

Obsah

1	Integrálny počet FJP	3
1.1	Určitý integrál	3
1.1.1	Definícia určitého integrálu	3
1.1.2	Vlastnosti určitého integrálu	4
1.1.3	Veta o strednej hodnote	5
1.1.4	Hlavná veta integrálneho počtu	6
1.2	Neurčitý integrál	7
1.2.1	Definícia	7
1.2.2	Metóda per partes	8
1.2.3	Substitučná metóda	8
1.2.4	Niektoré význačné substitúcie	9
1.2.5	Príklady	13
2	Fourierove rady	21
2.0.6	Príklady	22
3	Diferenciálny počet FVP	25
3.1	Množiny	25
3.2	Limita a spojitosť funkcie	27
3.3	Diferencovateľnosť funkcie	31
3.3.1	Lineárne zobrazenia	31
3.3.2	Definícia diferencovateľnosti	32
3.3.3	Parciálne derivácie	33
3.3.4	Geometrický význam parciálnych derivácií	36
3.3.5	Diferencovateľnosť zloženej funkcie	36
3.3.6	Zmiešané parciálne derivácie	37
3.3.7	Derivácia vo smere, gradient	39
3.3.8	Lokálne extrémny	40
4	Integrálny počet FVP	47
4.1	Úvodné pojmy	47
4.2	Definícia integrálu na intervale	48
4.3	Definícia integrálu na množine	49

4.4	Vlastnosti integrálu	50
4.5	Fubiniho vety	51
4.6	Transformácie integrálu	53

Kapitola 1

Integrálny počet FJP

1.1 Určitý integrál

1.1.1 Definícia určitého integrálu

Definícia 1 1. Nech $\langle a, b \rangle$ je uzavretý interval. Nech $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ sú také, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$. Potom $k + 1$ -ticu $D = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ nazývame delenie intervalu $\langle a, b \rangle$. Intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ nazývame deliace intervaly.

2. Nech $D = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ je delenie intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom číslo $\|D\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ nazývame norma delenia D .

3. Nech $(D_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b \rangle$. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $(D_n)_{n=1}^\infty$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b \rangle$.

4. Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a $D = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ je ľubovoľné delenie intervalu $\langle a, b \rangle$. Nech body $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ sú ľubovoľne zvolené pre $i = 1, 2, \dots, k$. Potom číslo

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^k f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazývame integrálny súčet funkcie f pre dané delenie D intervalu $\langle a, b \rangle$ a voľbu bodov $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Definícia 2 Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n=1}^\infty$ intervalu $\langle a, b \rangle$ a každú voľbu bodov c_i v integrálnych súčtoch $S_{D_n}(f)$, postupnosť $(S_{D_n}(f))_{n=1}^\infty$ konverguje k tomu istému číslu J , tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Číslo

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{D_n}(f)$$

nazývame určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$ a označujeme

$$J = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx.$$

Veta 1 (Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Definícia 3 *Nech sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. Funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$.
2. V intervale $\langle a, b \rangle$ existuje len konečný počet bodov, v ktorých táto funkcia nie je spojitá.
3. V každom bode z intervalu (a, b) existuje vlastná limita funkcie f sprava a aj zľava.
4. Existujú vlastné limity $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$.

Potom hovoríme, že funkcia f je po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 2 (Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

1.1.2 Vlastnosti určitého integrálu

Veta 3 *Nech funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom*

1. Funkcia $(f + g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. Funkcia $(cf) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f.$$

3. Funkcia $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

Veta 4 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na každom intervale $\langle c, d \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$.*

Veta 5 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a aj na intervale $\langle b, c \rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na intervale $\langle a, c \rangle$ a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Veta 6 *Nech funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$. Potom platí*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

1.1.3 Veta o strednej hodnote

Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale ohraničená. To znamená, že existujú $k, K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $k \leq f(x) \leq K$. Preto platí

$$\int_a^b k \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b K \, dx.$$

Z toho dostávame

$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq K(b-a).$$

A ďalej

$$k \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq K.$$

Číslo

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

nazývame stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 7 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom existuje $c \in \langle a, b \rangle$ také, že*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

To znamená, že spojitá funkcia dosahuje na intervale $\langle a, b \rangle$ svoju strednú hodnotu.

1.1.4 Hlavná veta integrálneho počtu

Definícia 4 *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom funkciu*

$$F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t) dt$$

nazývame funkcia hornej hranice integrálu funkcie f .

Veta 8 *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

je spojitá.

Veta 9 (Hlavná veta integrálneho počtu) *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b \rangle$) a navyše

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé } x \in \langle a, b \rangle.$$

Definícia 5 *Nech je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, kde I je interval. Nech existuje funkcia $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ taká, že*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé } x \in I.$$

Potom funkciu $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame primitívna funkcia funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Veta 10 *Nech funkcia $F_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívnu funkciou funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom funkcia $F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívnu funkciou funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ práve vtedy, ak existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in I$ je $F_2(x) = F_1(x) + c$. To znamená, že dve primitívne funkcie tej istej funkcie sa líšia iba o konštantu.*

Veta 11 (Newtonov - Leibnitzov vzorec) *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je jej ľubovoľná primitívna funkcia. Potom*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Poznámka 1 *Definíciu určitého integrálu zovšeobecňujeme nasledujúcim spôsobom:*

$$1. \int_a^a f = 0.$$

$$2. \text{ Ak } a > b, \text{ definujeme } \int_a^b f = -\int_b^a f.$$

3. *Nech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Môžeme definovať funkciu*

$$G : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_x^b f(t) dt.$$

Táto funkcia je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b \rangle$) a platí

$$G'(x) = -f(x) \quad \text{pre každé } x \in \langle a, b \rangle.$$

4. *Nech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, I je interval a bod $a \in I$. Definujme funkciu $G : I \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \int_a^x f(t) dt$. Nie je problém ukázať, že táto funkcia je diferencovateľná a $G'(x) = f(x)$ pre každé $x \in I$.*

Veta 12 *Nech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia na intervale I . Potom k nej existuje primitívna funkcia.*

1.2 Neurčitý integrál

1.2.1 Definícia

Definícia 6 *Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia. Potom jej ľubovoľnú primitívnu funkciu $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame neurčitý integrál funkcie f . Označujeme $F(x) = \int f(x) dx$.*

Poznámka 2 1. Je zrejmé, že označením $\int f(x) dx$ nie je výsledok jednoducho určený. Je to jedna z primitívnych funkcií funkcie f . Teda $\int \sin x dx = -\cos x$ rovnako dobre, ako $\int \sin x dx = -\cos x + 356$. Teda tieto výsledky sa môžu líšiť o konštantu. Preto, keď napíšeme

$$\int \sin x dx = \int \sin x dx,$$

nebude to znamenať, že

$$-\cos x = -\cos x + 356,$$

ale že existuje konštanta $c \in \mathbb{R}$ taká, že

$$-\cos x + c = -\cos x + 356.$$

2. Označenie $F(x) = \int f(x) dx$ nie je možné chápať ako rovnosť funkčných hodnôt. Rovnosť $\int \sin 3d3 = -\cos 3$ nedáva žiaden zmysel. Označenie $\int f(x) dx$ treba chápať ako úlohu o nájdení jednej z primitívnych funkcií funkcie f a rovnosť $F(x) = \int f(x) dx$ ako jeden z možných výsledkov uvedenej úlohy.

1.2.2 Metóda per partes

Veta 13 Nech funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojito diferencovateľné na intervale I . Nech $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(f'g) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $(fg - H) : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(fg') : I \rightarrow \mathbb{R}$. V symbolike neurčitých integrálov to znamená, že

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Dôsledok 1 Nech funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojito diferencovateľné na intervale I a body $a, b \in I$ sú ľubovoľne zvolené. Potom

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

1.2.3 Substitučná metóda

Veta 14 (Prvá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $(F \circ \varphi) : J \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \rightarrow \mathbb{R}$.

Dôsledok 2 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ je spojitou diferencovateľná a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $\alpha, \beta \in J$ sú ľubovoľné. Potom*

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Veta 15 *(Druhá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I$ je spojitou diferencovateľná bijekcia a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $(G \circ \varphi^{-1}) : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.*

Dôsledok 3 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I$ je spojitou diferencovateľná bijekcia a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom pre každé $a, b \in I$ platí:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

1.2.4 Niektoré význačné substitúcie

I. Integrály typu

$$\int R\left(c, x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[k_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Vypočítame najmenší spoločný násobok $k = \text{lcm}\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$.
2. Položíme

$$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t = \varphi^{-1}(x).$$

3. Potom

$$x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a} = \varphi(t).$$

4. Ďalej

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{ad - bc}{(ct^k - a)^2} kt^{k-1} dt.$$

5. Ešte máme

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad \text{preto} \quad \sqrt[k_i]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{\frac{k}{k_i}}.$$

6. Je zrejmé, že $\frac{k}{k_i}$ je celé číslo. Preto po dosadení do pôvodného integrálu dostávame integrál

$$\int R\left(c, \frac{b - dt^k}{ct^k - a}, t^{\frac{k}{k_1}}, t^{\frac{k}{k_2}}, \dots, t^{\frac{k}{k_s}}\right) \frac{ad - bc}{(ct^k - a)^2} kt^{k-1} dt,$$

čo je integrál z racionálnej funkcie.

II. Integrály typu

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

kde $a > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x.$$

2. Potom

$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{a}xt + ax^2.$$

V tejto rovnosti vypadne druhá mocnina x . Preto môžeme vypočítať x .

3. Dostávame

$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}} = \varphi(t).$$

4. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{at})^2} dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x = \pm t \pm \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}}.$$

6. Preto daný integrál

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

je prevedený na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}}, \pm t \pm \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}}\right) \left(\frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{at})^2}\right) dt.$$

III. Integrály typu

$$\int R(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

kde $c > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$

Pre jednoduchosť budeme uvažovať len o jednej zo štyroch možností

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - xt.$$

2. Potom

$$ax^2 + bx + c = c - 2\sqrt{c}xt + x^2t^2.$$

V tejto rovnosti vypadne c , preto môžeme krátiť x -om. Vypočítame x .

3. Dostávame

$$x = \frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a} = \varphi(t).$$

4. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{-2(t^2\sqrt{c} + tb + \sqrt{c}a)}{(t^2 - a)^2} dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - xt = \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}\right)t.$$

6. Preto daný integrál

$$\int R(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

je prevedený na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, \frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}, \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}\right)t\right) \left(\frac{-2(t^2\sqrt{c} + tb + \sqrt{c}a)}{(t^2 - a)^2}\right) dt.$$

IV. Integrály typu

$$\int R(c, \sin x, \cos x) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame

$$x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

4. Ďalej

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

5. Preto daný integrál

$$\int R(c, \sin x, \cos x) dx$$

prevedieme na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

V. Integrály typu

$$\int R(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\operatorname{tg} x = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame

$$x = \operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

4. Ďalej

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

5. Preto daný integrál

$$\int R(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x) dx$$

prevedieme na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, t, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt.$$

1.2.5 Príklady

Časť I

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x \sin x dx. \dots\dots\dots [\sin x - x \cos x].$
2. $\int (x^3 - x + 1)e^{2x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{e^{2x}}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) \right].$
3. $\int_0^\pi (2x^2 + 3) \cos 2x dx. \dots\dots\dots [\pi].$
4. $\int x \log_{10} 2x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} (\log_{10} 2x - \frac{1}{2 \ln 10}) \right].$
5. $\int e^x \sin x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) \right].$
6. $\int \frac{e^x}{(e^x+3)^7} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{6(e^x+3)^6} \right].$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} \right].$
8. $\int \frac{x}{\sqrt{3-4x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{4} \sqrt{3-4x^2} \right].$
9. $\int \cos(\ln x) dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) \right].$
10. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx. \dots\dots\dots [5x + 2 \ln |x| + 3 \ln |x-2| + 4 \ln |x+2|].$
11. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3} dx. \dots\dots\dots \left[2 \ln |x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - 2 \ln |x+1| \right].$
12. $\int \frac{1}{x^3+1} dx. \dots\dots \left[\frac{1}{3} \ln |x+1| - \frac{1}{6} \ln (x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} (2x-1) \right].$
13. $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}+2e^x+7} dx. \dots\dots \left[\frac{1}{2} (\ln 42 - \ln 15) - \frac{3}{\sqrt{6}} \left(\operatorname{arctg} \frac{6}{\sqrt{6}} - \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{6}} \right) \right].$
14. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^4 x + \cos^3 x} \sin x dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{7}{2} + 2 \ln \frac{3}{2} \right].$

15. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{12}{\sqrt[12]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 24 \ln \left| \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x+1}} \right| \right].$
16. $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}, t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} \right].$
17. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}} dx. \dots\dots \left[\frac{3t}{2} - \frac{\ln|1-2t|}{2} - \frac{33}{4(1-2t)}, t = -x + \sqrt{x^2+x+3} \right].$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[-2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{4-3x-x^2}-2}{x} \right) \right].$
19. $\int_0^1 \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx. \dots\dots\dots [-8, 345].$
20. $\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5} (3 \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) + 1) \right].$
21. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1} dx. \dots\dots\dots \left[\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \right].$
22. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx. \dots\dots\dots [1, 246].$
23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5+2 \cos x} dx. \dots\dots\dots [0, 152].$
24. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:
- (a) $y = x \ln x, x = \frac{1}{2}, x = 2, y = 0. \dots\dots\dots \left[-\frac{9}{16} + \frac{15}{8} \ln 2 \right].$
- (b) Parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1, 3], B = [4, 0]. \dots\dots\dots \left[\frac{9}{4} \right].$
25. Vypočítajte objem zrezaného kužela, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi o_x . Polomery jeho podstáv sú $r = 1, R = 2$ a výška $v = 3. \dots\dots\dots [7\pi].$

Časť II

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x \operatorname{arctg} x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right].$
2. $\int x^2 e^{3x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) \right].$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(2x) \sin x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{2}{5} e^{\pi} + \frac{1}{5} \right].$
4. $\int x \ln x^2 dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} (\ln x^2 - 1) \right].$

5. $\int \ln(x^2 + 1)dx.$ $[x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x].$
6. $\int_1^e \ln^2 x dx.$ $[e^{-2}].$
7. $\int \frac{1}{4+3x^2} dx.$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{2}\right].$
8. $\int \frac{x}{4+3x^2} dx.$ $\left[\frac{1}{6} \ln(4 + 3x^2)\right].$
9. $\int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx.$ $\left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right].$
10. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$ $[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)].$
11. $\int e^x \cotg e^x dx.$ $[\ln |\sin e^x|].$
12. $\int x \sqrt[3]{x+2} dx.$ $\left[\frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+2)^7} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^4}\right].$
13. $\int \frac{1-x}{x^2+x} dx.$ $[\ln |x| - 2 \ln |x+1|].$
14. $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2} dx.$ $\left[\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln |x-2| - 2 \ln |x+1|\right].$
15. $\int \frac{x}{x^3-3x+2} dx.$ $\left[\frac{2}{9} \ln |x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9} \ln |x+2|\right].$
16. $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5} dx.$ $\left[\ln |x+5| - \ln |x+1| - \frac{3}{x+1}\right].$
17. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7} dx.$ $\left[\frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 7) - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}}\right].$
18. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7} dx.$
 $\left[\frac{3}{10} \ln |x-1| - \frac{3}{20} \ln(x^2 + 2x + 7) + \frac{\sqrt{6}}{15} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right].$
19. $\int \frac{5x^3-5x^2-11x+5}{x^2-x-2} dx.$ $\left[\frac{5x^2}{2} + \ln |x-2| - 2 \ln |x+1|\right].$
20. $\int \frac{e^x+10}{(e^{2x}-2e^x+5)} dx.$ $\left[2x - \ln |e^{2x} - 2e^x + 5| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^x-1}{2}\right)\right].$
21. $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{2x}+2e^x-3}{e^{2x}+e^x-6} dx.$ $[\ln \sqrt{5}].$
22. $\int_0^{\ln 2} \frac{2e^x+3}{e^{2x}+2e^x+2} e^x dx.$ $[\ln 2 + \operatorname{arctg} 3 - \frac{\pi}{4}].$
23. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \sin x + 3} dx.$
 $\left[\frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + \sin x + 3) - \frac{\sqrt{11}}{11} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{11}}{11} (2 \sin x + 1)\right)\right].$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5-\cos x) \sin x}{\cos^2 x - \cos x - 2} dx. \dots\dots\dots [-3 \ln 2].$
25. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x} dx.$
 $\left[\ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |\sin^2 x + \sin x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \sin x \right) \right] \right].$
26. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})} dx. \dots\dots\dots [\ln(1 + \sqrt[6]{x})].$
27. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx. \dots\dots\dots [7 + \ln 4].$
28. $\int \frac{1 - \sqrt[6]{x+1}}{x+1 + \sqrt[3]{(x+1)^4}} dx.$
 $[\ln |x+1| - 3 \ln |\sqrt[3]{x+1} + 1| - 6 \operatorname{arctg} (\sqrt[6]{x+1})].$
29. $\int \frac{1}{x + \sqrt{2x-1}} dx. \dots\dots\dots \left[\ln (2x + 2\sqrt{2x-1}) + \frac{2}{1 + \sqrt{2x-1}} \right].$
30. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x + 2\sqrt{x-1}} dx. \dots\dots\dots \left[2\sqrt{x-1} - \ln (1 + \sqrt{x-1})^4 - \frac{2}{1 + \sqrt{x-1}} \right].$
31. $\int_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3 + \sqrt[3]{x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[8 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2} \right].$
32. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-2x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\arcsin \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \right) \right) \right]$
33. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \left| \frac{-x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} \right| \right].$
34. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx. \dots\dots\dots [2\pi].$
35. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[-2 \operatorname{arctg} t, t = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x} \right].$
36. $\int_0^4 \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{4}{45} \right].$
37. $\int \frac{1}{3-\cos x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right].$
38. $\int \frac{1}{3+\cos x + \sin x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{2\sqrt{7}}{7} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}(2 \operatorname{tg}(\frac{x}{2})+1)}{7} \right) \right].$
39. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x - 2 \sin x + 3} dx. \dots\dots\dots \left[-\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \right].$
40. $\int \frac{1+\sin x + \cos x}{1-\sin x - \cos x} dx. \dots\dots\dots [2(\ln |t-1| - \ln |t| - \operatorname{arctg} t), t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}].$

41. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2} \right].$
42. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x + 2}. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg} x \right) \right].$
43. $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} dx. \dots \left[x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x + 2| + \operatorname{arctg} (x-1) \right].$
44. $\int_0^{\pi/2} \sin 5x \cos x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{6} \right]$
45. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:
- (a) $y = \frac{27}{x^2+9}, y = \frac{x^2}{6}. \dots\dots\dots \left[\frac{3}{2} (3\pi - 2) \right].$
- (b) $y = \ln x, y = \ln^2 x. \dots\dots\dots [3 - e].$
46. Kruh $x^2 + y^2 = 8$ je rozdelený parabolou $y = \frac{x^2}{2}$ na dve časti. Vypočítajte obsah menšej z nich. $\dots\dots\dots \left[2\pi + \frac{4}{3} \right].$
47. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x .
Oblasť je určená čiarami $y = \frac{2x}{\pi}, y = \sin x, x \geq 0. \dots\dots\dots \left[\frac{\pi^2}{12} \right].$

Časť III

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x \ln x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right].$
2. $\int x e^{-x} dx. \dots\dots\dots [-x e^{-x} - e^{-x}].$
3. $\int \operatorname{arctg} x dx. \dots\dots\dots \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right].$
4. $\int x^2 3^x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{3^x}{\ln 3} \left(x^2 - \frac{x}{\ln 3} + \frac{1}{(\ln 3)^2} \right) \right].$
5. $\int x \operatorname{arccotg} x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arccotg} x + \frac{x}{2} \right].$
6. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx. \dots\dots\dots [\pi^2 - 4].$
7. $\int_0^1 x \operatorname{arccotg} x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right].$
8. $\int \frac{x^2}{5+x^3} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3} \ln |5+x^3| \right].$
9. $\int \frac{1}{3+9x^2} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} (\sqrt{3}x) \right].$
10. $\int \frac{x}{3+9x^2} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{18} \ln(3+9x^2) \right].$

11. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{-1}{2\sin^2 x} \right].$
12. $\int \frac{\sin x}{\cos x - 1} dx. \dots\dots\dots [-\ln |\cos x - 1|].$
13. $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2} \right].$
14. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[4]{\sin x + \cos x}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\sin x + \cos x)^3} \right].$
15. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3} \right].$
16. $\int \frac{x^2 - x + 2}{(x-3)(x-1)^2} dx. \dots\dots\dots \left[\ln(x-1)^2|x-3| + \frac{1}{x-1} \right].$
17. $\int \frac{3x^2 - 11x + 7}{(x-3)(x^2 - 4x + 4)} dx. \dots\dots\dots \left[2\ln|x-2| + \ln|x-3| - \frac{3}{x-2} \right].$
18. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx. \dots\dots\dots \left[\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{2} \right) \right].$
19. $\int \frac{x-1}{x^2-4x+7} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \ln(x^2-4x+7) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} \right].$
20. $\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| - 3\ln|x+1| \right].$
21. $\int \frac{3x^2-x-14}{x^3+x^2-5x+3} dx. \dots\dots\dots \left[\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + \frac{3}{x-1} \right].$
22. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)} dx. \dots\dots\dots \left[\ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right].$
23. $\int \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{4} \ln|1+x| - \frac{1}{4} \ln|1-x| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right].$
24. $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{16} \right].$
25. $\int_4^5 \frac{2x^2-3x+10}{x^3-7x^2+10x} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \frac{5}{18} \right].$
26. $\int_1^2 \frac{x^3-3x^2-10x+6}{x^2-4x-5} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{5}{2} - \ln 3 \right].$
27. $\int_2^3 \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1} dx. \dots\dots\dots \left[\ln 2 + \frac{9}{8} \right].$
28. $\int \frac{e^x}{4e^{2x}-8e^x+13} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2}{3}(e^x-1) \right].$
29. $\int \frac{2e^{2x}-3e^x+10}{e^{2x}-7e^x+10} dx. \dots\dots\dots [x - 2\ln|e^x-2| + 3\ln|e^x-3|].$
30. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}} dx. \dots\dots\dots \left[6 \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln(\sqrt[6]{x}+1) \right) \right].$

31. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1} \right| + 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right].$
32. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx. \dots\dots\dots [2\sqrt{1+x} + \ln |\sqrt{1+x} - 1| - \ln |1 + \sqrt{1+x}|].$
33. $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x} dx. \dots\dots \left[-\frac{t^2}{2} - 4t - 9 \ln |t-3| + \ln |t+1|, t = \sqrt{2x+3} \right].$
34. $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx. \dots\dots\dots [\ln 9].$
35. $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3} \left(\arcsin \left(x + \frac{1}{3} \right) \right) \right]$
36. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \right].$
37. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}} dx.$
 $\left[2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |2t+1| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t+1}, t = \sqrt{x^2-x+1} - x \right].$
38. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \right].$
39. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx. \dots\dots\dots \left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \ln \left(\operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right) \right].$
40. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \sin x - 2} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3} \ln |\sin x - 1| + \frac{2}{3} (\sin x + 2) \right].$
41. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x - 6} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{5} \ln \frac{3}{8} \right].$
42. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{4-5 \sin x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3} \ln 2 \right].$
43. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \cos x - 6} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{5} \ln \frac{2}{9} \right].$
44. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 \right].$
45. $\int \frac{1}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{7}}{14} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{2}{7}} \operatorname{tg} x \right) \right].$
46. $\int_0^{2\pi} \cos 3x \cos 4x dx. \dots\dots\dots [0]$
47. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:
- (a) $y = x - 1, y^2 = 2x + 1. \dots\dots\dots \left[\frac{16}{3} \right].$
- (b) $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = 2. \dots\dots\dots \left[\frac{8}{3} (2 - \sqrt{2}) \right].$

48. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x .
Oblasť je určená čiarami $y = \sin x$, $y = \frac{2x}{\pi}$ $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$.

Kapitola 2

Fourierove rady

Definícia 7 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je po častiach spojitá na intervale $\langle a, a+l \rangle \subseteq A$. Potom nekonečný funkcionálny rad*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) + b_n \sin \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) \right)$$

taký, že

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) dx \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots,$$

a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) dx \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots,$$

sa nazýva trigonometrický Fourierov rad funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a+l \rangle$.

Definícia 8 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je po častiach spojitá na intervale $\langle a, a+l \rangle \subseteq A$. Potom funkciu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takú, že*

1. $\bar{f}(a) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow a+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (a+l)-} f(x) \right),$
2. $\bar{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow x+} f(t) + \lim_{t \rightarrow x-} f(t) \right), \quad \text{pre každé } x \in (a, a+l),$
3. $\bar{f}(x) = \bar{f}(x+l) \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R},$

nazývame normalizované periodické pokračovanie funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a+l \rangle$.

Veta 16 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňa nasledujúce podmienky:*

1. Je po častiach spojitá na intervale $\langle a, a+l \rangle \subseteq A$.
2. Funkcia f je na intervale $\langle a, a+l \rangle$ je po častiach spojitou diferencovateľná. To znamená, že jej derivácia f' je na intervale $\langle a, a+l \rangle$ po častiach spojitá.
3. Nech $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je normalizované periodické pokračovanie funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a+l \rangle$.

Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) + b_n \sin \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) \right),$$

kde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) dx \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots,$$

a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) dx \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots$$

To znamená, že za uvedených podmienok je trigonometrický Fourierov rad funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a+l \rangle$ konvergentný a jeho súčtom je normalizované periodické pokračovanie funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a+l \rangle$.

2.0.6 Príklady

1. Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ pre interval $\langle -1, 1 \rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. $\square$.
2. Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ pre interval $\langle 0, 1 \rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. $\square$.
3. Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ pre interval $\langle -2, 2 \rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. $\square$.
4. Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ pre interval $\langle -2, 0 \rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. $\square$.
5. Nájdite Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ pre interval $\langle 1, 3 \rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. $\square$.
6. Funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ rozložte na intervale $(0, 2)$ do sínusového radu. $\square$.

7. Funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ rozložte na intervale $(0, 2)$ do kosínusového radu. $\square$.

8. Nech

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x \in (-\infty, 0); \\ -1, & \text{pre } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Nájdite Fourierov rad tejto funkcie pre interval $\langle -2, 2 \rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. $\square$.

9. Nech

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x \in (-\infty, 2); \\ 3 - x, & \text{pre } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Nájdite Fourierov rad tejto funkcie pre interval $\langle 1, 3 \rangle$ a nakreslite graf jeho súčtu. $\square$.

Kapitola 3

Diferenciálny počet FVP

3.1 Množiny

Znakom $\mathbb{R}^m$ budeme označovať množinu

$$\mathbb{R}^m = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ pre } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Prvky množiny $\mathbb{R}^m$ nazývame body, alebo vektory.

Na množine $\mathbb{R}^m$ definujeme dve operácie

(a) **Súčet vektorov**

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$. Potom ich súčtom nazývame vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ taký, že

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_m) + (y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m).$$

(b) **Súčin skaláru a vektora**

Nech (skalár) $c \in \mathbb{R}$ a (vektor) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom súčinom skaláru c a vektora $\mathbf{x}$ nazývame vektor

$$c\mathbf{x} = c(x_1, x_2, \dots, x_m) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_m).$$

Poznamenávame, že množina $\mathbb{R}^m$ spolu s uvedenými operáciami tvorí lineárny priestor.

Na množine $\mathbb{R}^m$ ďalej definujeme:

(a) **Skalárny súčin vektorov**

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$. Potom ich skalárnym súčinom nazývame číslo (skalár)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m.$$

(b) Normu (absolútnu hodnotu) vektora

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom normou vektora $\mathbf{x}$ nazývame číslo

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}.$$

(c) Vzdialenosť bodov

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ sú dva body z $\mathbb{R}^m$. Potom ich vzdialenosťou nazývame číslo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}.$$

Definícia 9 Nech $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ a $\varepsilon > 0$. Epsilonovým okolím bodu $\mathbf{a}$ nazývame množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}$. Prstencovým epsilonovým okolím bodu $\mathbf{a}$ nazývame množinu $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\mathbf{a}) = \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$.

V prípade $\mathbb{R}^1$ definujeme aj epsilonové okolia $\pm\infty$. Množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ nazývame ε -ovým okolím bodu ∞ . Prstencové ε -ové okolie $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\infty)$ definujeme predpisom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(\infty)$. Podobne definujeme epsilonové a prstencové epsilonové okolie mínus nekonečna vzťahom $\mathcal{O}_\varepsilon(-\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Definícia 10 Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Budeme hovoriť, že bod $\mathbf{a}$ je hromadným bodom množiny A , ak v každom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\mathbf{a})$ leží bod množiny A .

Definícia 11 Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Komplementom množiny A nazývame množinu $CA = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \notin A\}$.

Definícia 12 Budeme hovoriť, že množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je otvorená, ak pre každé $\mathbf{a} \in A$ existuje $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$.

Ak množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ obsahuje všetky svoje hromadné body, tak sa nazýva uzavretá množina.

Veta 17 Množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je otvorená práve vtedy, keď jej komplement CA je uzavretá množina.

Definícia 13 Budeme hovoriť, že množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je ohraničená, ak existuje $\varrho > 0$ také, že $A \subset \mathcal{O}_\varrho(\mathbf{0})$.

3.2 Limita a spojitosť funkcie

Definícia 14 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a}$ je hromadným bodom množiny A .*

Ak pre každé $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$ existuje $\mathcal{O}_\delta^o(\mathbf{a})$ také, že $f(\mathcal{O}_\delta^o(\mathbf{a}) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$, hovoríme, že funkcia $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ má v bode $\mathbf{a}$ limitu $\mathbf{b}$. Píšeme $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Definícia 15 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a} \in A$ je hromadným bodom množiny A . Ak $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, budeme hovoriť, že funkcia $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$.*

Ak funkcia f je spojitá v každom bode $\mathbf{a} \in C \subset A$, tak budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá na množine C .

Ak funkcia f je spojitá v každom bode $\mathbf{a} \in A$, tak budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá.

Veta 18 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$. Nech $c \in \mathbb{R}$. Potom*

- (a) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (cf)(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}_1$,
- (b) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f + g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$,
- (c) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = |\mathbf{b}_1|$.

Dôsledok 4 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ sú spojité funkcie a $c \in \mathbb{R}$. Potom*

- (a) $(cf) : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá funkcia.
- (b) $(f + g) : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá funkcia.
- (c) $|f| : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia.

Veta 19 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b_2 \in \mathbb{R}$. Potom*

- (a) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2$,
- (b) ak $b_2 \neq 0$ a $g(\mathbf{x}) \neq 0$ pre každé $\mathbf{x} \in A$, tak

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \left(\frac{f}{g} \right) (\mathbf{x}) = \frac{b_1}{b_2},$$

Dôsledok 5 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie. Potom*

- (a) $(fg) : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia.
- (b) Ak $g(\mathbf{x}) \neq 0$ pre každé $\mathbf{x} \in A$, tak $\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia.

Definícia 16 Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $C \subset A$. Potom funkciu $((f|C)) : \mathbb{R}^m \supset C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(f|C)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ pre každé $\mathbf{x} \in C$, nazývame zúženie funkcie f na množine C .

Veta 20 Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ je hromadným bodom množiny $C \subset A$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Potom aj $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f|C)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Dôsledok 6 Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ je hromadným bodom množiny $C_1 \subset A$ a aj množiny $C_2 \subset A$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f|C_1)(\mathbf{x}) \neq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f|C_2)(\mathbf{x})$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ neexistuje. (Ak by existovala, tak by museli existovať limity všetkých zúžení a tieto limity by museli byť navzájom si rovné.)

Veta 21 Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ je hromadným bodom množiny $C_1 \subset A$ a aj $C_2 \subset A$. Nech $C_1 \cup C_2 = A$. Ak $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f|C_1)(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f|C_2)(\mathbf{x})$, potom aj $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Veta 22 Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^n \supset B \rightarrow \mathbb{R}^k$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$. Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:

- Pre každé $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ je $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{b}$.
- Funkcia g je spojitá v bode $\mathbf{b}$.

Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (g \circ f)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$.

Veta 23 Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$ a funkcia $g : \mathbb{R}^n \supset B \rightarrow \mathbb{R}^k$ je spojitá v bode $f(\mathbf{a})$. Potom funkcia $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^k$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$.

Dôsledok 7 Zložená funkcia zo spojitých funkcií je spojitá.

Veta 24 Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ je hromadným bodom množiny A . Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ práve vtedy, keď $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ pre $i = 1, \dots, n$.

Veta 25 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ a $\mathbf{a} \in A$ je hromadným bodom množiny A . Potom funkcia f je spojitá v bode $\mathbf{a}$ práve vtedy, keď sú v tomto bode spojité funkcie $f_i : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$.*

Dôsledok 8 *Funkcia je spojitá práve vtedy, keď sú spojité jej zložky.*

V prípade, že uvažujeme o jednozložkových funkciách typu $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, môžeme uvažovať o nevlastných limitách a aj o nerovnostiach medzi limitami.

Definícia 17 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \in \{\infty, -\infty\}$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ nevlastnú limitu.*

Veta 26 *Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (-f(\mathbf{x})) = -\infty$.*

Veta 27 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ a existuje $k \in \mathbb{R}$ také, že $g(\mathbf{x}) \geq k$ pre každé $\mathbf{x} \in A$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f + g)(\mathbf{x}) = \infty$.*

Veta 28 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ a existuje $k \in \mathbb{R}$ také, že $k > 0$ a $g(\mathbf{x}) \geq k$ pre každé $\mathbf{x} \in A$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f \cdot g)(\mathbf{x}) = \infty$.*

Veta 29 *Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = \infty$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = 0$.*

Veta 30 *Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ a pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) > 0$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = \infty$.*

Veta 31 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ a $h : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$. Potom*

- (a) *Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, tak v prípade existencie vlastných limit $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$, platí: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$.*
- (b) *Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x})$, tak existuje aj $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ a platí: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x})$.*

Príklady

(a) Vypočítajte nasledujúce limity

- i. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{x}{x+y} \dots\dots\dots [\frac{2}{5}]$.
- ii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y} \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- iii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{x}{x+y} \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- iv. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y-3}{x+y-5} \dots\dots\dots [\frac{3}{5}]$.
- v. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{y-3}{x+y-5} \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- vi. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} \dots\dots\dots [\frac{3}{8}]$.
- vii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} \dots\dots\dots [0]$.
- viii. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x+yz-xz+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1} \dots\dots\dots [\infty]$.
- ix. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2} \dots\dots\dots [0]$.
- x. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y} \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- xi. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x-y}$, (polož $y = \sin x$, alebo $y = x-x^2$) [neexistuje].
- xii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y}$, (polož $x = \sqrt[3]{y^3-y}$) [neexistuje].
- xiii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, (polož $y = x^2$) [neexistuje].
- xiv. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy} \dots\dots\dots [\frac{1}{4}]$.
- xv. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \dots\dots\dots [\sqrt{2}]$.
- xvi. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- xvii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} \dots\dots\dots [12]$.
- xviii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\sin xy}{xy} \dots\dots\dots [1]$.
- xix. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y} \dots\dots\dots [0]$.
- xx. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y} \dots\dots\dots [3]$.
- xxi. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}} \dots\dots\dots [e]$.
- xxii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \dots\dots\dots [1]$.

(b) Nech

i.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0)$ [Je spojitá v $(0, 0)$.]

ii.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0)$ [Nie je spojitá v $(0, 0)$.]

iii.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0)$ [Je spojitá v $(0, 0)$.]

iv.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{pre } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0, 0)$ [Je spojitá v $(0, 0, 0)$.]

v.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} & \text{pre } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0, 0)$. [Nie je spojitá v $(0, 0, 0)$.]

vi.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0)$ [Nie je spojitá v $(0, 0)$.]

vii.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0)$ [Je spojitá v $(0, 0)$.]

viii.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0)$ [Nie je spojitá v $(0, 0)$.]

3.3 Diferencovateľnosť funkcie

3.3.1 Lineárne zobrazenia

Definícia 18 1. Funkciu $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazývame lineárna funkcia, ak pre každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}$ platí

- $L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$,
- $L(c\mathbf{x}) = cL(\mathbf{x})$.

2. Pre každé lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ existujú $l_1, l_2, \dots, l_m \in \mathbb{R}$ také, že

$$L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_mx_m.$$

Maticu

$$[L] = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_m]$$

nazývame matica lineárneho zobrazenia L .

3. $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ je lineárne zobrazenie práve vtedy, keď jeho zložky

$$L_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, L_i(\mathbf{x}) = L_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + \dots + l_{im}x_m$$

sú lineárne zobrazenia pre $i = 1, 2, \dots, n$. Potom maticu

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1m} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nm} \end{bmatrix}$$

nazývame matica lineárneho zobrazenia L .

4. Je zrejmé, že pri tomto označení platí $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ práve vtedy, keď $[L]\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T$, kde $\mathbf{x}^T$ označuje transponovanú maticu riadkovej matice $\mathbf{x}$.

3.3.2 Definícia diferencovateľnosti

Definícia 19 Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$, A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$ je hromadným bodom množiny A . Nech existuje také lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, že

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = 0.$$

Vtedy hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná bode $\mathbf{a}$. Lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazývame (prvý) diferenciál funkcie f v bode $\mathbf{a}$. Označujeme $L = \mathcal{D}f(\mathbf{a})$.

Ak funkcia f je diferencovateľná v každom bode $\mathbf{a} \in M \subseteq A$, potom hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná na množine M . Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná na množine A , tak hovoríme, že f je diferencovateľná funkcia.

Poznámka 3 Je zrejmé, že funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina) práve vtedy, keď

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = 0.$$

Veta 32 Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom existuje taká funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$, že

1. $p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
2. Funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$. To znamená, že $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
3. Pre každé $\mathbf{x} \in A$ platí

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{a}|.$$

Veta 33 (Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom je v tomto bode spojitá.

Veta 34 Nech funkcie $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ sú diferencovateľné v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina.) a $c \in \mathbb{R}$. Potom

- Funkcia $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.
- Funkcia $(f + g) : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.

Veta 35 Nech A je otvorená množina. Funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ práve vtedy, keď v bode $\mathbf{a}$ sú diferencovateľné jej zložky $f_i : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Navyše v prípade diferencovateľnosti platí

$$Df(\mathbf{a}) = (Df_1(\mathbf{a}), Df_2(\mathbf{a}), \dots, Df_n(\mathbf{a})).$$

3.3.3 Parciálne derivácie

Definícia 20 1. Nech A je otvorená množina a $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in A$. Potom definujeme

$$A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m) \in A\} \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, m.$$

2. Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$. Budeme uvažovať o funkciách

$$\varphi_i : \mathbb{R} \supseteq A_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_i(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

pre $i = 1, 2, \dots, m$.

3. Nech existuje (vlastná) derivácia

$$\begin{aligned} \varphi'_i(a_i) &= \lim_{t \rightarrow a_i} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(a_i)}{t - a_i} \\ &= \lim_{t \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(\mathbf{a})}{t - a_i} \\ &= \frac{\delta f(\mathbf{a})}{\delta x_i} \\ &= f_{\cdot i}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Toto číslo nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa i -tej premennej v bode $\mathbf{a}$.

4. Nech $B_i \subseteq A$ je množina všetkých $\mathbf{a} \in A$ pre ktoré existuje $f_{.i}(\mathbf{a})$.
Potom funkciu

$$f_{.i} : \mathbb{R}^m \supseteq B_i \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto f_{.i}(\mathbf{x})$$

nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa i -tej premennej.

Príklady

Vypočítajte parciálne derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $f(x, y) = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{y}\right)$, $f_{.1}(x, y) = ?$, $f_{.2}(x, y) = ?$
2. $f(x, y, z) = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5$, $f_{.1}(x, y, z) = ?$
3. $f(x, y, z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}}$, $f_{.2}(1, -3, 4) = ?$
4. $f(x, y) = \ln(\sin xy)$, $f_{.2}(1, \frac{\pi}{2}) = ?$
5. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$, $f_{.1}(1, 1) = ?$, $f_{.2}(2, 1) = ?$
6. $f(x, y) = e^{\sin \frac{x}{y}}$, $f_{.1}(x, y) = ?$, $f_{.2}(x, y) = ?$
7. $f(x, y) = x^{xy}$, $f_{.1}(x, y) = ?$, $f_{.2}(x, y) = ?$
8. $f(x, y) = (\ln x)^{\cos y}$, $f_{.1}(x, y) = ?$, $f_{.2}(x, y) = ?$
9. $f(x, y, z) = ze^{x^3 \ln(\cos(x-y^2))}$,
 $f_{.1}(x, y, z) = ?$, $f_{.2}(x, y, z) = ?$, $f_{.3}(x, y, z) = ?$
10. $f(x, y, z) = x^{\frac{1}{x}} z$, $f_{.1}(x, y, z) = ?$, $f_{.2}(x, y, z) = ?$, $f_{.3}(x, y, z) = ?$
11. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + x - y & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vypočítajte $f_{.1}(0, 0)$, $f_{.2}(0, 0)$ [$f_{.1}(0, 0) = 1$, $f_{.2}(0, 0) = -1$.]

Veta 36 (Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech A je otvorená množina a funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existujú parciálne derivácie $f_{.i}(\mathbf{a})$ pre $i = 1, 2, \dots, m$ a navyše

$$L(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_{.1}(\mathbf{a})x_1 + f_{.2}(\mathbf{a})x_2 + \dots + f_{.m}(\mathbf{a})x_m.$$

Veta 37 (Postačujúca podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Uvažujme o funkcii $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$, kde A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech existujú parciálne derivácie $f_{.i} : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \dots, m$ a navyše tieto parciálne derivácie sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.

Dôsledok 9 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech parciálne derivácie $(f_j)_i : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité v bode $\mathbf{a}$ pre $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

Príklady

1. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0, 0)$ $[f_1(0, 0) = 0 = f_2(0, 0)$, nie je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0, 0)$.]

2. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0, 0)$ $[f_1(0, 0) = 0 = f_2(0, 0)$, nie je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0, 0)$.]

3. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0, 0)$ $[f_1(0, 0) = 1 = f_2(0, 0)$, je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0, 0)$.]

4. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0, 0)$ $[f_1(0, 0) = 0 = f_2(0, 0)$, je spojitá, je diferencovateľná v $(0, 0)$, parciálne derivácie nie sú spojité v $(0, 0)$.]

5. Nech $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0, 0)$.
 $[f_1(0, 0) = 1 = f_2(0, 0)$, je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0, 0)$.]

6. Nech $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0, 0)$.
 $[f_1(0, 0), f_2(0, 0)]$ neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0, 0)$.]

7. Nech $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0, 0, 0)$.
 $[f_1(0, 0, 0), f_2(0, 0, 0), f_3(0, 0, 0)]$ neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0, 0, 0)$.]

3.3.4 Geometrický význam parciálnych derivácií

Z podmienky

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$$

odvodzujeme dva dôsledky:

1. $f(\mathbf{x}) \doteq f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a})$.
2. V prípade funkcie dvoch premenných dostávame:

$$z = f(a, b) + f_{.1}(a, b)(x - a) + f_{.2}(a, b)(y - b)$$

je rovnica dotykovej roviny grafu funkcie f v bode $T = (a, b, f(a, b))$.

Príklady

1. Vypočítajte približnú hodnotu $(1, 94)^2 e^{0,12}$.
2. Vypočítajte približnú hodnotu $4,004(2,002)^2(3,003)^3$.
3. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ v bode $T = (1, 1, ?)$.
4. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$ v bode $T = (1, ?, 2)$.
5. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x, y) = xy$ v bode $T = (?, 2, 2)$.
6. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ v bode $T = (1, -1, 1)$.
7. Ukážte, že plochy $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ a $4 + x + 2y = \ln z$ sa dotýkajú (majú spoločnú dotykovú rovinu) v bode $T = (2, -3, 1)$.

3.3.5 Diferencovateľnosť zloženej funkcie

Veta 38 (Veta o diferencovateľnosti zloženej funkcie) *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ a $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sú otvorené množiny. Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ a funkcia $g : \mathbb{R}^n \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $f(\mathbf{a}) \in B$. Potom zložená funkcia $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ a platí*

$$\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a}) = \mathcal{D}g(f(\mathbf{a})) \circ \mathcal{D}f(\mathbf{a}).$$

Pre matice zložených lineárnych zobrazení platí:

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))][\mathcal{D}f(\mathbf{a})].$$

Nech

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad \mathbf{a} \in A \\ g : \mathbb{R}^n \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Potom

$$[\mathcal{D}g(\mathbf{b})] = [g_{\cdot 1}(\mathbf{b}), g_{\cdot 2}(\mathbf{b}), \dots, g_{\cdot n}(\mathbf{b})].$$

Ďalej

$$[\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} f_{1 \cdot 1}(\mathbf{a}) & f_{1 \cdot 2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{1 \cdot m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{n \cdot 1}(\mathbf{a}) & f_{n \cdot 2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{n \cdot m}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

Potom z podmienky

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(\mathbf{b})][\mathcal{D}f(\mathbf{a})]$$

dostávame

$$(g \circ f)_{\cdot k}(\mathbf{a}) = (g_{\cdot 1}(\mathbf{b})f_{1 \cdot k}(\mathbf{a}) + g_{\cdot 2}(\mathbf{b})f_{2 \cdot k}(\mathbf{a}) + \dots + g_{\cdot n}(\mathbf{b})f_{n \cdot k}(\mathbf{a}))_{\mathbf{b}=f(\mathbf{a})}.$$

Tento výsledok sa zapisuje symbolicky v tvare tzv. reťazového pravidla:

$$\frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_k} = \frac{\delta g}{\delta y_1} \frac{\delta y_1}{\delta x_k} + \frac{\delta g}{\delta y_2} \frac{\delta y_2}{\delta x_k} + \dots + \frac{\delta g}{\delta y_n} \frac{\delta y_n}{\delta x_k}.$$

3.3.6 Zmiešané parciálne derivácie

Z parciálnych derivácií (prvého rádu) je možné opäť získavať parciálne derivácie. Sú to parciálne derivácie druhého rádu. Ich derivovaním získaváme parciálne derivácie tretieho rádu, atď. Napríklad, ak uvažujeme o parciálnej derivácii podľa druhej premennej, je možné počítať jej parciálnu deriváciu podľa štvrtej premennej nasledujúcim spôsobom:

$$(f_{\cdot 2})_{\cdot 4} = f_{\cdot 24} = \frac{\delta}{\delta x_4} \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2}.$$

Podobne

$$(f_{\cdot 2})_{\cdot 2} = f_{\cdot 22} = \frac{\delta}{\delta x_2} \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2}.$$

Pre derivácie tretieho rádu dostávame

$$(f_{\cdot 24})_{\cdot 3} = (f_{\cdot 243}) = \frac{\delta}{\delta x_3} \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2} \right) = \frac{\delta^3 f}{\delta x_3 \delta x_4 \delta x_2}.$$

Všimnime si, že pri rôznych zápisoch derivácie dostávame opačné poradie derivovania.

Veta 39 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je otvorená množina a je daná funkcia $f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech existujú $f_{.1} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{.2} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_{.12} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech funkcia $f_{.12} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existuje $f_{.21}(\mathbf{a})$ a platí*

$$f_{.12}(\mathbf{a}) = f_{.21}(\mathbf{a}).$$

Veta 40 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r -tého rádu vrátane. Potom tie parciálne derivácie k -tého rádu ($2 \leq k \leq r$), v ktorých sa podľa rovnakých premenných rovnako veľa razy derivuje (bez ohľadu na poradie), sú rovnaké.*

Definícia 21 *Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r -tého rádu vrátane, tak hovoríme, že je r -razy spojitاً diferencovateľná.*

Príklady

1. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x, y) = yx^{\frac{x}{y}}.$$

2. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

3. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x, y, z) = 2^{xyz}.$$

4. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vypočítajte $f_{.12}(0, 0)$ a $f_{.21}(0, 0)$ [$f_{.12}(0, 0) = -1$, $f_{.21}(0, 0) = 1$.]

5. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vypočítajte $f_{.12}(0, 0)$ a $f_{.21}(0, 0)$ [$f_{.12}(0, 0) = 0$, $f_{.21}(0, 0) = 1$.]

3.3.7 Derivácia vo smere, gradient

Nech je daná funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ a A je otvorená množina. Nech funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. Uvažujme o jednotkovom vektore $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_m) \in \mathbb{R}^m$. Pretože A je otvorená množina, musí existovať $\tau > 0$ také, že pre každé $t \in (-\tau, \tau)$ platí $\mathbf{a} + \mathbf{e}t \in A$.

Potom je zrejmé, že funkcia

$$h : \mathbb{R} \supseteq (-\tau, \tau) \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^m, \quad h(t) = \mathbf{a} + \mathbf{e}t = (a_1 + e_1t, a_2 + e_2t, \dots, a_m + e_mt)$$

je diferencovateľná v bode 0. Tak isto v bode 0 je diferencovateľná aj funkcia

$$r = (f \circ h) : \mathbb{R} \supseteq (-\tau, \tau) \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}, \quad r(t) = f(h(t)) = f(\mathbf{a} + \mathbf{e}t).$$

Preto existuje

$$r'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t) - r(0)}{t - 0}.$$

Túto deriváciu môžeme vypočítať pomocou reťazového pravidla nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} r'(0) &= f_{.1}(h(0))h'_1(0) + f_{.2}(h(0))h'_2(0) + \dots + f_{.m}(h(0))h'_m(0) \\ &= f_{.1}(\mathbf{a})e_1 + f_{.2}(\mathbf{a})e_2 + \dots + f_{.m}(\mathbf{a})e_m \\ &= (f_{.1}(\mathbf{a}), f_{.2}(\mathbf{a}), \dots, f_{.m}(\mathbf{a})) \cdot (e_1, e_2, \dots, e_m) \\ &= (f_{.1}(\mathbf{a}), f_{.2}(\mathbf{a}), \dots, f_{.m}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{e} \\ &= f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Číslo $r'(0) = f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a})$ nazývame derivácia funkcie f v bode $\mathbf{a}$ vo smere (jednotkového) vektora $\mathbf{e}$.

Vektor $(f_{.1}(\mathbf{a}), f_{.2}(\mathbf{a}), \dots, f_{.m}(\mathbf{a}))$ nazývame gradient funkcie f v bode $\mathbf{a}$. Označujeme

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = (f_{.1}(\mathbf{a}), f_{.2}(\mathbf{a}), \dots, f_{.m}(\mathbf{a})).$$

Pri tomto označení dostávame

$$f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}.$$

Z vlastnosti skalárneho súčinu vyplýva, že

$$|f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a})| = |\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}| \leq |\text{grad } f(\mathbf{a})| |\mathbf{e}| = |\text{grad } f(\mathbf{a})|.$$

Z toho už vyplýva: Ak zvolíme jednotkový vektor v tvare

$$\mathbf{e} = \frac{\text{grad } f(\mathbf{a})}{|\text{grad } f(\mathbf{a})|},$$

potom dostaneme

$$f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \frac{\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \text{grad } f(\mathbf{a})}{|\text{grad } f(\mathbf{a})|} = |\text{grad } f(\mathbf{a})|.$$

Z toho vyplýva, že gradient udáva smer, v ktorom sa funkcia najrýchlejšie mení.

Príklady

1. Nech $f(x, y) = e^{xy^2}$, $\mathbf{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$. Vypočítajte $f_{\mathbf{e}}(2, 1)$ [$f_{\mathbf{e}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 8e^4)$.]
2. Nájdite jednotkový vektor, v ktorého smere sa funkcia $f(x, y, z) = y^2 \sin(xyz)$ v bode $\mathbf{a} = (1, 1, \pi)$ mení najrýchlejšie. Určite rýchlosť (veľkosť) tejto zmeny. . . . [$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{1+2\pi^2}}(-\pi, -\pi, -1)$, $f_{\mathbf{e}} = \sqrt{1+2\pi^2}$.]
3. Nech $f(x, y) = x^2 - 2xy + x - y^2 + 3y$. Nájdite bod, v ktorom je derivácia tejto funkcie v každom smere nulová. [$(\frac{1}{2}, 1)$.]

3.3.8 Lokálne extrém

Definícia 22 Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in A$.

Nech existuje také prstencové okolie $\mathcal{O}_\delta^o(\mathbf{a})$, že:

1. Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta^o(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ rýdže lokálne maximum.
2. Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta^o(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ rýdže lokálne minimum.

Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})$, že:

1. Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ lokálne maximum.
2. Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ lokálne minimum.

Všetky uvedené pojmy nazývame spoločným termínom lokálne extrém.

Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$, tak hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ totálne (globálne) maximum.

Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$, tak hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ totálne (globálne) minimum.

Je zrejmé, že v bodoch, v ktorých funkcia nadobúda totálne extrém, nadobda aj lokálne extrém.

Veta 41 (Nutná podmienka pre existenciu lokálneho extrému) Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech

1. A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$.
2. Funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.
3. Funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ lokálny extrém.

Potom $\text{grad } f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Definícia 23 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine A a $\mathbf{a} \in A$. Potom definujem druhý diferenciál funkcie f ako funkciu*

$$\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{.ij}(\mathbf{a}) x_i x_j.$$

[illegible]
$$f_{\cdot ii}(\mathbf{a}) = f_{\cdot i i}(\mathbf{a}).$$
$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \frac{\mathcal{D}^0 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{0!} + \frac{\mathcal{D}^1 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{1!} + \frac{\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a} + t\mathbf{x})(\mathbf{x})}{2!}.$$
$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \dots, x_m)$$
$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1m}x_1x_m + \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \dots + a_{2m}x_2x_m + \\ &\dots\dots\dots \\ &+ a_{m1}x_mx_1 + a_{m2}x_mx_2 + \dots + a_{mm}x_mx_m \end{aligned}$$

V tomto polynóme platí $a_{ij} = a_{ji}$, pre $i, j = 1, 2, \dots, m$.

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad pre \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

1. pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ je $P(\mathbf{x}) > 0$, tak hovoríme, že polynóm $P(\mathbf{x})$ je kladne definitný.
2. pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je $P(\mathbf{x}) \geq 0$ a existuje $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ také, že $P(\mathbf{x}) = 0$, tak hovoríme, že polynóm $P(\mathbf{x})$ je kladne semidefinitný.
3. pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ je $P(\mathbf{x}) < 0$, tak hovoríme, že polynóm $P(\mathbf{x})$ je záporne definitný.
4. pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je $P(\mathbf{x}) \leq 0$ a existuje $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ také, že $P(\mathbf{x}) = 0$, tak hovoríme, že polynóm $P(\mathbf{x})$ je záporne semidefinitný.
5. existujú $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$ také, že $P(\mathbf{x}_1)P(\mathbf{x}_2) < 0$, tak hovoríme, že polynóm $P(\mathbf{x})$ je indefinitný.

Vo všeobecnosti homogenný polynóm druhého stupňa m -premenných je v tvare

[illegible]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Veta 43 Polynóm $P(\mathbf{x})$ je kladne (záporne) definitný práve vtedy, keď $\mathbf{A}$ je regulárna matica (t.j. $\det \mathbf{A} \neq 0$) a súčasne $P(\mathbf{x})$ je kladne (záporne) semidefinitný polynóm.

S každou symetrickým homogenným polynómom druhého stupňa sú spojené nasledujúce determinanty

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots, m.$$

Veta 44 (Sylvestrovho kritérium) *Nech je symetrický homogenný polynóm druhého stupňa $P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}x_i x_j$.*

1. *Polynóm $P(\mathbf{x})$ je kladne definitný práve vtedy keď $\Delta_k > 0$ pre $k = 1, 2, \dots, m$.*
2. *Polynóm $P(\mathbf{x})$ je záporne definitný práve vtedy keď $(-1)^k \Delta_k > 0$ pre $k = 1, 2, \dots, m$.*

Zo Sylvestrovho kritéria a Vety 43 vyplýva

Dôsledok 10 *Ak $\Delta_m \neq 0$ a polynóm $P(\mathbf{x})$ nie je definitný (kladne, alebo záporne), tak je indefinitný.*

Veta 45 (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je dva razy spojitou diferencovateľná na otvorenej množine A . Nech pre $\mathbf{a} \in A$ platí $\text{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Potom*

1. *ak $D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ je kladne definitný, tak funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ rýdže lokálne minimum.*
2. *ak $D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ je záporne definitný, tak funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ rýdže lokálne maximum.*
3. *ak $D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ je indefinitný, tak funkcia f nemá v bode $\mathbf{a}$ extrém.*

Definícia 25 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je ohraničená a uzavretá množina. Potom hovoríme, že A je kompaktná množina.*

Veta 46 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktnej množine A . Potom na tejto množine nadobúda (totálne) maximum a aj minimum. To znamená, že existujú $\mathbf{c}, \mathbf{C} \in A$ také, že pre každé $\mathbf{x} \in A$ platí:*

$$f(\mathbf{c}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{C}).$$

Príklady

Vyšetrite lokálne extrémym nasledujúcich funkcií:

1. $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$. [$\mathbf{a} = (0, 0, -1)$, nemá extrém, $\mathbf{b} = (24, -144, -1)$, rýdže lokálne minimum.]
2. $f(x, y, z) = 35 - 6x + 2z + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$ [$\mathbf{a} = (8, 5, -2)$, rýdže lokálne minimum.]
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2x + 3y - 4z + 6$ [$\mathbf{a} = (\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 2)$, rýdže lokálne minimum, $f(\mathbf{a}) = \frac{-1}{3}$.]
4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ [$\mathbf{a} = (0, 0, 0)$, nemá extrém.]
5. $f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1$ [$\mathbf{a} = (0, 0, 0)$, rýdže lokálne minimum, $f(0, 0, 0) = 1$.]
6. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ [$\mathbf{a} = (-1, -2, 3)$, rýdže lokálne minimum $f(\mathbf{a}) = -14$.]
7. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$ [$\mathbf{a} = (0, 0)$, nemá extrém, $\mathbf{b} = (-1, -1)$, rýdže lokálne maximum $f(\mathbf{b}) = 3$.]
8. $f(x, y) = x^2 + y^3$ [$\mathbf{a} = (0, 0)$, nemá extrém.]
9. $f(x, y) = x^2 + y^4$ [$\mathbf{a} = (0, 0)$, rýdže lokálne minimum.]
10. $f(x, y) = x^2(1 + y^2)$ [$\mathbf{a} = (0, y)$, lokálne minimum.]
11. $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 6x + 6y$. [$\mathbf{a} = (0, -1)$, nemá extrém, $\mathbf{b} = (2, 1)$, rýdže lokálne minimum.]
12. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$. [$\mathbf{a} = (1, 0)$, rýdže lokálne minimum.]
13. $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$ [$\mathbf{a} = (0, 0)$, rýdže lokálne minimum, $\mathbf{b} = (\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2})$, nemá extrém.]

Nájdite (totálne, globálne) extrémym funkcií:

1. $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ na množine $A = \{(x, y) \mid \text{je ohraničená priamkami } x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0\}$ [$-19 \leq f(x, y) \leq -1$.]
2. $f(x, y) = x^2y(2 - x - y)$ na trojuholníku $A = \{(x, y) \mid \text{je ohraničený priamkami } x = 0, y = 0, x + y = 6\}$ [$-128 \leq f(x, y) \leq \frac{1}{4}$.]
3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na obdĺžniku $A = \{(x, y) \mid \text{je ohraničený priamkami } x = 0, x = 2, y = -1, y = 2\}$ [$-1 \leq f(x, y) \leq 13$.]
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16$ na množine $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 49\}$. [$-20 \leq f(x, y) \leq 149$.]

5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ na kruhu $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ $[0 \leq f(x, y) \leq 5.]$

Kapitola 4

Integrálny počet FVP

4.1 Úvodné pojmy

Definícia 26 *Množinu*

$$\begin{aligned} I &= \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_m, b_m \rangle \\ &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ pre } i = 1, 2, \dots, m \} \end{aligned}$$

nazývame uzavretý interval. Číslo

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$$

nazývame miera intervalu I .

Definícia 27 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$. Ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje taká konečná množina intervalov $I_1, I_2, \dots, I_k$, že*

- $A \subseteq \bigcup_{j=1}^k I_j$,
- $\mu(I_1) + \mu(I_2) + \dots + \mu(I_k) < \varepsilon$,

tak hovoríme, že A je množina miery nula.

Definícia 28 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$. Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ nazývame hraničným bodom množiny A , ak v každom jeho okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a})$ existujú body aj z množiny A a aj body, ktoré do množiny A nepatria. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame hranica množiny a označujeme znakom $\text{hr}(A)$.*

Definícia 29 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je ohraničená množina. Ak hranica $\text{hr}(A)$ tejto množiny je množina miery nula, tak hovoríme, že množina A je merateľná množina.*

Definícia 30 *Nech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ sú také dve spojité funkcie, že $f(x) \leq g(x)$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$. Potom množinu*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x, y]$.

Analogicky definujeme elementárnu oblasť typu $[y, x]$.

Definícia 31 *Nech $B \subset \mathbb{R}^2$ je elementárna oblasť typu $[x, y]$. Nech $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}$ sú také dve spojité funkcie, že $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ pre každé $(x, y) \in B$. Potom množinu*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x, y, z]$.

Množina $A \subset \mathbb{R}^3$ je elementárnou oblasťou typu $[x, y, z]$ práve vtedy, keď

- *existujú spojité funkcie $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $f(x) \leq g(x)$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$,*
- *$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$,*
- *existujú spojité funkcie $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ pre každé $(x, y) \in B$,*
- *$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x), \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$.*

Podobným spôsobom definujeme v $\mathbb{R}^3$ elementárne oblasti aj iných typov. Elementárne oblasti je možné definovať aj v priestore $\mathbb{R}^m$ pre $m > 3$.

Veta 47 *Všetky elementárne oblasti sú merateľné množiny.*

4.2 Definícia integrálu na intervale

Definícia 32 1. *Nech*

$$\begin{aligned} I &= \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_m, b_m \rangle \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ pre } i = 1, 2, \dots, m\} \end{aligned}$$

je uzavretý interval. Nech D_i je delenie intervalu $\langle a_i, b_i \rangle$ pre $i = 1, 2, \dots, m$. Potom m -ticu $D = (D_1, D_2, \dots, D_m)$ nazývame delenie intervalu I . Číslo $\|D\| = \max\{\|D_i\| \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ nazývame norma delenia D . Každým delením m -rozmerného intervalu I je určený konečný počet m -rozmerných deliacich intervalov $I_1, I_2, \dots, I_k$, na ktoré je rozdelený interval I . To znamená, že $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$ a deliace intervaly môžu mať spoločné len hraničné body.

2. Nech $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení intervalu I . Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{(n)}\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu I .
3. Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $I \subseteq M$ a D s deliacimi intervalmi $I_1, I_2, \dots, I_k$ je ľubovoľné delenie intervalu I . Nech body $\mathbf{c}_i \in I_i$ sú ľubovoľne zvolené pre $i = 1, 2, \dots, k$. Potom číslo

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^k f(\mathbf{c}_i) \mu(I_i)$$

nazývame integrálny súčet funkcie f pre dané delenie D intervalu I a voľbu bodov $\mathbf{c}_i \in I_i$.

Definícia 33 Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $I \subseteq M$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ intervalu I a každú voľbu bodov $\mathbf{c}_i$ v integrálnych súčtoch $S_{D^{(n)}}(f)$, postupnosť $(S_{D^{(n)}}(f))_{n=1}^{\infty}$ konverguje k tomu istému číslu J , tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale I . Číslo

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{D^{(n)}}(f)$$

nazývame integrál funkcie f na intervale I a označujeme

$$J = \int_I f = \int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iint_I f(x, y) dx dy = \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

Veta 48 (Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $I \subseteq M$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.

Veta 49 (Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $I \subseteq M$. Nech množina bodov z intervalu I , v ktorých f nie je spojitá, je množina miery nula. Potom je funkcia f na intervale I integrovateľná.

4.3 Definícia integrálu na množine

Definícia 34 Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na ohraničenej množine $A \subseteq M$. Nech $I \supseteq A$ je ľubovoľný interval. Nech

$$f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{pre } \mathbf{x} \in A, \\ 0 & \text{pre } \mathbf{x} \notin A. \end{cases}$$

Ak funkcia $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale I , tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na množine A a píšeme

$$\int_A f = \int_I f_A = \iint_A f(x, y) dx dy = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz.$$

Veta 50 (Postačujúca podmienka integrovateľnosti na množine) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na merateľnej množine $A \subseteq M$. Nech množina tých bodov z množiny A , v ktorých f nie je spojitá, je množina miery nula. Potom je funkcia f na množine A integrovateľná.

4.4 Vlastnosti integrálu

Veta 51 Nech funkcie $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ sú integrovateľné na množine $A \subseteq M$ a $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom

1. Funkcia $(f+g) : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g.$$

2. Funkcia $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí

$$\int_A (cf) = c \int_A f.$$

3. Funkcia $|f| : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

Veta 52 Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je množina miery nula a funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na množine A . Potom $\int_A f = 0$.

Veta 53 Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na množinách $A, B \subseteq M$, pričom $A \cap B$ je množina miery nula. Potom

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Definícia 35 Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je merateľná množina. Potom mieru $\mu(A)$ množiny A definujeme pomocou predpisu:

$$\mu(A) = \int_A 1.$$

4.5 Fubiniho vety

Veta 54 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^2 \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

typu $[x, y]$. Nech pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ existuje integrál

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy.$$

Potom

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Podobná veta platí pre elementárnu oblasť typu $[y, x]$.

Veta 55 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^3 \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

typu $[x, y, z]$. Nech pre každé $(x, y) \in B$ existuje integrál

$$\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Potom

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_B \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Dôsledok 11 *Nech A je elementárna oblasť typu $[x, y, z]$ a na elementárnej oblasti $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ sú splnené podmienky Fubiniho vety pre funkciu dvoch premenných. Potom*

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy dx.$$

Podobné vety platia pre zvyšné typy elementárnych oblastí v $\mathbb{R}^3$.

Príklady

Vypočítajte:

1. $\iint_I x^2 y \cos(xy^2) dx dy$, ak $I = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$ $[-\frac{\pi}{16}]$
2. $\iint_I y e^{x+y} dx dy$, ak $I = \langle 0, 4 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ $[e^4 - 1]$
3. $\iint_I \ln(1+x)^{2y} dx dy$, ak $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ $[2 \ln 2 - 1]$
4. $\iint_I \frac{1}{(1-xy)^2} dx dy$, ak $I = \langle 2, 3 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$ $[\ln \frac{6}{5}]$
5. $\iint_A \cos(x+y) dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi\}$ $[0]$
6. $\iint_A y e^x dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq y+2\}$ $[\frac{1}{2}(e^4 + e)]$
7. $\iint_A (x+y) dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, y \leq x \leq 2y\}$ $[\frac{7}{3}]$
8. $\iint_A \frac{x^2}{y^2} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 0 < \frac{1}{x} \leq y \leq x, x \leq 2\}$ $[\frac{9}{4}]$
9. $\iint_A |x| dx dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x^2$, $4x^2 + y^2 = 12$, a platí, že $y \geq 0$ $[4\sqrt{3} - \frac{10}{3}]$
10. $\iint_A \sqrt{xy - y^2} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 3, \frac{x}{10} \leq y \leq x\}$. . $[162]$
11. Vypočítajte plošný obsah množiny A , ktorá je ohraničená krivkami $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, $y^2 = x + 1$ a obsahuje bod $(0, 0)$ $[8(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4})]$
12. $\iint_A (x^2 y) dx dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x$, $y = x^2$.
..... $[\frac{1}{35}]$
13. $\iint_A (x^2 + y) dx dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$, $xy = 2$, pričom $x \geq 0$ $[\frac{17}{6}]$
14. $\iint_A (x^2 y) dx dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x - 4$, $y^2 = 2x$ $[\frac{7236}{15}]$
15. $\iint_A (x+y) dx dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $x = 0$, $y = \frac{3}{2}x$, $y = 4 - (x-1)^2$, pričom $x \geq 0$ $[.]$

16. $\iiint_A y \cos(x+z) dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$ $[\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}]$
17. $\iiint_A xyz dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pričom $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ $[\frac{1}{48}]$
18. $\iiint_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ $[\frac{1}{2} (\ln 2 - \frac{5}{8})]$
19. $\iiint_A x^2 y z^3 dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$ $[\frac{1}{312}]$
20. $\iiint_A \frac{xy^3 z}{(1+z^2)^2} dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$ $[.]$

4.6 Transformácie integrálu

Veta 56 (Transformácia pomocou polárnych súradníc) Nech $Z = \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$. Nech

$$g : \mathbb{R}^2 \supset Z \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi), \quad J_g(\varrho, \varphi) = \varrho.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^2$ sú také kompaktné a merateľné množiny, že

1. $B \subseteq Z$,
2. $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) |J_g(\varrho, \varphi)| d\varrho d\varphi.$$

Veta 57 (Transformácia pomocou cylindrických súradníc) Nech $Z = \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \times (-\infty, \infty)$. Nech

$$g : \mathbb{R}^3 \supset Z \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(\varrho, \varphi, u) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, u), \quad J_g(\varrho, \varphi, u) = \varrho.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^3$ sú také kompaktné a merateľné množiny, že

1. $B \subseteq Z$,
2. $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, u) |J_g(\varrho, \varphi, u)| d\varrho d\varphi du.$$

Veta 58 (Transformácia pomocou sférických súradníc) Nech $Z = \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Nech

$$g : \mathbb{R}^3 \supset Z \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(\varrho, \varphi, \vartheta) = (\varrho \cos \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta), \quad J_g(\varrho, \varphi, \vartheta) = \varrho^2 \cos \vartheta.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^3$ sú také kompaktné a merateľné množiny, že

$$1. \quad B \subseteq Z,$$

$$2. \quad g(B) = A.$$

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\varrho \cos \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) |J_g(\varrho, \varphi, \vartheta)| d\varrho d\varphi d\vartheta.$$

Veta 59 (Transformácia pomocou afinných súradníc) Nech

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(u, v, w) = (a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w).$$

Nech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad a \quad J_g(u, v, w) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Nech

$$1. \quad J_g(u, v, w) \neq 0,$$

$$2. \quad A, B \subset \mathbb{R}^3 \text{ sú také kompaktné a merateľné množiny, že } g(B) = A.$$

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\begin{aligned} \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_B f(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + \\ &\quad + a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w) |J_g(u, v, w)| du dv dw. \end{aligned}$$

Príklady

1. Vypočítajte $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. $[\frac{16\pi}{3}]$.
2. Vypočítajte $\iint_A 2(x^2 + y^2) dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$. $[\frac{3\pi}{8}]$.
3. Vypočítajte $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$. $[\frac{\pi}{2}]$.
4. Vypočítajte $\iint_A \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. $[\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}]$.
5. Vypočítajte $\iint_A \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$. $[(10 \ln 10 - 9) \frac{\pi}{4}]$.
6. Pomocou transformácie polárnymi súradnicami vypočítajte objem kužela $A = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$. $[\frac{8\pi}{3}]$.
7. Vypočítajte $\iiint_A (x^2 + y^2) dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$. $[\frac{16\pi}{3}]$.
8. Vypočítajte $\iiint_A x^2 y dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, z = 0, x + z = 3$. $[.]$.
9. Vypočítajte $\iiint_A xy \sqrt{z} dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 4z^2, x = 0, y = 0, z = 1$, pričom $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. $[\frac{4}{11}]$.
10. Vypočítajte objem telesa $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$. $[4\pi]$.
11. Vypočítajte objem telesa A , ktoré je ohraničené plochami $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 + z^2 = 16, y = 0, z = 0$, pričom $z \geq 0$. $[.]$.
12. $\iiint_A z dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x = 0, y = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 = z^2$, pričom $x \geq 0, y \geq 0$. $[\frac{\pi}{8}]$.
13. Vypočítajte $\iiint_A (x^2 + y^2) dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z, 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$. $[\left(\frac{3^5 - 2^5}{15}\right) 2\pi]$.
14. Vypočítajte $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$. $[\frac{\pi}{10}]$.

15. Vypočítajte $\iiint_A z^2 dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z\}$ $[\frac{59}{15}\pi.]$
16. Vypočítajte objem telesa A , ktoré je ohraňované rovinami $2x - y + z - 3 = 0$, $2x - y + z = 0$, $x + y + z - 5 = 0$, $x + y + z = 0$, $x + 2y + 2z - 4 = 0$, $x + 2y + 2z = 0$ $[30.]$
17. Vypočítajte objem elipsoidu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ $[32\pi.]$
18. Vypočítajte objem telesa $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$.
..... $[\cdot]$
19. Vypočítajte objem telesa $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 6z \leq 0, x^2 + y^2 < \frac{z^2}{3}\}$ $[\cdot]$
20. $\iiint_A x^2 y z^3 dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$ $[\cdot]$
21. $\iiint_A \frac{xy^3 z}{(1+z^2)^2} dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$ $[\cdot]$