzavretá množina.*

Definícia 13 *Budeme hovoriť, že množina* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *je ohraničená, ak existuje* $\varrho > 0$ *také, že* $A \subset \mathcal{O}_\varrho(\mathbf{0})$.

3.2 Limita a spojitosť funkcie

Definícia 14 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a}$ *je hromadným bodom množiny* A.

Ak pre každé $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$ *existuje* $\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a})$ *také, že* $f(\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a}) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$, *hovoríme, že funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *má v bode* $\mathbf{a}$ *limitu* $\mathbf{b}$. *Píšeme* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Definícia 15 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in A$ *je hromadným bodom množiny* A. *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, *budeme hovoriť, že funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$.

Ak funkcia f *je spojitá v každom bode* $\mathbf{a} \in C \subset A$, *tak budeme hovoriť, že funkcia* f *je spojitá na množine* C.

Ak funkcia f *je spojitá v každom bode* $\mathbf{a} \in A$, *tak budeme hovoriť, že funkcia* f *je spojitá.*

Veta 18 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$. *Nech* $c \in \mathbb{R}$. *Potom*

- *(a)* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (cf)(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}_1$,
- *(b)* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$,
- *(c)* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = |\mathbf{b}_1|$.

Dôsledok 4 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *sú spojité funkcie a* $c \in \mathbb{R}$. *Potom*

- *(a)* $(cf) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkcia.*
- *(b)* $(f+g) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkcia.*
- *(c)* $|f| : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*

Veta 19 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b_1 \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b_2 \in \mathbb{R}$. *Potom*

- *(a)* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2$,
- *(b) ak* $b_2 \neq 0$ *a* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$, *tak*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \frac{b_1}{b_2},$$

Dôsledok 5 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *sú spojité funkcie Potom*

(a) $(fg) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*

(b) *Ak* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$, *tak* $\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*

Definícia 16 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $C \subset A$. *Potom funkciu* $((f|C)) : \mathbb{R}^m \supset C \to \mathbb{R}^n$, $(f|C)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ *pre každé* $\mathbf{x} \in C$, *nazývame zúženie funkcie* f *na množine* C.

Veta 20 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C \subset A$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. *Potom aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Dôsledok 6 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C_1 \subset A$ *a aj množiny* $C_2 \subset A$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_1)(\mathbf{x}) \neq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_2)(\mathbf{x})$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *neexistuje. (Ak by existovala, tak by museli existovať limty všetkých zúžení a tieto limity by museli byť navzájom si rovné.)*

Veta 21 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C_1 \subset A$ *a aj* $C_2 \subset A$. *Nech* $C_1 \cup C_2 = A$. *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_1)(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_2)(\mathbf{x})$, *potom aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Veta 22 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^n \supset B \to \mathbb{R}^k$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$. *Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:*

- *Pre každé* $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ *je* $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{b}$.
- *Funkcia* g *je spojitá v bode* $\mathbf{b}$.

Potom $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(g \circ f)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$.

Veta 23 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$ *a funkcia* $g : \mathbb{R}^n \supset B \to \mathbb{R}^k$ *je spojitá v bode* $f(\mathbf{a})$. *Potom funkcia* $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^k$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$.

Dôsledok 7 *Zložená funkcia zo spojitých funkcií je spojitá.*

Veta 24 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* A. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *práve vtedy, keď* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ *pre* $i = 1, , \dots, n$.

Veta 25 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ *a* $\mathbf{a} \in A$ *je hromadným bodom množiny* A. *Potom funkcia* f *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$ *práve vtedy, keď sú v tomto bode spojité funkcie* $f_i : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}$ *pre* $i = 1, 2, \dots, n$.

Dôsledok 8 *Funkcia je spojitá práve vtedy, keď sú spojité jej zložky.*

V prípade, že uvažujeme o jednozložkových funkciách typu $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}$, môžeme uvažovať o nevlastných limitách a aj o nerovnostiach medzi limitami.

Definícia 17 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je funkcia a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \in \{\infty, -\infty\}$. *Potom hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *nevlastnú limitu.*

Veta 26 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(-f(\mathbf{x})) = -\infty$.

Veta 27 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ *a existuje* $k \in \mathbb{R}$ *také, že* $g(\mathbf{x}) \geq k$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f + g)(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 28 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ *a existuje* $k \in \mathbb{R}$ *také, že* $k > 0$ *a* $g(\mathbf{x}) \geq k$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f.g)(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 29 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = \infty$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = 0$.

Veta 30 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ *a pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) > 0$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 31 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $h : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Potom*

(a) Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, *tak v prípade existencie vlastných limít* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$, *platí:* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \leq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$.

(b) Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x})$, *tak existuje aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ *a platí:* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x})$.

Príklady

(a) Vypočítajte nasledujúce limity

i. $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x}{x+y}$ .... $\left[\frac{2}{5}\right]$.
ii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$ .... [neexistuje].
iii. $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x}{x+y}$ .... [neexistuje].
iv. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-3}{x+y-5}$ .... $[\frac{3}{5}]$.
v. $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-3}{x+y-5}$ .... [neexistuje].
vi. $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ .... $[\frac{3}{8}]$.
vii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$ .... [0].
viii. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+yz-xz+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1}$ .... $[\infty]$.
ix. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2}$ .... [0].
x. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ .... [neexistuje].
xi. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y}$, (polož $y=\sin x$, alebo $y=x-x^2$) [neexistuje].
xii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y}$, (polož $x=\sqrt[3]{y^3-y}$) .... [neexistuje].
xiii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, (polož $y=x^2$) .... [neexistuje].
xiv. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$ .... $[\frac{1}{4}]$.
xv. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .... $[\sqrt{2}]$.
xvi. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .... [neexistuje].
xvii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ .... [12].
xviii. $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\sin xy}{xy}$ .... [1].
xix. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$ .... [0].
xx. $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$ .... [3].
xxi. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}$ .... $[e]$.
xxii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ .... [1].

(b) Nech

i.
$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$........ [Je spojitá v $(0,0)$.]

ii.
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$.... [Nie je spojitá v $(0,0)$.]

iii.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$........ [Je spojitá v $(0,0)$.]

iv.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{pre } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0,0)$.... [Je spojitá v $(0,0,0)$.]

v.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} & \text{pre } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0,0)$.[Nie je spojitá v $(0,0,0)$.]

vi.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$.... [Nie je spojitá v $(0,0)$.]

vii.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$........ [Je spojitá v $(0,0)$.]

viii.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$.... [Nie je spojitá v $(0,0)$.]

3.3 Diferencovateľnosť funkcie

3.3.1 Lineárne zobrazenia

Definícia 18 *1. Funkciu $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nazývame lineárna funkcia, ak pre každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}$ platí*

- $L(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$,
- $L(c\mathbf{x}) = cL(\mathbf{x})$.

2. Pre každé lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ existujú $l_1, l_2, \ldots, l_m \in \mathbb{R}$ také, že

$$L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_mx_m.$$

Maticu

$$[L] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_m \end{bmatrix}$$

nazývame matica lineárneho zobrazenia L.

3. $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ *je lineárne zobrazenie práve vtedy, keď jeho zložky*

   $$L_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ L_i(\mathbf{x}) = L_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + \dots + l_{im}x_m$$

   sú lineárne zobrazenia pre $i = 1, 2, \dots, n$. Potom maticu

   $$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1m} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nm} \end{bmatrix}$$

   nazývame matica lineárneho zobrazenia L.

4. *Je zrejmé, že pri tomto označení platí $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ práve vtedy, keď $[L]\,\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T$, kde $\mathbf{x}^T$ označuje transponovanú maticu riadkovej matice $\mathbf{x}$.*

3.3.2 Definícia diferencovateľnosti

Definícia 19 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$ je hromadným bodom množiny A. Nech existuje také lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, že*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x}-\mathbf{a})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = 0.$$

Vtedy hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná bode $\mathbf{a}$. Lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nazývame (prvý) diferenciál funkcie f v bode $\mathbf{a}$. Označujeme $L = \mathcal{D}f(\mathbf{a})$.

Ak funkcia f je diferencovateľná v každom bode $\mathbf{a} \in M \subseteq A$, potom hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná na množine M. Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná na množine A, tak hovoríme, že f je diferencovateľná funkcia.

Poznámka 3 *Je zrejmé, že funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina) práve vtedy, keď*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = 0.$$

Veta 32 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom existuje taká funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, že*

1. $p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

2. *Funkcia* $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$. *To znamená, že* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

3. *Pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *platí*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{a}|.$$

Veta 33 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ *je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a} \in A$. *(A je otvorená množina.) Potom je v tomto bode spojitá.*

Veta 34 *Nech funkcie* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ *sú diferencovateľné v bode* $\mathbf{a} \in A$ *(A je otvorená množina.) a* $c \in \mathbb{R}$. *Potom*

- *Funkcia* $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ *je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a}$.
- *Funkcia* $(f + g) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ *je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a}$.

Veta 35 *Nech A je otvorená množina. Funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a}$ *práve vtedy, keď v bode* $\mathbf{a}$ *sú diferencovateľné jej zložky* $f_i : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *pre* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Navyše v prípade diferencovateľnosti platí*

$$\mathcal{D}f(\mathbf{a}) = (\mathcal{D}f_1(\mathbf{a}), \mathcal{D}f_2(\mathbf{a}), \ldots, \mathcal{D}f_n(\mathbf{a})).$$

3.3.3 Parciálne derivácie

Definícia 20 1. *Nech A je otvorená množina a* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A$. *Potom definujeme*

$$A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m) \in A\} \quad \text{pre} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

2. *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$. *Budeme uvažovať o funkciách*

$$\varphi_i : \mathbb{R} \supseteq A_i \to \mathbb{R},\ \varphi_i(t) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m)$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$.

3. *Nech existuje (vlastná) derivácia*

$$\begin{aligned}
\varphi_i'(a_i) &= \lim_{t\to a_i} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(a_i)}{t - a_i} \\
&= \lim_{t\to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m) - f(\mathbf{a})}{t - a_i} \\
&= \frac{\delta f(\mathbf{a})}{\delta x_i} \\
&= f_{\cdot i}(\mathbf{a})
\end{aligned}$$

Toto číslo nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa i-tej premennej v bode $\mathbf{a}$.

4. *Nech $B_i \subseteq A$ je množina všetkých $\mathbf{a} \in A$ pre ktoré existuje $f_{\cdot i}(\mathbf{a})$. Potom funkciu*
$$f_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq B_i \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto f_{\cdot i}(\mathbf{x})$$
nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa i-tej premennej.

Príklady

Vypočítajte parciálne derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $f(x,y) = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right),\ f_{\cdot 1}(x,y) =?,\ f_{\cdot 2}(x,y) =?$
2. $f(x,y,z) = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5,\ f_{\cdot 1}(x,y,z) =?$
3. $f(x,y,z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}},\ f_{\cdot 2}(1,-3,4) =?$
4. $f(x,y) = \ln(\sin xy),\ f_{\cdot 2}(1,\frac{\pi}{2}) =?$
5. $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy},\ f_{\cdot 1}(1,1) =?,\ f_{\cdot 2}(2,1) =?$
6. $f(x,y) = e^{\sin\frac{x}{y}},\ f_{\cdot 1}(x,y) =?,\ f_{\cdot 2}(x,y) =?$
7. $f(x,y) = x^{xy},\ f_{\cdot 1}(x,y) =?,\ f_{\cdot 2}(x,y) =?$
8. $f(x,y) = (\ln x)^{\cos y},\ f_{\cdot 1}(x,y) =?,\ f_{\cdot 2}(x,y) =?$
9. $f(x,y,z) = ze^{x^3\ln(\cos(x-y^2))}$,
   $f_{\cdot 1}(x,y,z) =?,\ f_{\cdot 2}(x,y,z) =?,\ f_{\cdot 3}(x,y,z) =?$
10. $f(x,y,z) = x^{\frac{1}{x}}z,\ f_{\cdot 1}(x,y,z) =?,\ f_{\cdot 2}(x,y,z) =?,\ f_{\cdot 3}(x,y,z) =?$
11. Nech
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + x - y & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$
    Vypočítajte $f_{\cdot 1}(0,0),\ f_{\cdot 2}(0,0)$. .... $[f_{\cdot 1}(0,0) = 1,\ f_{\cdot 2}(0,0) = -1.]$

Veta 36 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech A je otvorená množina a funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existujú parciálne derivácie $f_{\cdot i}(\mathbf{a})$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$ a navyše*

$$L(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f_{\cdot 1}(\mathbf{a})x_1 + f_{\cdot 2}(\mathbf{a})x_2 + \ldots + f_{\cdot m}(\mathbf{a})x_m.$$

Veta 37 *(Postačujúca podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Uvažujme o funkcii $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$, kde A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech existujú parciálne derivácie $f_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$ a navyše tieto parciálne derivácie sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

Dôsledok 9 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, A *je otvorená množina a* $\mathbf{a} \in A$. *Nech parciálne derivácie* $(f_j)_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *sú spojité v bode* $\mathbf{a}$ *pre* $j = 1, 2, \dots, n$, $\quad i = 1, 2, \dots, m$. *Potom je funkcia* f *diferencovateľná v bode* $\mathbf{a}$.

Príklady

1. Nech
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$. . . . . $[f_{\cdot 1}(0,0) = 0 = f_{\cdot 2}(0,0)$, nie je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0,0)$.]

2. Nech
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$. . . . . $[f_{\cdot 1}(0,0) = 0 = f_{\cdot 2}(0,0)$, nie je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0,0)$.]

3. Nech
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$. . . . . $[f_{\cdot 1}(0,0) = 1 = f_{\cdot 2}(0,0)$, je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0,0)$.]

4. Nech
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$. . . . . $[f_{\cdot 1}(0,0) = 0 = f_{\cdot 2}(0,0)$, je spojitá, je diferencovateľná v $(0,0)$, parciálne derivácie nie sú spojité v $(0,0)$.]

5. Nech $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$.
$[f_{\cdot 1}(0,0) = 1 = f_{\cdot 2}(0,0)$, je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0,0)$.]

6. Nech $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$.
$[f_{\cdot 1}(0,0), f_{\cdot 2}(0,0)$neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0,0)$.]

7. Nech $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0,0)$.
$[f_{\cdot 1}(0,0,0)$, $f_{\cdot 2}(0,0,0)$, $f_{\cdot 3}(0,0,0)$neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0,0,0)$.]

3.3.4 Geometrický význam parciálnych derivácií

Z podmienky

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathbf{a}|$$

odvodzujeme dva dôsledky:

1. $f(\mathbf{x}) \doteq f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a})$.

2. V prípade funkcie dvoch premenných dostávame:

$$z = f(a,b) + f_{\cdot 1}(a,b)(x-a) + f_{\cdot 2}(a,b)(y-b)$$

je rovnica dotykovej roviny grafu funkcie f v bode $T = (a,b,f(a,b))$.

Príklady

1. Vypočítajte približnú hodnotu $(1,94)^2 e^{0,12}$.

2. Vypočítajte približnú hodnotu $4,004(2,002)^2(3,003)^3$.

3. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ v bode $T = (1,1,?)$.

4. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$ v bode $T = (1,?,2)$.

5. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = xy$ v bode $T = (?,2,2)$.

6. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ v bode $T = (1,-1,1)$.

7. Ukážte, že plochy $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ a $4 + x + 2y = \ln z$ sa dotýkajú (majú spoločnú dotykovú rovinu) v bode $T = (2,-3,1)$.

3.3.5 Diferencovateľnosť zloženej funkcie

Veta 38 *(Veta o diferencovateľnosti zloženej funkcie) Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ a $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sú otvorené množiny. Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to B \subset \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ a funkcia $g : \mathbb{R}^n \supseteq B \to \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $f(\mathbf{a}) \in B$. Potom zložená funkcia $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ a platí*

$$\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a}) = \mathcal{D}g(f(\mathbf{a})) \circ \mathcal{D}f(\mathbf{a}).$$

Pre matice zložených lineárnych zobrazení platí:

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))]\,[\mathcal{D}f(\mathbf{a})]\,.$$

Nech

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to B \subset \mathbb{R}^n,\ f = (f_1, f_2, \ldots, f_n),\ \mathbf{a} \in A \\ g : \mathbb{R}^n \supseteq B \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \end{array}$$

Potom

$$[\mathcal{D}g(\mathbf{b})] = [g_{\cdot 1}(\mathbf{b}), g_{\cdot 2}(\mathbf{b}), \ldots, g_{\cdot n}(\mathbf{b})]\,.$$

Ďalej

$$[\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} f_{1\cdot 1}(\mathbf{a}) & f_{1\cdot 2}(\mathbf{a}) & \ldots & f_{1\cdot m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_{n\cdot 1}(\mathbf{a}) & f_{n\cdot 2}(\mathbf{a}) & \ldots & f_{n\cdot m}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

Potom z podmienky

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(\mathbf{b})]\,[\mathcal{D}f(\mathbf{a})]$$

dostávame

$$(g \circ f)_{\cdot k}(\mathbf{a}) = (g_{\cdot 1}(\mathbf{b}) f_{1\cdot k}(\mathbf{a}) + g_{\cdot 2}(\mathbf{b}) f_{2\cdot k}(\mathbf{a}) + \ldots + g_{\cdot n}(\mathbf{b}) f_{n\cdot k}(\mathbf{a}))_{\mathbf{b}=f(\mathbf{a})}.$$

Tento výsledok sa zapisuje symbolicky v tvare tzv. reťazového pravidla:

$$\frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_k} = \frac{\delta g}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_k} + \frac{\delta g}{\delta y_2}\frac{\delta y_2}{\delta x_k} + \ldots + \frac{\delta g}{\delta y_n}\frac{\delta y_n}{\delta x_k}.$$

3.3.6 Zmiešané parciálne derivácie

Z parciálnych derivácií (prvého rádu) je možné opäť získavať parciálne derivácie. Sú to parciálne derivácie druhého rádu. Ich derivovaním získavame parciálne derivácie tretieho rádu, atď. Napríklad, ak uvažujeme o parciálnej derivácii podľa druhej premennej, je možné počítať jej parciálnu deriváciu podľa štvrtej premennej nasledujúcim spôsobom:

$$(f_{\cdot 2})_{\cdot 4} = f_{\cdot 24} = \frac{\delta}{\delta x_4}\left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2}.$$

Podobne

$$(f_{\cdot 2})_{\cdot 2} = f_{\cdot 22} = \frac{\delta}{\delta x_2}\left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta {x_2}^2}.$$

Pre derivácie tretieho rádu dostávame

$$(f_{\cdot 24})_{\cdot 3} = (f_{\cdot 243}) = \frac{\delta}{\delta x_3}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2}\right) = \frac{\delta^3 f}{\delta x_3 \delta x_4 \delta x_2}.$$

Všimnime si, že pri rôznych zápisoch derivácie dostávame opačné poradia derivovania.

Veta 39 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je otvorená množina a je daná funkcia $f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$. Nech existujú $f_{\cdot 1} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$, $f_{\cdot 2} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$ a $f_{\cdot 12} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$. Nech funkcia $f_{\cdot 12} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$ je spojitá v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existuje $f_{\cdot 21}(\mathbf{a})$ a platí*

$$f_{\cdot 12}(\mathbf{a}) = f_{\cdot 21}(\mathbf{a}).$$

Veta 40 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r-tého rádu vrátane. Potom tie parciálne derivácie k-tého rádu ($2 \le k \le r$), v ktorých sa podľa rovnakých premenných rovnako veľa razy derivuje (bez ohľadu na poradie), sú rovnaké.*

Definícia 21 *Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r-tého rádu vrátane, tak hovoríme, že je r-razy spojito diferencovateľná.*

Príklady

1. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie
$$f(x, y) = yx^{\frac{x}{y}}.$$

2. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie
$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

3. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie
$$f(x, y, z) = 2^{xyz}.$$

4. Nech
$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
Vypočítajte $f_{\cdot 12}(0, 0)$ a $f_{\cdot 21}(0, 0)$. .... [$f_{\cdot 12}(0, 0) = -1$, $f_{\cdot 21}(0, 0) = 1$.]

5. Nech
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
Vypočítajte $f_{\cdot 12}(0, 0)$ a $f_{\cdot 21}(0, 0)$. ...... [$f_{\cdot 12}(0, 0) = 0$, $f_{\cdot 21}(0, 0) = 1$.]

3.3.7 Derivácia vo smere, gradient

Nech je daná funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ a A je otvorená množina. Nech funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. Uvažujme o jednotkovom vektore $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_m) \in \mathbb{R}^m$. Pretože A je otvorená množina, musí existovať $\tau > 0$ také, že pre každé $t \in (-\tau, \tau)$ platí $\mathbf{a} + \mathbf{e}t \in A$.

Potom je zrejmé, že funkcia

$$h : \mathbb{R} \supseteq (-\tau, \tau) \to A \subseteq \mathbb{R}^m,\ h(t) = \mathbf{a} + \mathbf{e}t = (a_1 + e_1 t, a_2 + e_2 t, \dots, a_m + e_m t)$$

je diferencovateľná v bode 0. Tak isto v bode 0 je diferencovateľná aj funkcia

$$r = (f \circ h) : \mathbb{R} \supseteq (-\tau, \tau) \to A \subseteq \mathbb{R},\ r(t) = f(h(t)) = f(\mathbf{a} + \mathbf{e}t).$$

Preto existuje

$$r'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{r(t) - r(0)}{t - 0}.$$

Túto deriváciu môžeme vypočítať pomocou reťazového pravidla nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} r'(0) =& f_{\cdot 1}(h(0))h_1'(0) + f_{\cdot 2}(h(0))h_2'(0) + \dots + f_{\cdot m}(h(0))h_m'(0) \\ =& f_{\cdot 1}(\mathbf{a})e_1 + f_{\cdot 2}(\mathbf{a})e_2 + \dots + f_{\cdot m}(\mathbf{a})e_m \\ =& (f_{\cdot 1}(\mathbf{a}), f_{\cdot 2}(\mathbf{a}), \dots, f_{\cdot m}(\mathbf{a})) \cdot (e_1, e_2, \dots, e_m) \\ =& (f_{\cdot 1}(\mathbf{a}), f_{\cdot 2}(\mathbf{a}), \dots, f_{\cdot m}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{e} \\ =& f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Číslo $r'(0) = f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a})$ nazývame derivácia funkcie f v bode $\mathbf{a}$ vo smere (jednotkového) vektora $\mathbf{e}$.

Vektor $(f_{\cdot 1}(\mathbf{a}), f_{\cdot 2}(\mathbf{a}), \dots, f_{\cdot m}(\mathbf{a}))$ nazývame gradient funkcie f v bode $\mathbf{a}$. Označujeme

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = (f_{\cdot 1}(\mathbf{a}), f_{\cdot 2}(\mathbf{a}), \dots, f_{\cdot m}(\mathbf{a})).$$

Pri tomto označení dostávame

$$f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}.$$

Z vlastnosti skalárného súčinu vyplýva, že

$$|f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a})| = |\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}| \le |\text{grad } f(\mathbf{a})||\mathbf{e}| = |\text{grad } f(\mathbf{a})|.$$

Z toho už vyplýva: Ak zvolíme jednotkový vektor v tvare

$$\mathbf{e} = \frac{\text{grad } f(\mathbf{a})}{|\text{grad } f(\mathbf{a})|},$$

potom dostaneme

$$f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \frac{\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \text{grad } f(\mathbf{a})}{|\text{grad } f(\mathbf{a})|} = |\text{grad } f(\mathbf{a})|.$$

Z toho vyplýva, že gradient udáva smer, v ktorom sa funkcia najrýchlejšie mení.

Príklady

1. Nech $f(x,y)=e^{xy^2}$, $\mathbf{e}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$. Vypočítajte $f_{\cdot\mathbf{e}}(2,1)$. .... $[f_{\cdot\mathbf{e}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-8e^4).]$

2. Nájdite jednotkový vektor, v ktorého smere sa funkcia $f(x,y,z)=y^2\sin(xyz)$ v bode $\mathbf{a}=(1,1,\pi)$ mení najrýchlejšie. Určite rýchlosť (veľkosť) tejto zmeny. .... $[\mathbf{e}=\frac{1}{\sqrt{1+2\pi^2}}(-\pi,-\pi,-1), f_{\cdot\mathbf{e}}=\sqrt{1+2\pi^2}.]$

3. Nech $f(x,y)=x^2-2xy+x-y^2+3y$. Nájdite bod, v ktorom je derivácia tejto funkcie v každom smere nulová. .... $[(\frac{1}{2},1).]$

3.3.8 Lokálne extrémy

Definícia 22 *Nech* $f:\mathbb{R}^m\supseteq A\to\mathbb{R}$ *a* $\mathbf{a}\in A$.

Nech existuje také prstencové okolie $\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a})$, *že:*

1. *Pre každé* $\mathbf{x}\in\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a})\cap A$ *je* $f(\mathbf{x})<f(\mathbf{a})$. *Potom hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne maximum.*

2. *Pre každé* $\mathbf{x}\in\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a})\cap A$ *je* $f(\mathbf{x})>f(\mathbf{a})$. *Potom hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne minimum.*

Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})$, *že:*

1. *Pre každé* $\mathbf{x}\in\mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})\cap A$ *je* $f(\mathbf{x})\le f(\mathbf{a})$. *Potom hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *lokálne maximum.*

2. *Pre každé* $\mathbf{x}\in\mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})\cap A$ *je* $f(\mathbf{x})\ge f(\mathbf{a})$. *Potom hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *lokálne minimum.*

Všetky uvedené pojmy nazývame spoločným termínom lokálne extrémy.

Ak pre každé $\mathbf{x}\in A$ *je* $f(\mathbf{x})\le f(\mathbf{a})$, *tak hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *totálne (globálne) maximum.*

Ak pre každé $\mathbf{x}\in A$ *je* $f(\mathbf{x})\ge f(\mathbf{a})$, *tak hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *totálne (globálne) minimum.*

Je zrejmé, že v bodoch, v ktorých funkcia nadobúda totálne extrémy, nadobda aj lokálne extrémy.

Veta 41 *(Nutná podmienka pre existenciu lokálneho extrému) Nech* $f:\mathbb{R}^m\supseteq A\to\mathbb{R}$. *Nech*

1. *A je otvorená množina a* $\mathbf{a}\in A$.

2. *Funkcia* f *je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a}$.

3. *Funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *lokálny extrém.*

Potom $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

Poznámka 4 *Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná, tak nezáleží na poradí derivovania v parciálnych deriváciách druhého rádu.*

Definícia 23 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine A a $\mathbf{a} \in A$. Potom definujem druhý diferenciál funkcie f ako funkciu*

$$\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f_{\cdot ij}(\mathbf{a}) x_i x_j.$$

To znamená, že hodnota druhého diferenciálu je homogenný polynóm druhého stupňa

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{x}) &= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\
&= \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\
&= f_{\cdot 11}(\mathbf{a}) x_1 x_1 + f_{\cdot 12}(\mathbf{a}) x_1 x_2 + \ldots + f_{\cdot 1m}(\mathbf{a}) x_1 x_m + \\
&+ f_{\cdot 21}(\mathbf{a}) x_2 x_1 + f_{\cdot 22}(\mathbf{a}) x_2 x_2 + \ldots + f_{\cdot 2m}(\mathbf{a}) x_2 x_m + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ f_{\cdot m1}(\mathbf{a}) x_m x_1 + f_{\cdot m2}(\mathbf{a}) x_m x_2 + \ldots + f_{\cdot mm}(\mathbf{a}) x_m x_m
\end{aligned}$$

Je zrejmé, že v tomto polynóme platí

$$f_{\cdot ij}(\mathbf{a}) = f_{\cdot ji}(\mathbf{a}).$$

Veta 42 *(Taylorova veta) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine A a nech pre každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je $(\mathbf{a} + t\mathbf{x}) \in A$. Potom existuje $t \in (0, 1)$ také, že*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \frac{\mathcal{D}^0 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{0!} + \frac{\mathcal{D}^1 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{1!} + \frac{\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a} + t\mathbf{x})(\mathbf{x})}{2!}.$$

Vo všeobecnosti homogenný polynóm druhého stupňa m-premenných je v tvare

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{x}) &= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\
&= a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{1m} x_1 x_m + \\
&+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + \ldots + a_{2m} x_2 x_m + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ a_{m1} x_m x_1 + a_{m2} x_m x_2 + \ldots + a_{mm} x_m x_m
\end{aligned}$$

V tomto polynóme platí $a_{ij} = a_{ji}$, pre $\quad i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Definícia 24 *Nech*

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \textit{pre} \quad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

je homogenný polynóm druhého stupňa m-premenných (symetrická kvadratická forma). Ak

1. *pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ je $P(\mathbf{x}) > 0$, tak hovoríme, že polynóm $P(\mathbf{x})$ je kladne definitný.*
2. *pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je $P(\mathbf{x}) \geq 0$ a existuje $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ také, že $P(\mathbf{x}) = 0$, tak hovoríme, že polynóm $P(\mathbf{x})$ je kladne semidefinitný.*
3. *pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ je $P(\mathbf{x}) < 0$, tak hovoríme, že polynóm $P(\mathbf{x})$ je záporne definitný.*
4. *pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je $P(\mathbf{x}) \leq 0$ a existuje $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ také, že $P(\mathbf{x}) = 0$, tak hovoríme, že polynóm $P(\mathbf{x})$ je záporne semidefinitný.*
5. *existujú $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbb{R}^m$ také, že $P(\mathbf{x_1})P(\mathbf{x_2}) < 0$, tak hovoríme, že polynóm $P(\mathbf{x})$ je indefinitný.*

Pri riešení príkladov je veľmi užitočná veta, ktorá hovorí o vzťahu definitnosti a semidefinitnosti symetrických homogenných polynómov druhého stupňa. Sformulujeme ju pomocou matice priradenej k danému polynómu.

Vo všeobecnosti homogenný polynóm druhého stupňa m-premenných je v tvare

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1m}x_1x_m + \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2m}x_2x_m + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_{m1}x_mx_1 + a_{m2}x_mx_2 + \ldots + a_{mm}x_mx_m, \end{aligned}$$

a teda je mu priradená matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Veta 43 *Polynóm $P(\mathbf{x})$ je kladne (záporne) definitný práve vtedy, keď $\mathbf{A}$ je regulárna matica (t.j. $\det \mathbf{A} \neq 0$) a súčasne $P(\mathbf{x})$ je kladne (záporne) semidefinitný polynóm.*

S každou symetrickým homogenným polynómom druhého stupňa sú spojené nasledujúce determinanty

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad \text{pre} \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Veta 44 *(Sylvestrovo kritérium) Nech je symetrický homogenný polynóm druhého stupňa* $P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$.

1. *Polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je kladne definitný práve vtedy keď* $\Delta_k > 0$ *pre* $k = 1, 2, \dots, m$.

2. *Polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je záporne definitný práve vtedy keď* $(-1)^k \Delta_k > 0$ *pre* $k = 1, 2, \dots, m$.

Zo Sylvestrovho kritéria a Vety 43 vyplýva

Dôsledok 10 *Ak* $\Delta_m \neq 0$ *a polynóm* $P(\mathbf{x})$ *nie je definitný (kladne, alebo záporne), tak je indefinitný.*

Veta 45 *(Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine* A. *Nech pre* $\mathbf{a} \in A$ *platí* $\mathrm{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. *Potom*

1. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je kladne definitný, tak funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne minimum.*

2. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je záporne definitný, tak funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne maximum.*

3. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je indefinitný, tak funkcia* f *nemá v bode* $\mathbf{a}$ *extrém.*

Definícia 25 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *je ohraničená a uzavretá množina. Potom hovoríme, že* A *je kompaktná množina.*

Veta 46 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá na kompaktnej množine* A. *Potom na tejto množine nadobúda (totálne) maximum a aj minimum. To znamená, že existujú* $\mathbf{c}, \mathbf{C} \in A$ *také, že pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *platí:*

$$f(\mathbf{c}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{C}).$$

Príklady

Vyšetrite lokálne extrémy nasledujúcich funkcií:

1. $f(x,y,z) = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$. [$\mathbf{a} = (0,0,-1)$, nemá extrém, $\mathbf{b} = (24,-144,-1)$, rýdze lokálne minimum.]
2. $f(x,y,z) = 35-6x+2z+x^2-2xy+2y^2+2yz+3z^2$. .... [$\mathbf{a} = (8,5,-2)$, rýdze lokálne minimum.]
3. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy-2x+3y-4z+6$. .... [$\mathbf{a} = (\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 2)$, rýdze lokálne minimum, $f(\mathbf{a}) = \frac{-1}{3}$.]
4. $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$. .... [$\mathbf{a} = (0,0,0)$, nemá extrém.]
5. $f(x,y,z) = 6x^2+5y^2+14z^2+4xy-8xz-2yz+1$. .... [$\mathbf{a} = (0,0,0)$, rýdze lokálne minimum, $f(0,0,0) = 1$.]
6. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$. .... [$\mathbf{a} = (-1,-2,-3)$, rýdze lokálne minimum.]
7. $f(x,y) = x^3+y^3+3xy+2$. .... [$\mathbf{a} = (0,0)$, nemá extrém.]
8. $f(x,y) = x^2+y^3$. .... [$\mathbf{a} = (0,0)$, nemá extrém.]
9. $f(x,y) = x^2+y^4$. .... [$\mathbf{a} = (0,0)$, rýdze lokálne minimum.]
10. $f(x,y) = x^2(1+y^2)$. .... [$\mathbf{a} = (0,y)$, lokálne minimum.]
11. $f(x,y) = y\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+y}$. .... [$\mathbf{a} = (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$, nemá extrém.]
12. $f(x,y) = x^3+3y^2-6xy-6x+6y$. . [$\mathbf{a} = (0,-1)$, nemá extrém, $\mathbf{b} = (2,1)$, rýdze lokálne minimum.]
13. $f(x,y) = x^2+y^2+xy-2x-y$. [$\mathbf{a} = (1,0)$, rýdze lokálne minimum.]
14. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$. .... [$\mathbf{a} = (0,0)$, rýdze lokálne minimum, $\mathbf{b} = (\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2})$, nemá extrém.]

Nájdite (totálne, globálne) extrémy funkcií:

1. $f(x,y) = x^2-2y^2+4xy-6x-1$ na množine $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničená priamkami $x=0,\ y=0,\ x+y-3\}$. .... [$-19 \le f(x,y) \le -1$.]
2. $f(x,y) = x^2y(2-x-y)$ na trojuholníku $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničený priamkami $x=0,\ y=0,\ x+y=6\}$. .... [$-128 \le f(x,y) \le \frac{1}{4}$.]
3. $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$ na obdĺžniku $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničený priamkami $x=0,\ x=2,\ y=-1,\ y=2\}$. ..... [$-1 \le f(x,y) \le 13$.]

4. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16)$ na množine $A = \{(x,y) \mid \ x^2 + y^2 \leq 49\}$. $[-20 \leq f(x,y) \leq 149.]$

5. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ na kruhu $A = \{(x,y) \mid \ x^2 + y^2 \leq 25\}$. ...... $[0 \leq f(x,y) \leq 5.]$

Kapitola 4

Integrálny počet FVP

4.1 Úvodné pojmy

Definícia 26 *Množinu*

$$
\begin{aligned}
I &= \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_m, b_m\rangle \\
&= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \le x_i \le b_i \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, m\}
\end{aligned}
$$

nazývame uzavretý interval. Číslo

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_m - a_m)$$

nazývame miera intervalu I.

Definícia 27 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$. Ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje taká konečná množina intervalov $I_1, I_2, \ldots, I_k$, že*

- $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j$,
- $\mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots + \mu(I_k) < \varepsilon$,

tak hovoríme, že A je množina miery nula.

Definícia 28 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$. Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ nazývame hraničným bodom množiny A, ak v každom jeho okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a})$ existujú body aj z množiny A a aj body, ktoré do množiny A nepatria. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame hranica množiny a označujeme znakom* $\mathrm{hr}\,(A)$.

Definícia 29 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je ohraničená množina. Ak hranica $\mathrm{hr}\,(A)$ tejto množiny je množina miery nula, tak hovoríme, že množina A je merateľná množina.*

Definícia 30 *Nech* $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *a* $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *sú také dve spojité funkcie, že* $f(x) \leq g(x)$ *pre každé* $x \in \langle a,b\rangle$. *Potom množinu*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x,y]$.

Analogicky definujeme elementárnu oblasť typu $[y,x]$.

Definícia 31 *Nech* $B \subset \mathbb{R}^2$ *je elementárna oblasť typu* $[x,y]$. *Nech* $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ *a* $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ *sú také dve spojité funkcie, že* $\varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$ *pre každé* $(x,y) \in B$. *Potom množinu*

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B,\ \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x,y,z]$.

Množina $A \subset \mathbb{R}^3$ *je elementárnou oblasťou typu* $[x,y,z]$ *práve vtedy, keď*

- *existujú spojité funkcie* $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *a* $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *také, že* $f(x) \leq g(x)$ *pre každé* $x \in \langle a,b\rangle$,
- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$,
- *existujú spojité funkcie* $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ *a* $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ *také, že* $\varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$ *pre každé* $(x,y) \in B$,
- $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x),\ \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$.

Podobným spôsobom definujeme v $\mathbb{R}^3$ elementárne oblasti aj iných typov Elementárne oblasti je možné definovať aj v priestore $\mathbb{R}^m$ pre $m > 3$.

Veta 47 *Všetky elementárne oblasti sú merateľné množiny.*

4.2 Definícia integrálu na intervale

Definícia 32 *1. Nech*

$$\begin{aligned} I &= \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_m,b_m\rangle \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ pre } i = 1,2,\ldots,m\} \end{aligned}$$

je uzavretý interval. Nech D_i *je delenie intervalu* $\langle a_i,b_i\rangle$ *pre* $i = 1,2,\ldots,m$. *Potom* m*-ticu* $D = (D_1,D_2,\ldots,D_m)$ *nazývame delenie intervalu* I. *Číslo* $\|D\| = \max\{\|D_i\| \mid i = 1,2,\ldots,m\}$ *nazývame norma delenia* D. *Každým delením* m*-rozmerného intervalu* I *je určený konečný počet* m*-rozmerných deliacich intervalov* $I_1,I_2,\ldots,I_k$, *na ktoré je rozdelený interval* I. *To znamená, že* $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$ *a deliace intervaly môžu mať spoločné len hraničné body.*

2. *Nech* $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť delení intervalu* I. *Ak* $\lim_{n\to\infty} \|D^{(n)}\| = 0$, *potom hovoríme, že postupnosť* $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *je normálna postupnosť delení intervalu* I.

3. *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $I \subseteq M$ *a* D *s deliacimi intervalmi* $I_1, I_2, \ldots, I_k$ *je ľubovolné delenie intervalu* I. *Nech body* $\mathbf{c}_i \in I_i$ *sú ľubovolne zvolené pre* $i = 1, 2, \ldots, k$. *Potom číslo*

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\mathbf{c}_i)\mu(I_i)$$

nazývame integrálny súčet funkcie f *pre dané delenie* D *intervalu* I *a voľbu bodov* $c_i \in I_i$.

Definícia 33 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $I \subseteq M$. *Ak pre každú normálnu postupnosť delení* $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *intervalu* I *a každú voľbu bodov* c_i *v integrálnych súčtoch* $S_{D^{(n)}}(f)$, *postupnosť* $(S_{D^{(n)}}(f))_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k tomu istému číslu* J, *tak hovoríme, že funkcia* f *je integrovateľná na intervale* I. *Číslo*

$$J = \lim_{n\to\infty} S_{D^{(n)}}(f)$$

nazývame integrál funkcie f *na intervale* I *a označujeme*

$$J = \int\limits_I f = \int\limits_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \iint\limits_I f(x,y)\, dxdy = \iiint\limits_I f(x,y,z)\, dxdydz.$$

Veta 48 *(Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervale* $I \subseteq M$. *Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Veta 49 *(Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $I \subseteq M$. *Nech množina bodov z intervalu* I, *v ktorých* f *nie je spojitá, je množina miery nula. Potom je funkcia* f *na intervale* I *integrovateľná.*

4.3 Definícia integrálu na množine

Definícia 34 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na ohraničenej množine* $A \subseteq M$. *Nech* $I \supseteq A$ *je ľubovolný interval. Nech*

$$f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \textit{pre } \mathbf{x} \in A, \\ 0 & \textit{pre } \mathbf{x} \notin A. \end{cases}$$

Ak funkcia $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na intervale* I, *tak hovoríme, že funkcia* f *je integrovateľná na množine* A *a píšeme*

$$\int\limits_A f = \int\limits_I f_A = \iint\limits_A f(x,y)\,dxdy = \iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Veta 50 *(Postačujúca podmienka integrovateľnosti na množine) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na merateľnej množine* $A \subseteq M$. *Nech množina tých bodov z množiny* A, *v ktorých* f *nie je spojitá, je množina miery nula. Potom je funkcia* f *na množine* A *integrovateľná.*

4.4 Vlastnosti integrálu

Veta 51 *Nech funkcie* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *sú integrovateľné na množine* $A \subseteq M$ *a* $c \in \mathbb{R}$ *je ľubovolná konštanta. Potom*

1. *Funkcia* $(f+g) : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na množine* A *a platí*

$$\int\limits_A (f+g) = \int\limits_A f + \int\limits_A g.$$

2. *Funkcia* $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na množine* A *a platí*

$$\int\limits_A (cf) = c\int\limits_A f.$$

3. *Funkcia* $|f| : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na množine* A *a platí*

$$|\int\limits_A f| \le \int\limits_A |f|.$$

Veta 52 *Nech* $A \subset \mathbb{R}^m$ *je množina miery nula a funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na množine* A. *Potom* $\int\limits_A f = 0$.

Veta 53 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na množinách* $A, B \subseteq M$, *pričom* $A \cap B$ *je množina miery nula. Potom*

$$\int\limits_{A\cup B} f = \int\limits_A f + \int\limits_B f.$$

Definícia 35 *Nech* $A \subset \mathbb{R}^m$ *je merateľná množina. Potom mieru* $\mu(A)$ *množiny* A *definujeme pomocou predpisu:*

$$\mu(A) = \int\limits_A 1.$$

4.5 Fubiniho vety

Veta 54 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^2 \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$$

typu $[x, y]$. Nech pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ existuje integrál

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy.$$

Potom

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b (\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy) dx.$$

Podobná veta platí pre elementárnu oblasť typu $[y, x]$.

Veta 55 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^3 \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B,\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\}$$

typu $[x, y, z]$. Nech pre každé $(x, y) \in B$ existuje integrál

$$\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Potom

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_B (\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz) dxdy.$$

Dôsledok 11 *Nech A je elementárna oblasť typu $[x, y, z]$ a na elementárnej oblasti $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$ sú splnené podmienky Fubiniho vety pre funkciu dvoch premenných. Potom*

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_a^b (\int\limits_{g(x)}^{h(x)} (\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz) dy) dx.$$

Podobné vety platia pre zvyšné typy elementárnych oblastí v $\mathbb{R}^3$.

Príklady

Vypočítajte:

1. $\iint\limits_I x^2y\cos(xy^2)dxdy$, ak $I = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, 2\rangle$. .... $[-\frac{\pi}{16}.]$

2. $\iint\limits_I ye^{x+y}dxdy$, ak $I = \langle 0, 4\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. .... $[e^4 - 1.]$

3. $\iint\limits_I \ln(1+x)^{2y}dxdy$, ak $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. .... $[2\ln 2 - 1.]$

4. $\iint\limits_I \frac{1}{(1-xy)^2}dxdy$, ak $I = \langle 2, 3\rangle \times \langle 1, 2\rangle$. .... $[\ln\frac{6}{5}.]$

5. $\iint\limits_A \cos(x+y)dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi,\ x \le y \le \pi\}$. .... $[0.]$

6. $\iint\limits_A ye^x dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid y^2 \le x \le y+2\}$. .... $[\frac{1}{2}(e^4+e).]$

7. $\iint\limits_A (x+y)dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ y \le x \le 2y\}$. ...... $[\frac{7}{3}.]$

8. $\iint\limits_A \frac{x^2}{y^2}dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 < \frac{1}{x} \le y \le x,\ x \le 2\}$. .... $[\frac{9}{4}.]$

9. $\iint\limits_A |x|dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x^2,\ 4x^2 + y^2 = 12$, a platí, že $y \ge 0$. .... $[4\sqrt{3} - \frac{10}{3}.]$

10. $\iint\limits_A \sqrt{xy - y^2}dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 3,\ \frac{x}{10} \le y \le x\}$. . $[162.]$

11. Vypočítajte plošný obsah množiny A, ktorá je ohraničená krivkami $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1,\ y^2 = x+1$ a obsahuje bod $(0,0)$. .... $[8\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).]$

12. $\iint\limits_A (x^2y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x,\ y = x^2$. [.]

13. $\iint\limits_A (x^2+y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = \frac{1}{2}x,\ y = 2x,\ xy = 2$, pričom $x \ge 0$. .... [.]

14. $\iint\limits_A (x^2y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x - 4,\ y^2 = 2x$. .... [.]

15. $\iint\limits_A (x+y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $x = 0,\ y = \frac{3}{2}x,\ y = 4 - (x-1)^2$, pričom $x \ge 0$. .... [.]

16. $\iiint\limits_A y\cos(x+z)dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $y = \sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ x+z=\frac{\pi}{2}$. .... $[\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.]$

17. $\iiint\limits_A xyzdxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$, pričom $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$. ...... $[\frac{1}{48}.]$

18. $\iiint\limits_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3}dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$. .... $[\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).]$

19. $\iiint\limits_A x^2yz^3dxdydz$, ak $A=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x,\ 0\leq z\leq xy\}$. .... [.]

20. $\iiint\limits_A \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2}dxdydz$, ak $A=\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 5,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$. .... [.]

4.6 Transformácie integrálu

Veta 56 *(Transformácia pomocou polárnych súradníc) Nech* $Z=\langle 0,\infty)\times\langle -\pi,\pi\rangle$. *Nech*

$$g:\mathbb{R}^2\supset Z\to\mathbb{R}^2,\ g(\varrho,\varphi)=(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi),\quad J_g(\varrho,\varphi)=\varrho.$$

Nech $A,B\subset\mathbb{R}^2$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že*

1. $B\subseteq Z$,

2. $g(B)=A$.

Nech $f:\mathbb{R}^2\supseteq A\to\mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_B f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi)|J_g(\varrho,\varphi)|\,d\varrho d\varphi.$$

Veta 57 *(Transformácia pomocou cylindrických súradníc) Nech* $Z=\langle 0,\infty)\times\langle -\pi,\pi\rangle\times(-\infty,\infty)$. *Nech*

$$g:\mathbb{R}^3\supset Z\to\mathbb{R}^3,\ g(\varrho,\varphi,u)=(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,u),\quad J_g(\varrho,\varphi,u)=\varrho.$$

Nech $A,B\subset\mathbb{R}^3$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že*

1. $B\subseteq Z$,

2. $g(B)=A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_B f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, u)|J_g(\varrho,\varphi,u)|\,d\varrho d\varphi du.$$

Veta 58 *(Transformácia pomocou sférických súradníc) Nech* $Z = \langle 0,\infty) \times \langle -\pi,\pi\rangle \times \langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$. *Nech*

$$g : \mathbb{R}^3 \supset Z \to \mathbb{R}^3,\ g(\varrho,\varphi,\vartheta) = (\varrho\cos\varphi\cos\vartheta, \varrho\sin\varphi\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta), \quad J_g(\varrho,\varphi,\vartheta) = \varrho^2\cos\vartheta.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^3$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že*

1. $B \subseteq Z$,
2. $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_B f(\varrho\cos\varphi\cos\vartheta, \varrho\sin\varphi\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)|J_g(\varrho,\varphi,\vartheta)|\,d\varrho d\varphi d\vartheta.$$

Veta 59 *(Transformácia pomocou afinných súradníc) Nech*

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ g(u,v,w) = (a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w, a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w, a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w).$$

Nech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad a \quad J_g(u,v,w) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Nech

1. $J_g(u,v,w) \neq 0$,
2. $A, B \subset \mathbb{R}^3$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že* $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz = \\ &= \iiint\limits_B f(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + \\ &+ a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)|J_g(u,v,w)|\,dudvdw.\end{aligned}$$

Príklady

1. Vypočítajte $\iint\limits_A \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, ak $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$. $[\frac{16\pi}{3}]$.
2. Vypočítajte $\iint\limits_A 2(x^2+y^2)dxdy$, ak $A=\{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge |x|\}$. .... [].
3. Vypočítajte $\iint\limits_A \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, ak $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2x\}$. . . [].
4. Vypočítajte $\iint\limits_A \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, ak $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. .... $[\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}]$.
5. Vypočítajte $\iint\limits_A \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, ak $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. .... $[(10\ln 10-9)\frac{\pi}{4}]$.
6. Pomocou transformácie polárnymi súradnicami vypočítajte objem kužela $A=\{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$. .... $[\frac{8}{3}\pi.]$
7. Vypočítajte $\iiint\limits_A (x^2+y^2)dxdydz$, ak ak množina A je ohraničená plochami $x^2+y^2=2z,\ z=2$. .... $[\frac{16\pi}{3}]$.
8. Vypočítajte $\iiint\limits_A x^2y dxdydz$, ak ak množina A je ohraničená plochami $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ z=0\ x+z=3$. .... [.]
9. Vypočítajte $\iiint\limits_A xy\sqrt{z}dxdydz$, ak ak množina A je ohraničená plochami $x^2+y^2=4z^2,\ x=0,\ y=0,\ z=1$, pričom $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$. .... $[\frac{4}{11}]$.
10. Vypočítajte objem telesa $A=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z \le 4-(x^2+y^2)\}$. $[4\pi]$
11. Vypočítajte objem telesa A, ktoré je ohraničené plochami $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2+z^2=16,\ y=0\ z=0$, pričom $z \ge 0$. .... [.]
12. $\iiint\limits_A zdxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x=0,\ y=0,\ x^2+y^2+z^2=2,\ x^2+y^2=z^2$, pričom $x \ge 0,\ y \ge 0$. .... $[\frac{\pi}{8}.]$
13. Vypočítajte $\iiint\limits_A (x^2+y^2)dxdydz$, ak $A=\{(x,y,z) \mid 0 \le z,\ 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9\}$. .... $[\left(\frac{3^5-2^5}{15}\right)2\pi]$.
14. Vypočítajte $\iiint\limits_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, ak $A=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le z\}$. .... $[\frac{\pi}{10}]$.

15. Vypočítajte $\iiint\limits_A z^2 dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2+z^2 \leq 4z\}$. .... [$\frac{59}{15}\pi$.]

16. Vypočítajte objem telesa A, ktoré je ohraničené rovinami $2x-y+z-3=0,\ 2x-y+z=0,\ x+y+z-5=0,\ x+y+z=0, x+2y+2z-4=0,\ x+2y+2z=0$. .... [30.]

17. Vypočítajte objem elipsoidu $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$. .... [$32\pi$.]

18. Vypočítajte objem telesa $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq z \leq 4-(x^2+y^2)\}$. [].

19. Vypočítajte objem telesa $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2-6z \leq 0,\ x^2+y^2 < \frac{z^2}{3}\}$. .... [.]

20. $\iiint\limits_A x^2yz^3 dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq xy\}$. .... [.]

21. $\iiint\limits_A \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2} dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 5,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. .... [.]