

Cvičenie 2 – Podmienená pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť udalosti A za predpokladu, že nastane udalosť B:

$$P_B(A) = P(A|B) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

viacero spôsobov zápisu

vzorček s mohutnosťami – len pre konečné množiny

Riešené príklady

Príklad 1:

Hádzame naraz 2 kockami (červená a modrá). Budeme pozorovať nasledujúce udalosti:

- A: na oboch kockách padne rovnaké číslo
- B: na modrej dostaneme párne číslo
- C: na červenej padne výsledok 5 alebo 6
- D: súčet hodnôt z oboch kociek je najviac 6

Vypočítajte pravdepodobnosti udalostí A, B, C, D. Pre každú dvojicu udalostí zistíte príslušnú podmienenú pravdepodobnosť.

Riešenie:

Čísla, s ktorými budeme pracovať, sú konečné. Počítanie bude teda pohodlné.

Pri dvoch kockách máme spolu **36** možných výsledkov. Každý z nich, teda každá dvojica čísel, tu predstavuje elementárnu udalosť s rovnakou pravdepodobnosťou **1/36**.

Sledované udalosti A,B,C,D sú komplexné. Každá je zložená z niekoľkých (označme ten počet *k*) elementárnych udalostí a jej pravdepodobnosť je $k/36$.

Udalosť A: nastane pri dvojiciach 11, 22, 33, 44, 55, 66.

$$P(A) = 6/36.$$

Udalosť B: nastane pri dvojiciach $x2, x4, x6$, kde x je ľubovoľné číslo od 1 do 6.
To je spolu 18 možných dvojíc.

$$P(B) = 18/36.$$

Udalosť C: nastane pri dvojiciach $5x, 6x$, $x = 1, \dots, 6$.

$$P(C) = 12/36.$$

Udalosť D: nastane pri dvojiciach 15,14,13,12,11,
24,23,22,21,
33,32,31,
42,41,
51

$$P(D) = 15/36.$$

Podmienené pravdepodobnosti:

$P(X|X) = 1$, kde $X=A,B,C,D$.

$$P(B|A) = \frac{|B \cap A|}{|A|} = \frac{|\{22,44,66\}|}{6} = 3/6$$

$$P(C|A) = \frac{|C \cap A|}{|A|} = \frac{|\{55,66\}|}{6} = 2/6$$

$$P(D|A) = \frac{|D \cap A|}{|A|} = \frac{|\{11,22,33\}|}{6} = 3/6$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|\{22,44,66\}|}{18} = 3/18$$

$$P(C|B) = \frac{|C \cap B|}{|B|} = \frac{|\{52,54,56, 62,64,66\}|}{18} = 6/18$$

$$P(D|B) = \frac{|D \cap B|}{|B|} = \frac{|\{14,12,24,22,32,42\}|}{18} = 6/18$$

$$P(A|C) = \frac{|A \cap C|}{|C|} = \frac{|\{55,66\}|}{12} = 2/12$$

$$P(B|C) = \frac{|B \cap C|}{|C|} = \frac{|\{52,54,56, 62,64,66\}|}{12} = 6/12$$

$$P(D|C) = \frac{|D \cap C|}{|C|} = \frac{|\{15\}|}{12} = 1/12$$

$$P(A|D) = \frac{|A \cap D|}{|D|} = \frac{|\{11,22,33\}|}{15} = 3/15$$

$$P(B|D) = \frac{|B \cap D|}{|D|} = \frac{|\{22,44,66\}|}{15} = 6/15$$

$$P(C|D) = \frac{|C \cap D|}{|D|} = \frac{|\{55,66\}|}{15} = 1/15$$

* Prečo sme v polovici prípadov mohli vynechať jeden krok v postupe počítania?

Príklad 2:

Hádzeme naraz 2 kockami (červená a modrá). Budeme pozorovať nasledujúce udalosti:

A: číslo na červenej je 1,2 alebo 3.

B: väčšie z oboch čísel (ak sa rovnajú, tak ktorékoľvek z nich) je 4,5 alebo 6

C: číslo na červenej je párne

i) Zistite, ktoré dvojice udalostí sú navzájom nezávislé.

ii) Zistite, ktoré dvojice udalostí sú za predpokladu tej tretej navzájom nezávislé.

Riešenie:

Udalosti A, B, C si pre lepšiu názornosť vyznačíme graficky:

A						B						C					
11	12	13	14	15	16	11	12	13	14	15	16	11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26	21	22	23	24	25	26	21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36	31	32	33	34	35	36	31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46	41	42	43	44	45	46	41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56	51	52	53	54	55	56	51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66	61	62	63	64	65	66	61	62	63	64	65	66

i) $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$, $P(C) = 1/2$.

$$P(A \cap B) = 1/4 \quad \neq \quad P(A) \cdot P(B) = 3/8$$

$$P(A \cap C) = 1/6 \quad \neq \quad P(A) \cdot P(C) = 1/4$$

$$P(B \cap C) = 5/12 \quad \neq \quad P(B) \cdot P(C) = 3/8$$

Žiadne dve udalosti z A,B,C nie sú nezávislé.

ii) $P(A \cap B | C) = 1/6 \quad \neq \quad P(A|C) \cdot P(B|C) = 1/3 \cdot 5/6 = 5/18$

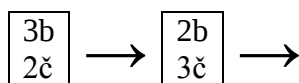
$$P(A \cap C | B) = 1/9 \quad \neq \quad P(A|B) \cdot P(C|B) = 1/3 \cdot 5/9$$

$$P(B \cap C | A) = 1/6 \quad = \quad P(B|A) \cdot P(C|A) = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$$

Za predpokladu A sú udalosti B a C nezávislé.

Príklad 3:

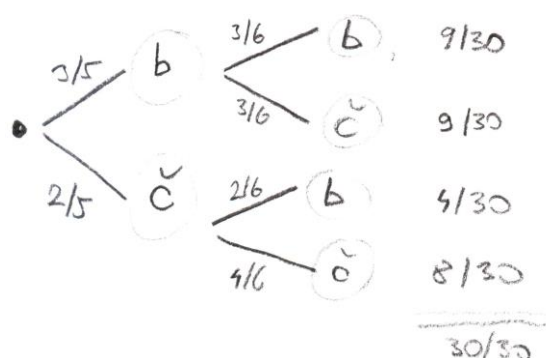
Máme dve nepriehľadné vrečky. V prvom sú 3 biele a 2 čierne žetóny, v druhom 2 biele a 3 čierne. Vytiahneme z prvého vrečka žetón a hodíme do druhého. Zamiešame, necháme vychladnúť, a potom vytiahneme jeden žetón z druhého vrečka.



- a) Aká je pravdepodobnosť, že druhý vytiahnutý žetón bude biely?
- b) Aká je pravdepodobnosť, že prvý aj druhý vytiahnutý žetón budú mať rovnakú farbu?

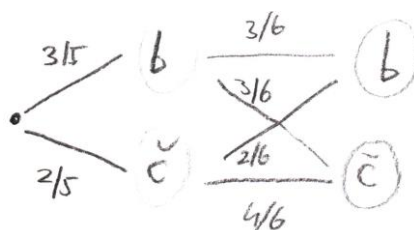
Riešenie:

Opísaný experiment môže prebehnúť niekoľkými spôsobmi, ktoré si vypíšeme v prehľadnom diagrame (mape udalostí):



Pri prvom ťahu máme $3/5$ šancu vytiahnuť biely žetón. Po jeho vhození do druhého vrečka dostaneme 3 biele a 3 čierne žetóny, takže biela aj čierna majú po $3/6$ pravdepodobnosť. Podobne to bude vyzerať v prípade, že najprv vytiahneme čierny žetón ($2/5$ šanca).

Mapa sa dá zakresliť aj úspornejšie, čo oceníme zvlášť pri väčšom počte udalostí. Nevýhodou však je menšia prehľadnosť (nemáme „na tácke“ všetky možné výstupy).



- a) Druhý žetón bude biely, ak v diagrame skončíme na písmenku **b**. Tam sa evidentne dá dostať dvoma cestami, ich pravdepodobnosti sú $9/30$ a $4/30$, teda spolu je to $13/30$ pravdepodobnosť.
- b) Oba žetóny rovnakej farby môžu byť biely+biely, čo je podľa mapy $9/30$ pravdepodobnosť, alebo čierny+čierny, čo je $8/30$. Celková pravdepodobnosť, na ktorú sa pýtame, je $17/30$.

Dodatok:

Pozrime sa na celý experiment odzadu, tj. spravíme spätnú rekonštrukciu.

Prvé vetvenie: v druhom (poslednom ťahu) sme mohli vytiahnuť biely alebo čierny žetón.

Pravdepodobnosti sú (podľa obrázkov vyššie):

$(9+4)/30$ pre bielu farbu

$(9+8)/30$ pre čiernu farbu

Druhé vetvenie:

Ak sme ako druhý vytiahli biely žetón, s akou pravdepodobnosťou bol ten prvý biely alebo čierny?

Výpočet podľa vzorca podmienenej pravdepodobnosti:

$$P(\text{prvý aj druhý biely})/P(\text{druhý biely}) = (9/30) / (13/30) = 9/13$$

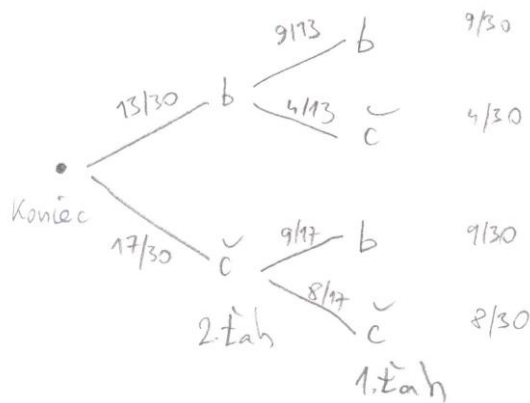
$$P(\text{prvý čierny a druhý biely})/P(\text{druhý biely}) = (4/30) / (13/30) = 4/13$$

Ak sme ako druhý vytiahli čierny žetón, s akou pravdepodobnosťou bol ten prvý biely alebo čierny?

$$P(\text{prvý biely a druhý čierny})/P(\text{druhý čierny}) = (9/30) / (17/30) = 9/17$$

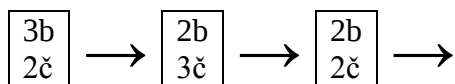
$$P(\text{prvý čierny a druhý čierny})/P(\text{druhý čierny}) = (8/30) / (17/30) = 8/17$$

Zakreslíme výsledky do “inverznej mapy”:



Príklad 4:

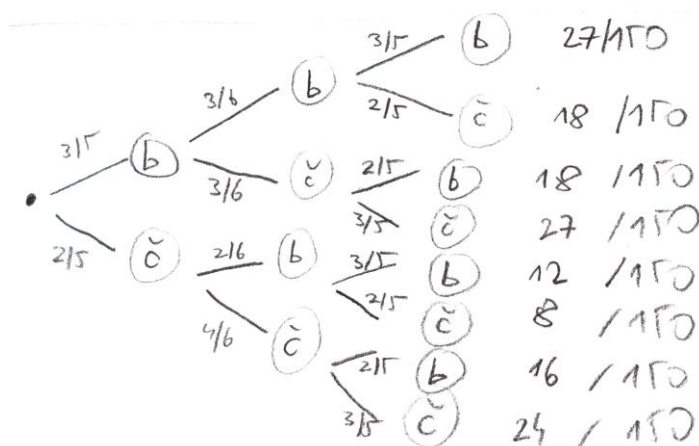
Máme tri nepriehľadné vrečky. V prvom sú 3 biele a 2 čierne žetóny, v druhom 2 biele a 3 čierne, v treťom 2 biele a 2 čierne. Vytiahneme z prvého vrečka žetón a hodíme do druhého. Zamiešame, necháme vychladnúť, a potom vytiahneme jeden žetón z druhého vrečka a vhodíme do tretieho vrečka. Nakoniec ťaháme žetón z tretieho vrečka.



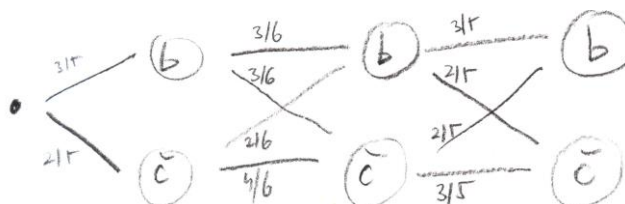
- a) Aká je pravdepodobnosť, že tretí vytiahnutý žetón bude biely?
 b) Aká je pravdepodobnosť, že všetky 3 vytiahnuté žetóny budú mať rovnakú farbu?

Riešenie:

Mapa:



Stručnejšie:



- a) $(27+18+12+16) / 150 = 73/150$
 b) $(27+24)/150 = 51/150$

Príklad 5:

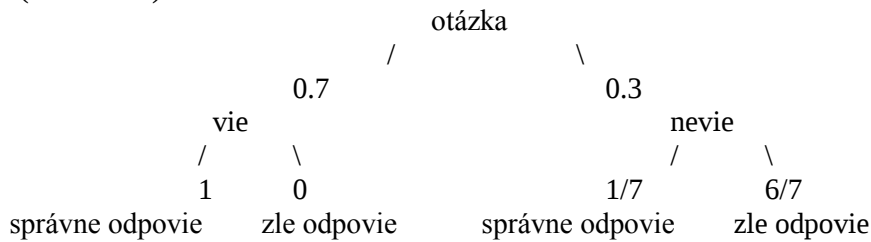
Študenta istej nemenovanej univerzity čaká test, ktorý pozostáva z jedinej otázky a 7 možných odpovedí (treba trafiť správnu). Napriek plnému úsiliu učivo ovláda na 70%. Ak mu „sadne“ otázka, odpovie správne (tj. omyly z nepozornosti a nedorozumenia vylúčime). Ak mu otázka nesadne (je mimo toho, čo sa učil), bude naslepo tipovať.

a) Aká je pravdepodobnosť, že test úspešne zvládne?

b) Ak študent správne odpovedal v teste, aká je pravdepodobnosť, že to naozaj aj vedel?

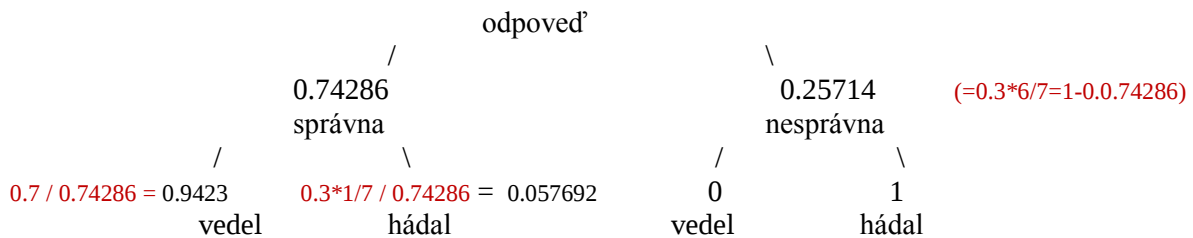
Riešenie:

a) Mapa (zhora dole):



správnu odpoveď dá s pravdepodobnosťou $0.7 \cdot 1$, ak to vie, a $0.3 \cdot 1/7$, ak to nevie. Spolu to je cca. 0.743 .

b) Skúsme si nakresliť „inverznú mapu“. Na riešenie tohto príkladu to síce nie je nutné, ale zide sa nám to precvičiť.



Ak študent odpovedal správne, sme v ľavej vetve. Vidíme z mapy, že možnosť „vedel“ má potom pravdepodobnosť 0.9423 .

Príklad 6:

Janko a Marienka bývajú vo svojich chalúpkach na lazoch, vizuálne ich však oddeľuje kopec. Keďže v tých končinách nie je signál ani iné moderné možnosti komunikácie, dohovárajú sa tradičnými dymovými signálmi s použitím morzeovky (krátky obláčik •, dlhý obláčik —, medzera ¶). Komunikáciu žiaľ často naruša vietor (zdeformuje tvar oblaku alebo odfúkne oblak skôr, než sa dostane nad kopec), horár na starom tereňáku bez filtra pevných častíc (falošné signály) či strýko Fero, ktorý do pece prikladá vlhké listie.

Pozorovanie komunikácie dymovými signálmi v smere od Marienky k Jankovi ukazuje, že prevládajú krátke znaky (0.5 z odoslaného), nasledujú dlhé znaky (0.3 z odoslaného) a najmenej je medzier (0.2). Každý odoslaný znak v dôsledku spomenutých rušivých vplyvov môže byť zachytený správne alebo aj ako iný znak. Pravdepodobnosti sú nasledujúce:

	Marienka		
	/ 0.5 •	0.3 —	\ 0.2 ¶
odoslané			
	/ 0.6 •	0.2 —	\ 0.2 ¶
prijaté			
	/ 0.2 •	0.7 —	\ 0.1 ¶
	/ 0.2 •	0 —	\ 0.8 ¶

- S akou pravdepodobnosťou (podielom na celku) budú k Jankovi prichádzať jednotlivé znaky?
- Aká je pravdepodobnosť, že Janko zachytí rovnaký znak, ako bol odoslaný?
- Ak Janko prijal dlhý znak, aká je pravdepodobnosť, že ten znak bol aj odoslaný? To isté riešte pre ostatné znaky.

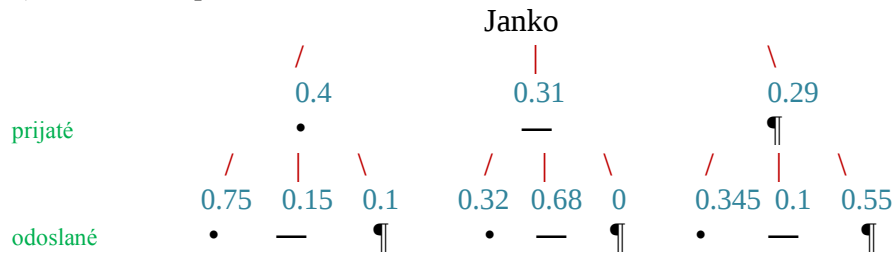
Riešenie:

- a) Mapa už je nakreslená, treba len vypočítať príslušné pravdepodobnosti.

$$\begin{aligned}P(\bullet) &= 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.4 \\P(\text{—}) &= 0.5 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0 = 0.31 \\P(\text{¶}) &= 0.5 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.8 = 0.29\end{aligned}$$

b) $P(\text{odoslané} = \text{prijaté}) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.8 = 0.67$

c) Inverzná mapa:



Odkiaľ sú tie čísla?

$$0.5 * 0.6 / 0.4 = 0.75 \quad P(\text{odoslaný } \bullet, \text{ prijatý } \bullet) / P(\text{prijatý } \bullet)$$

$$0.3 * 0.2 / 0.4 = 0.15 \quad P(\text{odoslaný } \text{—}, \text{ prijatý } \bullet) / P(\text{prijatý } \bullet)$$

$$0.2 * 0.2 / 0.4 = 0.1 \quad P(\text{odoslaný } \text{¶}, \text{ prijatý } \bullet) / P(\text{prijatý } \bullet)$$

$$0.5 * 0.2 / 0.31 = 0.32 \quad P(\text{odoslaný } \bullet, \text{ prijatý } \text{—}) / P(\text{prijatý } \text{—})$$

$$0.3 * 0.7 / 0.31 = 0.68 \quad P(\text{odoslaný } \text{—}, \text{ prijatý } \text{—}) / P(\text{prijatý } \text{—})$$

$$0.2 * 0 / 0.31 = 0.0 \quad P(\text{odoslaný } \text{¶}, \text{ prijatý } \text{—}) / P(\text{prijatý } \text{—})$$

$$0.5 * 0.2 / 0.29 = 0.34 \quad P(\text{odoslaný } \bullet, \text{ prijatý } \text{¶}) / P(\text{prijatý } \text{¶})$$

$$0.3 * 0.1 / 0.29 = 0.1 \quad P(\text{odoslaný } \text{—}, \text{ prijatý } \text{¶}) / P(\text{prijatý } \text{¶})$$

$$0.2 * 0.8 / 0.29 = 0.55 \quad P(\text{odoslaný } \text{¶}, \text{ prijatý } \text{¶}) / P(\text{prijatý } \text{¶})$$

Odpoveď na otázky: Ak bol prijatý dlhý znak, je 0.68 pravdepodobnosť, že bol aj odoslaný. Pri krátkom je to 0.75 a pri medzere 0.55.

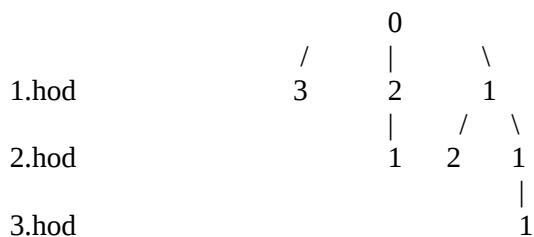
Príklad 7:

Hádzame hracou kockou a sčítujeme výsledky. Ak sa nám podarí dostať presne súčet x , víťazíme, inak máme smolu. Aká je pravdepodobnosť víťazstva pre $x = 3, 4, 5, 6$?

Riešenie:

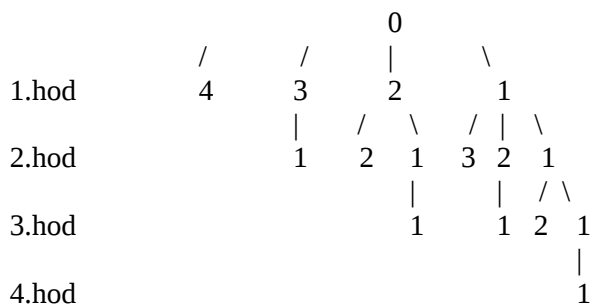
V záujme prehľadnosti budeme kresliť len čiastočnú mapu – obmedzíme sa na tie vývojové línie, ktoré vedú k úspechu. Každá z nakreslených vetiev má pravdepodobnosť $1/6$ (nebudeme zapisovať).

$x=3$:



Pravdepodobnosť úspechu je $1/6 + 1/6^2 + 1/6^2 + 1/6^3 = 0.227$

$x=4$:



Pravdepodobnosť úspechu je $1/6 + 3*1/6^2 + 3*1/6^3 + 1/6^4 = 0.2646$

Neriešené príklady

1. Máme 5 vrecúšok s nasledujúcim obsahom:

1., 3., 5. vrecko = 2 biele + 1 čierny žetón

2., 4. vrecko = 1 biely + 2 čierne žetóny

Postupne pre $i=1,2,3,4$ budeme ťahať z i -teho vrečka žetón a hádzať ho do $(i+1)$ -ého vrečka. Nakoniec z posledného vrečka vytiahneme žetón.

a) Nakreslite pravdepodobnostný diagram možných priebehov experimentu. (Optimalizujte, alebo si zoberte veľký papier.)

b) Aká je pravdepodobnosť, že posledný vytiahnutý žetón bude čierny? (307 / 768)

c) Aká je pravdepodobnosť, že farby ťahaných žetónov sa budú dôsledne striedať? (11 / 256)

d) Posledný vytiahnutý žetón vhodíme späť do prvého vrečka. Aká je pravdepodobnosť, že obsah VŠETKÝCH vrecúšok bude nakoniec rovnaký, aký bol na začiatku? (9 / 64)

2.* V riešenom príklade 4. nakreslite „inverznú mapu“ a vypočítajte pravdepodobnosti na jednotlivých vetvách.

3. Dokončite príklad 7 (riešený) pre $x=5, 6$, a skúste pokračovať aj s vyššími hodnotami. Dalo by sa k výsledkom dopracovať aj bez kreslenia mapy? Dá sa využiť (do akej miery?) Pascalov trojuholník? (0.30877 pre $x=5$, 0.36 pre $x=6$, 0.253 pre $x=7$)

4. Podľa prognózy štatistického úradu v krajine xyz sa zo 100 000 detí narodených v roku $abcd$ dožije veku 45 rokov 96 123 a veku 65 rokov sa dožije 82 951. Určte pravdepodobnosť, že človek, ktorý sa dožije veku 45 rokov, sa dožije aj veku 65 rokov. (0.863)

5. Pravdepodobnosť narodenia chlapca alebo dievčaťa v rodine XY nech je 48:52.

a) V rodine sú dve deti a vieme, že prvé z nich je chlapec. Aká je pravdepodobnosť, že obe deti sú chlapci? (triviálne)

b) V rodine sú dve deti a vieme, že jedno z nich je chlapec. Aká je pravdepodobnosť, že obe deti sú chlapci? (0.3156)

c) V rodine sú dve deti a vieme, že prvé z nich / jedno z nich je dievča. Aká je pravdepodobnosť, že druhé z detí je dievča? (analogické ako vyššie)

6. Globálny výrobca gumových medvedíkov má výrobné prevádzky v 5 krajinách. V prvej sa vyprodukuje 30%, v druhej 25%, v tretej 20%, vo štvrtjej 15% a v piatej 10%.

Pravdepodobnosť, že v sáčku s medvedíkmi sa vyskytne omylom kyslá žĺžala je v závislosti od krajiny (v danom poradí) 4%, 5%, 3%, 2%, 3%.

Aká je pravdepodobnosť, že v jednom náhodne vybranom balení z celoročnej produkcie bude žĺžala? (0.0365)

7.* V televíznej šou súťažiaci postaví pred tri rovnaké škatule. Dve sú prázdne, v jednej je hodnotný darček. Súťažiaci ukáže na jednu z krabíc a očakáva, že moderátor ju otvorí a v prípade šťastnej voľby bude darček jeho. Avšak moderátor zdramatizuje situáciu a otvorí inú škatuľu, ktorá je prázdna – toto spraví bez ohľadu na to, aká bola voľba súťažiaci, a oznámi mu toto pravidlo. Ostali tak dve škatule a súťažiaci má opäť hádať, kde sa nachádza darček. Čo by ste mu poradili v záujme zvýšenia šance na výhru – má ostať pri pôvodnej voľbe alebo zmeniť svoju voľbu? (Návod: Na riešenie príkladu stačí tá výbava, ktorú sme využívali na aktuálnom cvičení. Prípadne skúste pogúgliť heslo Monty-Hall problem).