Matematická štatistika

Cvičenie 7 – Centrálna limitná veta

Všetky cesty vedú do ... napr. Bratislavy, stačí len spraviť dostatočný počet krokov a správne sa nasmerovať.

Podobne je to s rozličnými náhodnými veličinami. Nech sú akékoľvek, s rastúcim počtom pokusov veličina určená priemerom výsledkov sa (pri splnení určitých podmienok) blíži vždy a neochvejne k normálnemu rozdeleniu. Preto sa to rozdelenie volá *normálne*.

Cieľom cvičenia je overiť si túto skutočnosť na príkladoch.

Príklad 1
Hracia kocka je čiastočne opotrebovaná, takže padajú len hodnoty 1 (3 steny), 2 (1 stena), 3 (2 steny).

a) Napíšte tabuľku pravdepodobnostnej funkcie náhodnej veličiny X vyjadrujúcej hod takouto kockou a nakreslite jej stĺpcový diagram.
b) Napíšte tabuľku pravdepodobnostnej funkcie veličiny Mn vyjadrujúcej aritmetickýpriemer z n-násobného hodu kockou (n=2, 3, 4, ...). Kreslite postupne stĺpcové diagramy.
c) Vypočítajte strednú hodnotu a rozptyl pre jednotlivé Mn.

//

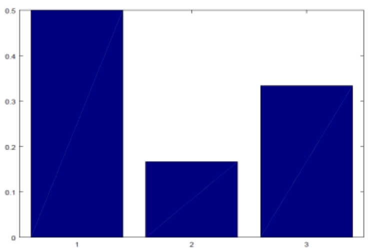
Riešenie:

Ideme skúmať konvergenciu k normálnemu rozdeleniu, ktoré je spojité, a začíname príkladom s diskrétnym rozdelením. To vôbec nevadí...

a) Tabuľka pre X

X	1	2	3
P	3/6	1/6	2/6

Diagram pre X



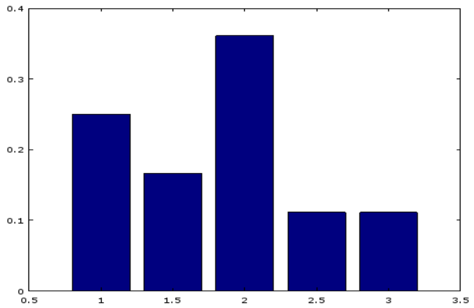
b) Náhodná veličina M2 vznikne z X tak, že urobíme dva pokusy a spriemerujeme ich. Možné výsledky a ich pravdepodobnosti sú nasledujúce:

1 ak padne 1+1, pravdepodobnosť 3/6*3/6
1.5 ak padne 1+2 alebo 2+1), pravdepodobnosť 3/6*1/6 + 1/6*3/6
2 ak padne 1+3, 2+2, 3+1, pravdepodobnosť 3/6*2/6 + 1/6*1/6 + 2/6*3/6
2.5 ak padne 2+3, 3+2, pravdepodobnosť 1/6*2/6 + 2/6*1/6
3 ak padne 3+3, pravdepodobnosť 2/6*2/6

Tabuľka pre M2

M2	1	1.5	2	2.5	3
P	9/36	6/36	13/36	4/36	4/36

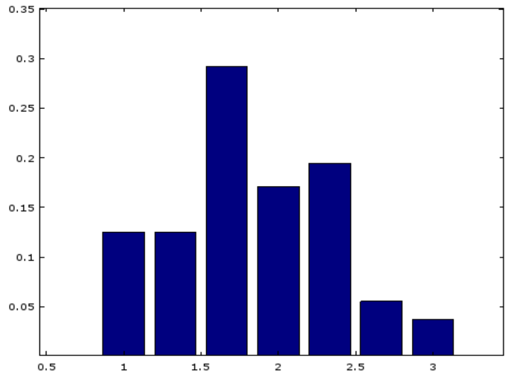
Diagram pre M2



Náhodná veličina M3 vznikne z X tak, že urobíme tri pokusy a spriemerujeme ich. Možné výsledky a ich pravdepodobnosti sú uvedené rovno v tabuľke:

Tabuľka a graf pre M3

M2	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	8/3	9/3
P	1/8	1/8	7/24	37/216	7/36	1/18	1/27



Podobne postupujeme ďalej.

M4

1	5/4	3/2	7/4	2	9/4	5/2	11/4	3
1/16	1/12	5/24	19/108	289/1296	19/162	5/54	2/81	1/81

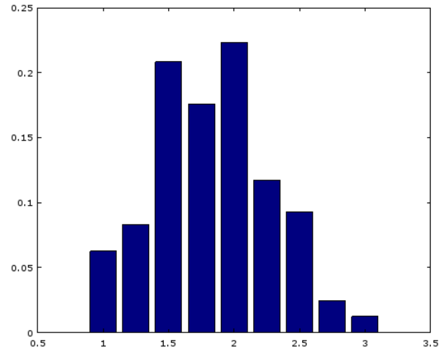
M5

1	6/5	7/5	8/5	9/5	2	11/5	12/5	13/5	14/5	3
1/32	5/96	5/36	65/432	545/2592	1201/7776	545/3888	65/972	10/243	5/486	1/243

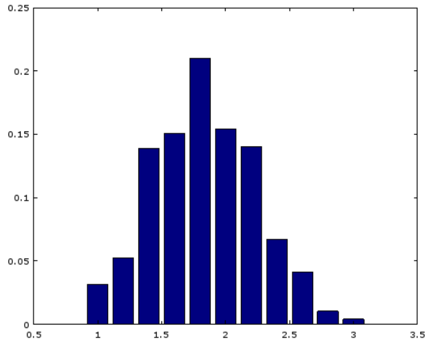
. . .

Stĺpcové diagramy:

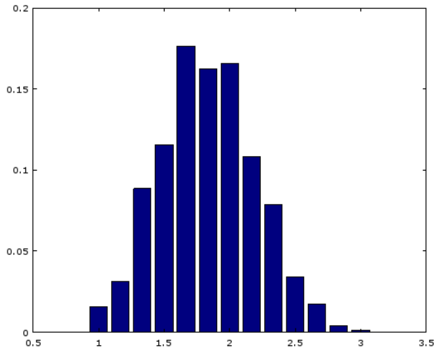
M4



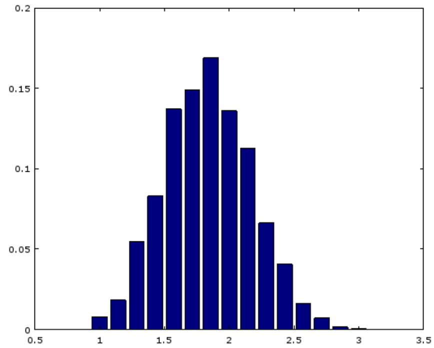
M5



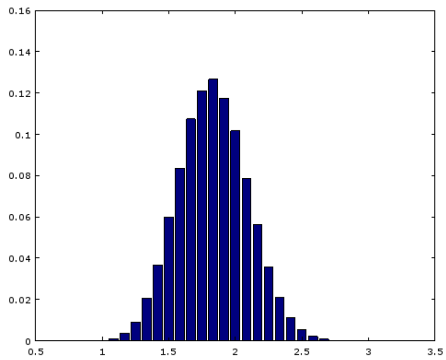
M6



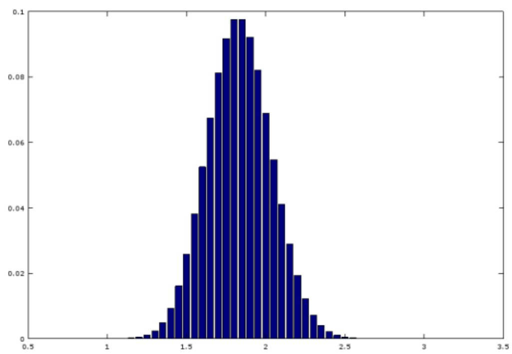
M7



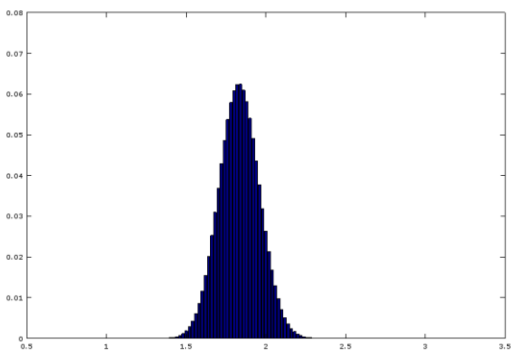
M12



M20



M50



Ako vidno z obrázkov, konvergencia ku kontúram normálneho rozdelenia je úplne zreteľná.

Úloha: Naprogramujte (v ľubovoľnom prostredí) výpočet X, P pre Mn a vykreslenie príslušných stĺpcových diagramov pri postupne rastúcom n. Inými slovami , skúste sa vlastným postupom dopracovať k výsledkom, ktoré boli uvedené vyššie.

Ak si zvolíte Matlab alebo Octave (to nie je reklama, iba priznanie, že inak to neviem), príkazy môžu vyzerať takto:

```
p=[3 1 2]; m=p;
for k=2:50, m=conv(m,p); mm=m/(6^k); x=(k:3*k)/k; [x; mm], bar(x, mm), end
```

(Výhodou je príkaz conv, ktorý bez blbých rečí rovno ráta hodnoty v čitateli pravdepodobností. Je to príkaz určený pôvodne na roznásobovanie polynómov, ale funguje rovnako dobre aj tu). Pokiaľ chcete sledovať postupné zmeny v diagrame, bude lepšie zrušiť cyklus a postupne to odkrokovať.

c) Počítajme strednú hodnotu a rozptyl pre jednotlivé Mn. Vzorce poznáme, stačí len dosadzovať. Podstatné je sledovať, ako sa budú tieto hodnoty vyvíjať. A samozrejme, nechceme sa príliš unaviť, takže na výpočet použijeme nejakú tú techniku.

Stredná hodnota vychádza 11/6 a drží sa na tejto hladine aj s narastajúcim n. To neprekvapuje, priemerovanie výsledkov z viacerých pokusov nemá dôvod pohnúť stredom.

Rozptyl: Dosadenie do vzorca nám dá postupne hodnoty:

n	Dn
1	29/36
2	29/72
3	29/108
4	29/144
5	29/180
6	29/216
7	29/252
8	29/288
9	29/324

Vidíme, že rozptyl pomaly klesá (menovateľ narastá). V tvare zlomku sú to prekvapivo pekné hodnoty a bližší pohľad ukazuje, že platí

$$D_n = 29/(36 \cdot n)$$

Čím vyššie n, tým sme bližšie k **nule**.

Neriešené príklady

1. Riešený príklad 1 prepočítajte (celý) s pomocou výpočtovej techniky. Zvoľte si také programovacie prostredie, v akom sa cítite „najbezpečnejšie“.

2. Je daná diskrétna náhodná veličina X s rovnomerným rozdelením na bodoch x = [1, 2, 3, 4, 5]. (Hodnoty p viete dorátať...)

a) Napíšte tabuľku pravdepodobnostnej funkcie náhodnej veličiny X a nakreslite stĺpcový diagram.

b) Napíšte tabuľku pravdepodobnostnej funkcie veličiny Mn vyjadrujúcej aritmetický priemer n-krát realizovanej veličiny X (n=2, 3, 4, ...). Kreslite postupne stĺpcové diagramy.

c) Vypočítajte strednú hodnotu a rozptyl pre jednotlivé Mn.

3. Je daná diskrétna náhodná veličina X s nasledujúcim rozdelením

X	0	1	2	3
P	0.45	0.05	0.35	0.15

a) Nakreslite stĺpcový diagram.

b) Napíšte tabuľku pravdepodobnostnej funkcie veličiny Mn vyjadrujúcej aritmetický priemer n-krát realizovanej veličiny X (n=2, 3, 4, ...). Kreslite postupne stĺpcové diagramy.

c) Vypočítajte strednú hodnotu a rozptyl pre jednotlivé Mn.

4. Je daná diskrétna náhodná veličina X s alternatívnym rozdelením na bodoch x = [0, 1], p(0)=0.2, p(1)=0.8.

a) Napíšte tabuľku pravdepodobnostnej funkcie náhodnej veličiny X a nakreslite stĺpcový diagram.

b) Napíšte tabuľku pravdepodobnostnej funkcie veličiny Mn vyjadrujúcej aritmetický priemer n-krát realizovanej veličiny X (n=2, 3, 4, ...). Kreslite postupne stĺpcové diagramy.

(malo by vychádzať binomické rozdelenie)

c) Vypočítajte strednú hodnotu a rozptyl pre jednotlivé Mn.

Poznámka: Ako riešenie príkladu sa odovzdáva „skript“ a výstupy v rozumnom rozsahu (nie príliš veľa, ale aby bolo vidno konvergenciu)