Cvičenie 7 – Základné spracovanie dát, opisná štatistika

Pojmy a ukážky:

→ *Dátový vektor*

Dátový vektor získané údaje (súbor dát) uložené v tvare vektora

x = [1 5 7 4 5 6 8 4 1 1 2 7]

Usporiadaný dátový vektor dáta zoradené vo vektore podľa veľkosti

xs = [1 1 1 2 4 4 5 5 6 7 7 8]

Tabuľka početností hodnoty v dátovom vektore a ich početnosti

x_k	1	2	4	5	6	7	8
n_k	3	1	2	2	1	2	1

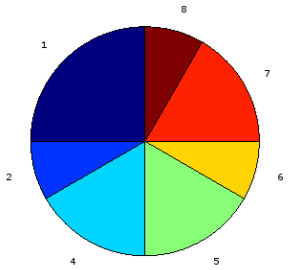
Tabuľka relatívnych početností početnosti hodnôt delené celkovým počtom dát

x_k	1	2	4	5	6	7	8
p_k	3/12	1/12	2/12	2/12	1/12	2/12	1/12

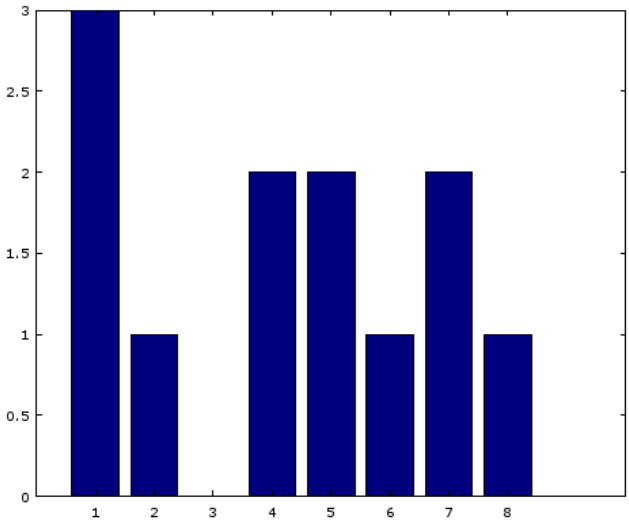
Koláčový diagram slúži najmä na grafické vyjadrenie relatívnej početnosti (zobrazuje hmatateľne tzv. podiel na celku)

p= [3 1 2 2 1 2 1]/12

pie(p, {'1' '2' '4' '5' '6' '7' '8'})



Stĺpcový diagram slúži najmä na grafické vyjadrenie početnosti



Hodnota 3 sa medzi získanými dátami nenachádza. Je na našom posúdení situácie, či ju chceme / máme spomínať a zobrazovať v diagrame.

Priemer

Výpočet z vektora: x = [1 5 7 4 5 6 8 4 1 1 2 7]

$\bar{x}$ = mean(x) = (1+5+7+4+5+6+8+4+1+1+2+7) / 12 = 4.25

Výpočet z tabuľky realtívnych početností:

x_k	1	2	4	5	6	7	8
p_k	3/12	1/12	2/12	2/12	1/12	2/12	1/12

mean(v) = 1*3/12+2*1/12+4*2/12+5*2/12+6*1/12+7*2/12+8*1/12

Rozptyl

Výpočet z vektora x

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$ = ((1-4.25)^2 + (5-4.25)^2 + ... + (7-4.25)^2) = 5.8542

Na tomto mieste treba rozlíšiť niekoľko základných situácií:

- Náhodná veličina/premenná ako „živel“, šedá eminencia v pozadí, ktorá má svoje charakteristiky a v súlade s nimi je schopná v experimente/pozorovaní/ankete a pod. sa prejavovať a generovať náhodné výsledky. Toto sme preberali do minulého týždňa.
- Vektor dát, ktoré predstavujú „celú realitu“ (napr. všetky výsledky z pretekov, známky všetkých žiakov). Tento vektor vieme opísať podobnými charakteristikami ako náhodnú veličinu. O tom je dnešné cviko.
- Výberový náhodný vektor predstavuje výsledok experimentu, v ktorom sa náhodná veličina prejavila v určitom počte dát, avšak tieto dáta nevyčerpávajú celú realitu, iba ju lepšie či slabšie reprezentujú (napr. preferencie niekoľkých miliónov spotrebiteľov zistené na náhodnej tisícke respondentov). O tomto bude reč v nasledujúcich týždňoch.

Kvantily

Kvantil je pozícia prvku/hodnoty v kontexte všetkých hodnôt usporiadaných podľa veľkosti, meraná na škále od 0 po 1. Definícií kvantilu je viacero a vedú k nie vždy celkom zhodným výsledkom (pri malom počte dát), ale tie rozdiely sú zanedbateľné.

Dátový vektor

Pri dátovom vektore dávame prednosť takej definícii kvantilu, ktorá v rámci možností nevyrába nové hodnoty, než sú tie, ktoré už máme k dispozícii. Ak teda nejaký kvantil vychádza medzi dvoma hodnotami dátového vektora, prikloníme sa k tej, ktorá je bližšie. Iba v prípade, že by to bolo naozaj nerozhodne (presný stred), siahneme za aritmetickým priemerom tých hodnôt.

Definícia

Je daný dátový vektor x s n údajmi. Pre číslo p z intervalu [0, 1] je p-kvantil (q_p) taká hodnota, o ktorej platí:

- aspoň p*n hodnôt z vektora x je menších alebo rovných ako q_p
- aspoň (1-p)*n hodnôt z vektora x je väčších alebo rovných ako q_p
- ak uvedeným podmienkam vyhovuje celý interval hodnôt, za kvantil q_p budeme považovať jeho stred

Slovo „aspoň“ prakticky znamená zaokrúhlenie nahor na najbližšie celé číslo.

Ilustrácia:

xs = [1 1 1 2 4 4 5 5 6 7 7 8]

Usporiadaný dátový vektor má 12 prvkov. Hľadajme 0.7-kvantil. Vypočítame a zaokrúhlime nahor:

$0.7*12 = 8.4 \approx 9$
$0.3*12 = 3.6 \approx 4$

Vidíme, že 9+4 = 13, o 1 viac ako je dĺžka vektora. Tak to má byť. Štvrtá hodnota sprava a deviata zľava, to sa stretne akurát na čísle 6. Hľadaný kvantil je teda $q_{0.7} = 6$. Ak teda pôjdete po rade od najmenších hodnôt, pri čísle 6 si môžete povedať, že aspoň 70 percent údajov ste prešli.

Hľadajme teraz 0.25-kvantil:

$0.25*12 = 3 \approx 3$
$0.75*12 = 9 \approx 9$

Vyhovujú všetky čísla medzi 1 (tretie zľava) až 2 (deviate sprava). Aplikujeme teda tretie pravidlo a za hľadaný kvantil vyhlásime stred nájdeného intervalu, teda $q_{0.25} = 1.5$.

Špeciálne kavntily:

Medzi všetkými kvantilmi sú najzaujímavejšie a najčastejšie sa hľadajú:

$Q_L = q_{0.25}$ – dolný (prvý) kvartil
Med = $q_{0.5}$ – medián (druhý kvartil)
$Q_U = q_{0.75}$ – horný (tretí) kvartil

Boxplot
Boxplot je spôsob znázornenia súboru dát, ktorý sugestívne a prvoplánovo naznačuje rozloženie jednotlivých údajov a ich vzťah k celku.

Pravidlá kreslenia:

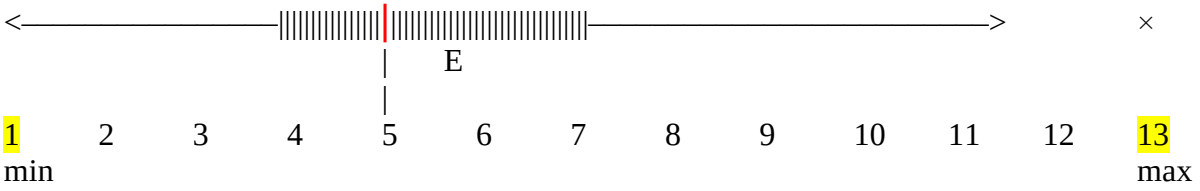
- Obrázok sa orientuje zľava doprava (alebo zdola hore).
- Obdĺžnikom sa vymedzí „mainstream“, teda údaje medzi Q_L a Q_U. Vyznačí sa tiež medián, prípadne aj priemer.
- Vypočítame $R = Q_U - Q_L$. Obdĺžniku nakreslíme „fúzy“ (*whiskers*) s dĺžkou 1.5*R. V tomto rozmedzí, od Q_L-1.5R po Q_U+1.5R, sa nachádzajú všetky „normálne“ údaje, teda aj tie, ktoré síce nie sú mainstream, ale prirodzene a očakávateľne sa vyskytujú v realite a sú súčasťou celku.
- Údaje mimo uvedeného rozsahu sa považujú za extrémy (outlier), z hľadiska štatistiky ide o prípady, ktoré sa berú ako výnimky alebo je pri nich podozrenie na chybu. Pri výpočte charakteristík sa extrémne údaje spravidla neberú do úvahy.
- Ak najmenší alebo najväčší z údajov (tiež treba vyznačiť) leží v zóne určenej fúzmi, môže sa fúz skrátiť.

Ukážka:

xs = [1, 4, 4, 4, 5 | 5, 6, 7, 8, 13]

Priemer E = 5.7
Med = 5 (stred medzi 5 a 5),
Q_L = 4,
Q_U = 7, R = 3, 1.5R = 4.5.

Obdĺžnik (box) bude od 4 po 7.
Fúzy by mali byť od 4-4.5= - 0.5 po 7+4.5 = 11.5.
Keďže minimum medzi údajmi je 1, ľavý fúz stačí ťahať len po 1.
Hodnota 13 je outlier a zároveň maximum.



→ *Triedené dáta*

Triedy pri veľkom počte rozličných dát môže byť príliš podrobný pohľad prekážkou k rozpoznaniu štruktúry ich rozloženia. V záujme zvýraznenia štruktúry je vhodné dáta roztriediť a ďalej pracovať len s triedami a ich početnosťami. Niekedy už pri samotnom zbere dát sa výsledky priamo zatrieďujú bez uchovávania presnejšej informácie (napr. keď v ankete neudávate svoj presný vek, ale len odkliknete vekovú kategóriu, kam patríte).

Vek	1-15	16-25	26-40	41-60	61-100
Počet	15	8	9	20	16

Histogram špeciálny typ stĺpcového diagramu na zobrazenie triedených dát. Zohľadňuje sa tu šírka tried – trieda 61-100 s počtom 22 ľudí je síce bohatšia než trieda 16-25 s 8 ľuďmi, ale v skutočnosti 8 ľudí na rozsah 10 je lepšia „úroda“ ako 16 ľudí na rozsah 40, pretože 8/10 > 16/40 .

V histograme je preto početnosť vyjadrená nie výškou stĺpca, ale jeho plošným obsahom. Výška stĺpca je podiel početnosti a šírky triedy.

Vek	1-15	16-25	26-40	41-60	61-100
Šírka triedy	15	10	15	20	40
Počet	15	8	9	20	16
Výška stĺpca	15/15 = 1	8/10 = 0.8	9/15 = 0.6	20/20 = 1	16/40 = 0.4

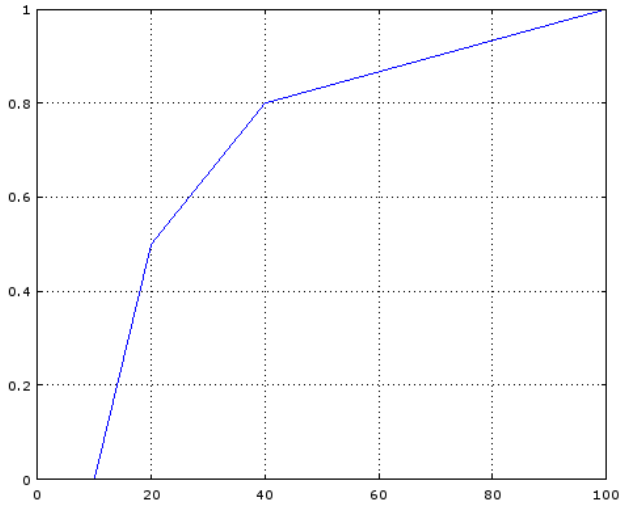
1-15 16-25 26-40 41-60 61-100

Kvantily pri triedených dátach

Počítanie kvantilov pri triedených dátach je sťažené tým, že nemáme k dispozícii samotné dáta, iba triedy a početnosti. Najjednoduchším východiskom je pracovať s hypotézou rovnomerného rozloženia dát v rámci každej triedy. Vysvetlíme to na jednoduchom príklade:

Prekročenie MPR o x km/h	(10,20]	(20,40]	(40,100]
Počet zaznamenaných priestupkov	50	30	20
Relatívna početnosť	0.5	0.3	0.2
Kumulatívna rel. poč.	0.5	0.8	1

Rovnomerné rozloženie dát v triede znamená, že kumulatívna RP v prvej triede porastie rovnomerne (lineárne) od 0 po 0.5, v druhej triede od 0.5 po 0.8 a v tretej od 0.8 po 1.



Poznámka: obrázok sme vykreslili pomocou nasledujúcej „vetvičkovej“ funkcie, ktorá vyjadruje presne to, čo sme slovne opísali:

```
F(x) =  (10<x)*(x<=20)*(x-10)*0.05
        +(20<x)*(x<=40)*(0.5+(x-20)*0.3/20)
        +(40<x)*(x<=100)*(0.8+(x-40)*0.2/60)
```

Označenie funkcie ako F naznačuje, že ide o analógiu distribučnej funkcie. Hľadanie kvantilov znamená hľadať také x, aby platilo F(x) = p. Ideálne je nájsť inverznú funkciu k F – ak to raz urobíme, už nám bude sypať kvantily na želanie. Ak však máme zistiť len zopár kvantilov, môže byť rýchlejšie ich nájsť skusmo.

Z obrázku (a zo zadania) vidíme, že medián je 20. Dolný kvartil je 15 (to vidno voľným okom) a horný kvartil 36.6666666... (trochu poskúšame).

Avšak nájsť inverznú funkciu ku F nie je až tak ťažké, aby sme na to rezignovali:

```
F^-1(x) =   (0<p)*(p<=0.5)*(20*p+10)
          +(0.5<p)*(p<=0.8)*(20*(p-0.5)/0.3+20)
          +(0.8<p)*(p<=1)*(60*(p-0.8)/0.2+40)
```

A už stačí dosadzovať želané hodnoty p.

Riešené príklady

Príklad 1:
Je daný súbor dát, zapísaný vo vektore:

[1 4 5 7 2 3 4 8 6 2 4 1 8 5 3]

a) Nájdite priemer, rozptyl, medián, kvartily a 0.15, 0.6 a 0.9-kvantily.
b) Zostavte tabuľku početností.
c) Nakreslite stĺpcový diagram a boxplot.

Riešenie:

a) Vektor má dĺžku 15. Priemer a rozptyl vieme vypočítať s pomocou softvérov. Napr. takto:

```
mean(x)
ans =  4.2000

var(x,1)
ans =  4.9600
```

Na ďalšie kroky si musíme vektor usporiadať:

x = [1 1 2 2 3 3 4 4 4 5 5 6 7 8 8]

Med = 4

Kvartily: $0.25*15 = 3.75 \approx 4$
$0.75*15 = 11.25 \approx 12$

$Q_L = 2$ (4-tá hodnota zľava, 12-ta sprava)
$Q_U = 6$ (4-tá hodnota sprava, 12-ta zľava)

Kvantily:

x = [1 1 2 2 3 3 4 4 4 5 5 6 7 8 8]

$0.15*15 = 2.25 \approx 3$ $q_{0.15} = 2$

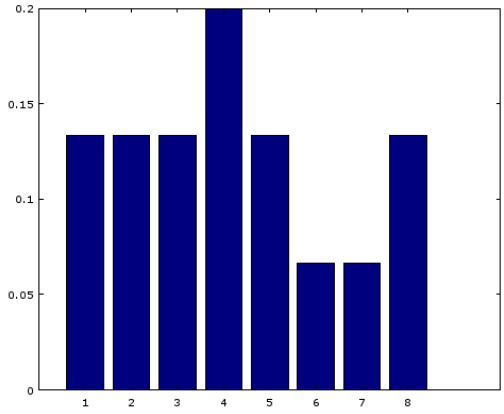
$0.6*15 = 9 \approx 9$, $0.4*15 = 6 \approx 6$ $q_{0.6} = (4+5)/2 = 4.5$

$0.9*15 = 13.5 \approx 14$ $q_{0.9} = 8$

b)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
poč.	2	2	2	3	2	1	1	2
rel.poč.	2/15	2/15	2/15	3/15	2/15	1/15	1/15	2/15

c)



R= 6-2 = 4, 1.5*R = 6

Poznámka – skúste si nájsť online nástroje na kreslenie boxplotu.
Jeden z tých primitívnejších:
https://www.meta-chart.com/box-and-whisker#/data

Príklad 2:
100 študentov hrdinsky bojovalo na skúške z Pivovarníckej štatistiky. Po prvom termíne boli výsledky v AIS nasledovné:

body	[0,50)	[50,64)	[64,76)	[76,86)	[86,94)	[94,100)
známka	fx	e	d	c	b	a
počet	40	21	15	12	8	4

Poznámka: Bodové hodnotenie nemuselo byť celočíselné, intervaly chápeme ako podmnožiny $\mathbb{R}$.

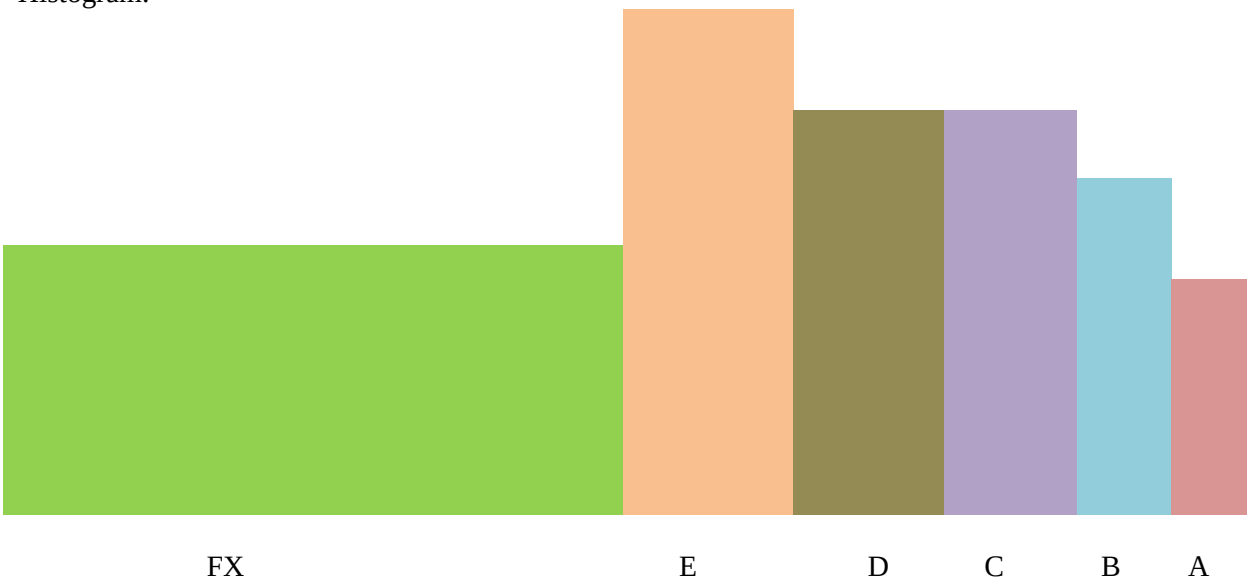
a) Nakreslite histogram.
b) Vypočítajte medián, kvartily a zopár kvantilov.

Riešenie:

a) Doplníme ďalšie užitočné čísla do tabuľky:

známka	fx	e	d	c	b	a
šírka triedy	50	14	12	10	8	6
výška stĺpca	0.8	1.5	1.2	1.2	1	0.66666

Histogram:



b)

body	[0,50)	[50,64)	[64,76)	[76,86)	[86,94)	[94,100)
známka	fx	e	d	c	b	a
počet	40	21	15	12	8	4
rel. poč.	0.4	0.21	0.15	0.12	0.08	0.04
kumul. rp	0.4	0.61	0.76	0.88	0.96	1

Aproximatívna distribučná funkcia (po intervaloch):

$$F(x) = \begin{cases} x*0.4/50 & \text{na } [0,50) \\ 0.4+(x-50)/14*0.21 & \text{na } [50,64) \\ 0.61+(x-64)/12*0.15 & \text{na } [64,76) \\ 0.76+(x-76)/10*0.12 & \text{na } [76,86) \\ 0.88+(x-86)/8*0.08 & \text{na } [86,94) \\ 0.96+(x-94)/6*0.04 & \text{na } [94,100) \end{cases}$$

Kvantilová funkcia:

$$F^{-1}(p) = \begin{cases} p*50/0.4 & \text{na } [0, 0.4) \\ 50+(p-0.4)*14/0.21 & \text{na } [0.4, 0.61) \\ 64+(p-0.61)*12/0.15 & \text{na } [0.61, 0.76) \\ 76+(p-0.76)*10/0.12 & \text{na } [0.76, 0.88) \\ 86+(p-0.88)*8/0.08 & \text{na } [0.88, 0.96) \\ 94+(p-0.96)*6/0.04 & \text{na } [0.96, 1] \end{cases}$$

A môžeme dosadzovať:

Medián $F^{-1}(0.5) = 50+(0.5-0.4)*14/0.21 = 56.6666$

Dolný kvartil $F^{-1}(0.25) = 0.25*50/0.4 = 31.25$

Horný kvartil $F^{-1}(0.75) = 64+(0.75-0.61)*12/0.15 = 75.2$

0.98-kvantil $F^{-1}(0.98) = 94+(0.98-0.96)*6/0.04 = 97$

Neriešené príklady

1. 7 študentov sa pýtali, koľkokrát za týždeň využili MHD. Výsledok je zapísaný v podobe dátového vektora:

$$x = [3\ \ 9\ \ 7\ \ 3\ \ 1\ \ 5\ \ 7]$$

a) Znázornite výsledok stĺpcovým diagramom.
b) Vypočítajte priemer a rozptyl. (5, 6.8571)
c) Nájdite medián a oba kvartily. (5, 3, 7)
d) Nájdite 0.2, 0.6 a 0.9- kvantily. (3, 7, 9)
e) Nakreslite boxplot.

2. To isté pre vektor $x = [3\ \ 9\ \ 7\ \ 3\ \ 1\ \ 5\ \ 7\ \ 9\ \ 3\ \ 1]$

3. Na pretekoch *cross-country / bežec + pes* (to sa reálne koná napr. na trase Rača-Kamzík) vyzerali časy na výsledkovej listine (v celých minútach) nasledovne:

[76, 78, 87, 87, 89, 91, 97, 99, 105, 113, 114, 114, 144, 236]

a) Vypočítajte priemer a rozptyl. (109.3, 1530.1)
c) Nájdite medián a oba kvartily. (98, 87, 114)
d) Nájdite 0.2, 0.6 a 0.9- kvantily. (87, 105, 144)
e) Nakreslite boxplot.

4. Ankety sa zúčastnilo 200 respondentov. Do vekových tried sa začlenili takto:

0-18	54
18-25	70
25-40	45
40-65	30
65-105	1

a) Znázornite uvedené hodnoty v histograme.
b) Nájdite medián, kvartily a 0.11, 0.24 a 0.72-kvantily. (22.6, 16.6666, 33.6666, 7.3333, 16, 31.6666)

5. Medzi prvými majiteľmi áut značky @#$ zisťovali, po koľkých rokoch sa rozhodli svoje auto predať (alebo zošrotovať). Výsledky sú uvedené v tabuľke.

Vek predaného vozidla	[0,2)	[2,6)	[6,12)	[12,15)	[15,20)	[20,30)
Počet	27	84	277	61	19	3

a) Znázornite uvedené hodnoty v histograme.
b) Nájdite medián, kvartily a 0.15, 0.33 a 0.9-kvantily.