

Cvičenie 8 – Dvojrozmerné náhodné veličiny

Kovariancia

$$\text{cov}(X,Y) = E(X*Y) - E(X)*E(Y)$$

Korelačný koeficient

$$\rho(X,Y) = \text{cov}(X,Y) / (D(X)*D(Y))^{1/2}$$

Zatiaľ to berme ako vzorce, do ktorých vieme mechanicky dosadiť. Čoskoro sa na niektorej z prednášok dozviete, na čo to slúži a ako sa s tým pracuje – dovtedy bude dobré mať tú mechanickú časť zvládnutú.

Veľmi povrchne povedané, kovariancia je polotovar na ďalšie výpočty a korelačný koeficient je miera lineárnej závislosti (pre začiatok) dvoch veličín.

Čím bližšie k 1, tým viac priama úmernosť,
čím bližšie k -1, tým viac nepriama úmernosť,
čím bližšie k 0, tým menej závislé.

Riešené príklady

Príklad 1:

V krabici je 10 myší, 7 samíc a 3 samce. Náhodne vyberieme 5 jedincov. Počet samcov vo výbere označíme m , počet samíc f . Príslušné náhodné veličiny nazveme M a F .

- Aké hodnoty nadobúdajú veličiny M a F ?
- Zostavte pravdepodobnostnú tabuľku pre M a F osobitne.
- Zostavte pravdepodobnostnú tabuľku pre jednotlivé dvojice hodnôt $[m, f]$.

Riešenie:

a) M nadobúda hodnoty m v rozsahu 0 až 3. Viac sa nedá, lebo samce sú iba tri.
 F nadobúda hodnoty f v rozsahu 2 až 5. Viac ako 5 sa nedá, lebo vyberáme len 5 kusov. Menej ako 2 sa nedá, lebo ak je samcov najviac 3, do počtu 5 sa to aspoň dvoma samicami musí doplniť.

b) Pravdepodobnosti budú mať v menovateli $C(10,5) = 252$.

0 samcov vo výbere = 5 samíc, vieme ich vybrať $C(7,5) = 21$ spôsobmi

1 samec vo výbere = aj 4 samice, vieme ich vybrať $C(3,1) \cdot C(7,4) = 105$ spôsobmi

2 samce vo výbere = aj 3 samice, vieme ich vybrať $C(3,2) \cdot C(7,3) = 105$ spôsobmi

3 samce vo výbere = aj 2 samice, vieme ich vybrať $C(3,3) \cdot C(7,2) = 21$ spôsobmi

M	0	1	2	3	spolu
P _M	$\frac{21}{252} = \frac{1}{12}$	$\frac{105}{252} = \frac{5}{12}$	$\frac{105}{252} = \frac{5}{12}$	$\frac{21}{252} = \frac{1}{12}$	1

Hodnoty v druhej tabuľke už máme vypočítané, ale v záujme istoty porozumenia tu tie výpočty zopakujeme, len s drobným prehodením poradia konštatovaní:

2 samice vo výbere = aj 3 samce, vieme ich vybrať $C(7,2) \cdot C(3,3) = 21$ spôsobmi

3 samice vo výbere = aj 2 samce, vieme ich vybrať $C(7,3) \cdot C(3,2) = 105$ spôsobmi

4 samice vo výbere = aj 1 samec, vieme ich vybrať $C(7,4) \cdot C(3,1) = 105$ spôsobmi

5 samíc vo výbere = 0 samcov, vieme ich vybrať $C(7,5) = 21$ spôsobmi

F	2	3	4	5	spolu
P _F	$\frac{21}{252} = \frac{1}{12}$	$\frac{105}{252} = \frac{5}{12}$	$\frac{105}{252} = \frac{5}{12}$	$\frac{21}{252} = \frac{1}{12}$	1

Prečo vychádzajú obe tabuľky rovnako? Za niečo môže symetria, ale nebyť tej, hodnoty v druhej tabuľke by stále zodpovedali hodnotám v prvej čítaným odzadu. Je to pre to, že javy M a F sú v tomto príklade totálne navzájom závislé. Ak poznáme hodnotu m , vieme presne určiť f a naopak.

To sa prejaví aj na nasledujúcej tabuľke.

c)

F \ M	0	1	2	3
2	0	0	0	$\frac{1}{12}$
3	0	0	$\frac{5}{12}$	0
4	0	$\frac{5}{12}$	0	0
5	$\frac{1}{12}$	0	0	0

Príklad 2:

V krabici je 8 myší, 4 čierne, 3 biele a 1 strakatá. Náhodne vyberieme 4 jedince. Počet čiernych vo výbere označíme **č**, počet bielych **b** a počet strakatých **s**. Príslušné náhodné veličiny nazveme **Č**, **B** a **S**.

a) Aké hodnoty nadobúdajú veličiny **Č**, **B** a **S**?

b) Zostavte pravdepodobnostnú tabuľku pre **Č**, **B** a **S** osobitne.

c) Zostavte pravdepodobnostné tabuľky pre jednotlivé dvojice hodnôt $[\check{c}, b]$, $[\check{c}, s]$, $[b, s]$.

Riešenie:

a) **Č:** $\check{c} = 0, 1, 2, 3, 4$
B: $b = 0, 1, 2, 3$
S: $s = 0, 1$

b) Všetkých možností je spolu $C(8, 4) = 70$.

0 čiernych vo výbere = 4 iné, vieme ich vybrať jediným spôsobom (všetky nečierne)

1 čierna vo výbere = aj 3 iné, vieme ich vybrať $C(4, 1) \cdot C(4, 3) = 16$ spôsobmi

2 čierne vo výbere = aj 2 iné, vieme ich vybrať $C(4, 2) \cdot C(4, 2) = 36$ spôsobmi

3 čierne vo výbere = aj 1 iná, vieme ich vybrať $C(4, 3) \cdot C(4, 1) = 16$ spôsobmi

4 čierne vo výbere = žiadne iné, vieme ich vybrať $C(4, 4) =$ jediným spôsobom

Č	0	1	2	3	4	spolu
P_č	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

0 bielych vo výbere = 4 iné, vieme ich vybrať $C(5, 4) = 5$ spôsobmi

1 biela vo výbere = aj 3 iné, vieme ich vybrať $C(3, 1) \cdot C(5, 3) = 30$ spôsobmi

2 biele vo výbere = aj 2 iné, vieme ich vybrať $C(3, 2) \cdot C(5, 2) = 30$ spôsobmi

3 biele vo výbere = aj 1 iná, vieme ich vybrať $C(3, 3) \cdot C(5, 1) = 5$ spôsobmi

B	0	1	2	3	spolu
P_b	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$	1

0 strakatých vo výbere = 4 iné, vieme ich vybrať $C(7, 4) = 35$ spôsobmi

1 strakatá vo výbere = aj 3 iné, vieme ich vybrať $1 \cdot C(7, 3) = 35$ spôsobmi

S	0	1	spolu
P_s	$\frac{35}{70}$	$\frac{35}{70}$	1

c) Vzťah Č a B:

Potrebuje vyplniť tabuľku 5×4 . Začnime políčkami, kde bude nula, teda nemožné kombinácie.

Predovšetkým, ak ťaháme 4 myši, nie je možné aby počet bielych a čiernych vo výbere presiahol v súčte hodnotu 4. Do takých políčok vpišeme nulu.

Podobne, ak je strakatá iba 1, vo výbere 4 ks musia byť aspoň tri biele alebo čierne. Súčet $\check{c}+b$ musí byť preto nutne aspoň 3.

B \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	0	0			
1	0	0			0	
2	0			0	0	
3			0	0	0	
spolu						

Ostalo nám vyplniť 8 políčok. Vieme, že v menovateli bude stále 70. Vyčíslime čitatele:

4 čierne a 0 bielych:	$C(4,4) = 1$
3 čierne a 0 bielych, doplnené 1 strakatou	$C(4,3) = 4$
3 čierne a 1 biela:	$C(4,3) \cdot C(3,1) = 12$
2 čierne a 1 biela, doplnené 1 strakatou	$C(4,2) \cdot C(3,1) = 18$
2 čierne a 2 biele:	$C(4,2) \cdot C(3,2) = 18$
1 čierna a 2 biele, doplnené 1 strakatou	$C(4,1) \cdot C(3,2) = 12$
1 čierna a 3 biele:	$C(4,1) \cdot C(3,3) = 4$
0 čiernych a 3 biele, doplnené 1 strakatou	$C(4,0) \cdot C(3,3) = 1$

B \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	0	0	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	
1	0	0	$\frac{18}{70}$	$\frac{12}{70}$	0	
2	0	$\frac{12}{70}$	$\frac{18}{70}$	0	0	
3	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{70}$	0	0	0	
spolu						

Nakoniec urobíme kontrolné súčty po riadkoch a stĺpcoch.

B \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	0	0	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{5}{70}$
1	0	0	$\frac{18}{70}$	$\frac{12}{70}$	0	$\frac{30}{70}$
2	0	$\frac{12}{70}$	$\frac{18}{70}$	0	0	$\frac{30}{70}$
3	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{70}$	0	0	0	$\frac{5}{70}$
spolu	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

Výsledné (tzv. marginálne) súčty sú presne tie hodnoty, ktoré sme mali v tabuľkách v časti b). To samozrejme neprekvapuje. Ide zároveň o dobrú rýchlu kontrolu správnosti výpočtu. Pri troche skúseností môžeme do tabuľky vopred vyplniť marginálne súčty a ušetriť si počítanie.

Ukážeme si to na ďalšej tabuľke.

Vzťah S a Č:

Doplníme to tabuľky nuly – súčet č+s nesmie byť viac ako 4, ale zároveň nesmie byť 0 (lebo sú len 3 biele na doplnenie do 4). Ostáva 8 políčok na počítanie.

S \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0					
1					0	
spolu						

Doplníme marginálne hodnoty.

Zároveň bez osobitného počítania vieme doplniť do tabuľky dve hodnoty.

S \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0				$\frac{1}{70}$	$\frac{35}{70}$
1	$\frac{1}{70}$				0	$\frac{35}{70}$
spolu	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

0 strakatých a 1 čierna, doplníme 3 biele: $C(4,1) \cdot C(3,3) = 4$

Napíšeme do tabuľky a hneď vieme doplniť aj hodnotu pod tým.

S \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	$\frac{4}{70}$			$\frac{1}{70}$	$\frac{35}{70}$
1	$\frac{1}{70}$	$\frac{11}{70}$			0	$\frac{35}{70}$
spolu	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

0 strakatých a 2 čierne, doplníme 2 biele: $C(4,2) \cdot C(3,2) = 18$

Napíšeme do tabuľky a hneď vieme doplniť aj hodnotu pod tým. Zároveň však už vieme vyplniť aj stĺpec vpravo.

S \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	$\frac{4}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{35}{70}$
1	$\frac{1}{70}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{4}{70}$	0	$\frac{35}{70}$
spolu	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

Stačilo teda vyrátať 2 hodnoty z 8 a ostatné sa už len podopíňali.

Vzťah B a S:

Radi by sme doplnili do tabuľky nuly, ale také políčka tu aktuálne nie sú. Tak aspoň nahodíme marginálne súčty.

B \ S	0	1	spolu
0			$\frac{5}{70}$
1			$\frac{30}{70}$
2			$\frac{30}{70}$
3			$\frac{5}{70}$
spolu	$\frac{35}{70}$	$\frac{35}{70}$	1

Budeme musieť vyrátať 3 hodnoty, ostatné sa budú dať doplniť.

Biele	Strakaté	Čierne	Možnosti:
0	0	4	$C(3,0) \cdot C(4,4) = 1$
1	0	3	$C(3,1) \cdot C(4,3) = 12$
2	0	2	$C(3,2) \cdot C(4,2) = 18$

B \ S	0	1	spolu
0	$\frac{1}{70}$		$\frac{5}{70}$
1	$\frac{12}{70}$		$\frac{30}{70}$
2	$\frac{18}{70}$		$\frac{30}{70}$
3			$\frac{5}{70}$
spolu	$\frac{35}{70}$	$\frac{35}{70}$	1

Zvyšných 5 už vieme doplniť:

B \ S	0	1	spolu
0	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{70}$	$\frac{5}{70}$
1	$\frac{12}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{30}{70}$
2	$\frac{18}{70}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{30}{70}$
3	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{5}{70}$
spolu	$\frac{35}{70}$	$\frac{35}{70}$	1

A je to.

Príklad 3

Pre veličiny Č a B nájdite základné charakteristiky, ich kovarianciu a korelačný koeficient.

Riešenie:

Iba dosadíme do známych vzorcov.

Č	0	1	2	3	4	spolu
P _Č	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

$$E(\check{C}) = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 36 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 1) / 70 = 2$$

$$D(\check{C}) = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 16 + 4 \cdot 36 + 9 \cdot 16 + 16 \cdot 1) / 70 - 4 = 32/7 - 4 = 4/7$$

B	0	1	2	3	spolu
P _B	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$	1

$$E(B) = (0 \cdot 5 + 1 \cdot 30 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 5) / 70 = 1.5$$

$$D(B) = (0 \cdot 5 + 1 \cdot 30 + 4 \cdot 30 + 9 \cdot 5) / 70 - 2.25 = 32/7 - 4 = 0.53571$$

Kovariancia:

B \ Č	0	1	2	3	4	spolu
0	0	0	0	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{5}{70}$
1	0	0	$\frac{18}{70}$	$\frac{12}{70}$	0	$\frac{30}{70}$
2	0	$\frac{12}{70}$	$\frac{18}{70}$	0	0	$\frac{30}{70}$
3	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{70}$	0	0	0	$\frac{5}{70}$
spolu	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

Predjeme sa po všetkých políčkach s nenulovou pravdepodobnosťou (mohli by sme z toho vynechať prvý riadok a prvý stĺpec, ale formálne ich tam na začiatok necháme)

$$E(B \cdot \check{C}) = (0 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 18 + 1 \cdot 3 \cdot 12 + 2 \cdot 1 \cdot 12 + 2 \cdot 2 \cdot 18 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 4) / 70 = 2.5714$$

$$\text{cov}(B, \check{C}) = E(B \cdot \check{C}) - E(B) \cdot E(\check{C}) = -0.42857$$

Korelačný koeficient

$$\rho(B, \check{C}) = \text{cov}(B, \check{C}) / (D(B) \cdot D(\check{C}))^{1/2} = -0.42857 / \sqrt{0.53571 \cdot 4/7} = -0.77460$$

Neriešené príklady

1. Vo vrecku sú (na hmat zhodné) kocky – 5 bielych, 3 zelené a 2 modré. Naslepo ťaháme 4 kocky. Sledovanými veličinami sú

B – počet bielych kociek,

Z – počet zelených kociek

M – počet modrých kociek vo výbere.

a) Aké hodnoty nadobúdajú B, Z, M ? Napíšte ich pravdepodobnostné tabuľky.

b) Zostavte tabuľky pravdepodobností pre $B \times Z$, $B \times M$, $Z \times M$.

b*) Kto sa príliš nudí, môže aj 3D-tabuľku pre $B \times Z \times M$:)

c) Vypočítajte charakteristiky veličín B, Z, M a po dvojiciach ich vzájomnú kovarianciu / korelačný koeficient.

2. Hádzeme dvojicou hracích kociek (zelená a modrá). Sledujeme náhodné veličiny $M = \text{maximum z oboch čísel}$ a $S = \text{súčet oboch čísel}$.

a) Aké hodnoty nadobúdajú M a S ? Napíšte ich pravdepodobnostné tabuľky.

b) Zostavte tabuľku pravdepodobností pre $M \times S$.

c) Vypočítajte charakteristiky veličín B, S a ich vzájomnú kovarianciu / korelačný koeficient.