Matematická štatistika

Cvičenie 1 – pravdepodobnosť

Riešené príklady

Základná definícia pravdepodobnosti:

> Pomer počtu priaznivých (z hľadiska sledovanej položky) prípadov ku počtu všetkých prípadov.

Táto definícia platí, ak pracujeme s konečnými číslami. Ak čísla nie sú konečné, o tom bude reč neskôr.

Treba si pripomenúť pojmy (a vzorce):

- permutácie,
- permutácie s opakovaním
- kombinácie,
- variácie

Kombinačné číslo

$$\binom{n}{k}$$

= C(n,k) = n! / (n-k)! / k!

Z praktických dôvodov sa v týchto textoch uprednostňuje zápis C(n,k) .

Príklad 1:
V košíku sa nachádza 5 červených a 3 zelené jablká. Naslepo (náhodne) vyberiem 1 jablko. Aká je pravdepodobnosť, že bude červené / zelené?

Riešenie:
V košíku je spolu 8 jabĺk. Pre každé jablko je teda 1/8 šanca, že ho vytiahneme.
Červených jabĺk je 5. Pravdepodobnosť vytiahnutia červeného jablka je pomer počtu priaznivých (5) ku počtu všetkých (8) možností. Číselne je to 5/8 = 0.625 = 62.5 %.
Analogicky šanca na zelenú voľbu je 3/8 = 0.375 = 37.5 % .

Zápis v percentách je určený pre komunikáciu s verejnosťou, zápis v zlomku alebo desatinnom tvare je na použitie vo výpočtoch a na internú komunikáciu.

Príklad 2:
Máme tri kocky z hry „Človeče, neštvi ma“, červenú, modrú a zelenú. (Farebné rozlíšenie je z matematického hľadiska nepodstatné, slúži len ako pomôcka na prehľadnejšie čítanie výsledkov pokusu). Kocky sú poctivé, tj. každé z čísel 1 až 6 padá s rovnakou pravdepodobnosťou 1/6. Hodíme naraz všetky tri kocky a prečítame si „padnuté“ hodnoty na kockách v tomto poradí (!) – červená, modrá, zelená.

Otázky a riešenie:

a) Aká je pravdepodobnosť, že padnú tri jednotky? (Tento výsledok zapíšeme 111)

Na každej kocke je 6 možností, kocky sú tri. Všetkých možných kombinácií je preto 216 (= 6^3). Tri jednotky sú práve jednou z týchto možností. Pravdepodobnosť je preto 1/216.

b) Aká je pravdepodobnosť, že všetky tri čísla z pokusu budú rovnaké?

Tri rovnaké čísla sa dajú získať 6 spôsobmi: 111, 222, 333, 444, 555, 666. Hľadaná pravdepodobnosť je 6/216.
6/216 sa dá vykrátiť na 1/36, ale v kontexte jedného príkladu s viacerými otázkami má svoj význam nekrátiť zlomky, aby sa dali výsledky medzi sebou rýchlo a pohodlne porovnávať.

c) Aká je pravdepodobnosť, že vo výsledku aspoň dve čísla budú rovnaké?

Opäť si môžeme všetky možnosti vypísať, ale keďže je toho viac, spravíme to úspornejšie.
Aspoň dve rovnaké čísla znamená, že sú buď tri rovnaké, alebo dve rovnaké a jedna iná.

– Dve jednotky na červenej a modrej, iné číslo na zelenej: 112, 113, 114, 115, 116
Máme 5 možností. Presne rovnako dostaneme po 5 možností, ak bude „iné číslo“ na modrej alebo červenej:
121, 131, 141, 151, 161; 211,311, 411, 511, 611
Spolu teda máme 15 možností pre konfiguráciu „dve jednotky a jedno iné číslo“.

– Dve dvojky a jedno iné číslo – analogicky ako vyššie je to 15 možností.
Podobne pre dve trojky, dve štvorky, ...
Spolu to vychádza na 6*15 = 90 možností.

Máme teda 90 možností pre „dve rovnaké čísla a jedno iné“ a 6 možností pre tri rovnaké.
Hľadaná pravdepodobnosť je preto 96 / 216.

d) Aká je pravdepodobnosť, že všetky tri čísla budú navzájom rôzne?

Na červenej kocke je 6 možností. Na modrej musí padnúť iné číslo ako na červenej, to je 5 možností. Na zelenej musí padnúť iné číslo než na červenej aj modrej, to sú 4 možnosti. Spolu je to 6*5*4 = 120 možností. Pravdepodobnosť je teda 120 / 216.

Všimnime si, že výsledky v c) a d) dávajú v súčte 1, tj. 96/216 + 120/216 = 216/216 = 1 . Dôvod je zrejmý, výrok (predikát) určujúci (svojou pravdivosťou) množinu priaznivých výsledkov v d) je negáciou výroku v c). Keďže postup riešenia v d) bol jednoduchší a rýchlejší, bolo by rýchlejšie počítať úlohu c) nepriamo – ako „jedna mínus výsledok z d)“.

e) Aká je pravdepodobnosť, že všetky tri čísla budú párne?

Na každej z kociek môže mať nepárny výsledok hodnotu 1, 3 alebo 5, teda tri možnosti. Tri kocky a na každej tri priaznivé možnosti, to je spolu 3*3*3 = 27 možných kombinácií. Hľadaná pravdepodobnosť je 27 / 216.

f) Aká je pravdepodobnosť, že aspoň dve čísla budú párne?

Otázku môžeme vyriešiť rozumným výpisom všetkých možností, podobne ako v časti c) . Použijeme výsledok z e) a pripočítame k nemu počet všetkých možností „dve párne a jedno nepárne“.

– na zelenej nepárne, na modrej a červenej párne. Spolu je to 3*3*3 = 27 možností, lebo na každej kocke sú tri nepárne a tri párne čísla.
– na modrej nepárne, na zelenej a červenej párne. Spolu je to 3*3*3 = 27 možností.
– na červenej nepárne, na zelenej a modrej párne. Spolu je to 3*3*3 = 27 možností.

Dokoopy je to 3*27 možností, k tomu ešte 27 z časti e), a dostávame 4*27 = 108 možností. Hľadaná pravdepodobnosť je 108 / 216.

Výsledok, ktorý nám vyšiel, je po vykrátení 1/2 a dáva tušiť, že sme azda mohli postupovať šikovnejšie. Predstavme si, že sme vypísali všetky možnosti „aspoň dve párne čísla“ – označíme ich ako množina A.

Ktoré možnosti medzi vypísanými nie sú? Stručne sa dajú charakterizovať (cez negáciu predikátu) ako „najviac jedno párne číslo“, teda buď všetky nepárne, alebo jedno párne a dve nepárne. Bude to množina A^c, komplement ku A.

Zoberme teraz všetky trojice čísel z A a urobme s nimi nasledovnú operáciu: y = 7-x. Teda 1 sa zmení na 6, 2 na 5, ..., 6 na 1. Potom napr. trojica 123 sa zmení na 654, 246 na 531. atď. Touto operáciou (je bijektívna!) z množiny A vyrobíme presne množinu A^c. Z toho plynie, že A a A^c musia byť rovnako veľké, teda každá musí obsahovať polovicu zo všetkých 216 možností. Pravdepodobnosť, že výsledok bude z A, je teda 1/2.

g) Aká je pravdepodobnosť, že súčet „padnutých“ troch čísel bude práve 10?

Možností, ako získať súčet 10 , nie je veľa, takže miesto špekulácií si ich rýchlo vypíšeme.

10 = 6+3+1 (6 permutácií: 631, 613, 316, 361, 136, 163)	6
10 = 6+2+2 (permutácie s opakovaním, 3 možnosti: 622, 262, 226)	3
10 = 5+4+1 (6 permutácií)	6
10 = 5+3+2 (6 permutácií)	6
10 = 4+4+2 (3 permutácie s opak.)	3
10 = 4+3+3 (3 permutácie s opak.)	3

Spolu je to 27 možností, hľadaná pravdepodobnosť je 27/216.

h) Aká je pravdepodobnosť, že súčet „padnutých" troch čísel bude aspoň 10?

Všetkým nadšencom možno len odporučiť, aby si spravili podrobný rozbor a prehľad priaznivých možností. Po skúsenostiach z predošlých bodov však na tomto mieste uvedieme už len stručnejší spôsob výpočtu.

Najprv si skúsme uvedomiť nasledujúcu symetriu:
Súčet 3 získame ako 1+1+1 (jedna možnosť), presne rovnako získame jediným spôsobom súčet 18 (6+6+6).
Súčet 4 získame ako 2+1+1 (tri permutácie), presne rovnako získame tromi spôsobmi súčet 17.

Podobne uvidíme rovnaký počet možností, ako získať súčty
5 a 16, 6 a 15, 7 a 14, 8 a 13, 9 a 12, 10 a 11.

Z toho vyplýva, že presne polovica všetkých 216 trojíc má súčet najviac 10 a presne polovica má súčet aspoň 11.

Vráťme sa k zadaniu. Priaznivé možnosti pre súčet „aspoň 10" sa dajú vyskladať ako možnosti, kde je „súčet presne 10" + možnosti, kde je „súčet aspoň 11". Všetky tieto počty už poznáme, je to 27 (z časti f)) a 108 z poslednej úvahy. Dokopy je to (27+108) = 135, hľadaná pravdepodobnosť je teda 135/216.

<u>Príklad 3:</u>
Máme 2 jednoeurové mince, ktoré hádžeme na stôl. Ak na minci padne 1€, výsledok je 1, ak padne zadná strana, výsledok je 0. Oba výsledky považujeme za rovnako pravdepodobné. Pri hádzaní dvoch mincí je výsledkom súčet hodnôt z oboch mincí.

Otázky a riešenie:

a) Aká je pravdepodobnosť, že padne výsledok 2?

Možné výsledky sú nasledovné:

Minca A	Minca B	Súčet
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

Výsledok 2 získame v jednej priaznivej (zo 4 všetkých) možností, pravdepodobnosť je teda 1/4.

b) Ak budeme hádzanie dvojicou mincí opakovať, aká je pravdepodobnosť, že výsledok 2 padne presne pri piatom pokuse (ani skôr ani neskôr)?

Pri každom hode dvojicou mincí máme šancu 1/4 na výsledok 2 a 3/4 na výsledok iný než 2. Dostať výsledok 2 zrovna na piaty pokus znamená, že najprv štyrikrát musíme dostať výsledok „nie dva" a následne výsledok 2. Ide o 5 udalostí, ktoré sú navzájom nezávislé (ak hádžeme bez podvádzania), pravdepodobnosť že všetky nastanú podľa plánu, je súčinom ich pravdepodobností, tyeda odpoveď na otázku je (3/4)^4 * (1/4) = 0.0791

c) Hodíme dvojicou mincí presne 5-krát. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň raz padne hodnota 2?

Vypísať všetky priaznivé výsledky chvíľu potrvá a bude to nepochybne krásna, vzrušujúca a poučná skúsenosť. K matematickému umeniu však patrí aj istá cnostná lenivosť, ktorá hľadá skratky a úsporu všade, kde sa len dá. Túto cnosť si dovolíme aplikovať aj v tomto príklade.

Skúsme si uvedomiť, že opakom udalosti „aspoň raz padne 2“, je udalosť „ani raz nepadne 2“. Pravdepodobnosť, že v 5 pokusoch hodnotu 2 nedostanem ani raz, je (3/4)^5. To znamená, že pravdepodobnosť, o ktorú v tejto úlohe ide, je 1- (3/4)^5 .

Príklad 4:

V triede je 21 žiakov, z toho 16 chlapcov a 5 dievčat. Zo žiakov treba zostaviť 4-členný tím na súťaž v jedení palaciniek.

Otázky a riešenie:

a) Koľko rozličných 4-členných tímov je možné zostaviť?

Otázka sa dá preformulovať : „koľkými spôsobmi vieme vybrať štyri kusy z 21, pričom poradie nás nezaujíma?“ Je zrejmé, že ide o tzv. kombinácie. Odpoveďou je kombinačné číslo

C(21,4) = 21! / (21-4)! / 4! = 5985

b) Pri triednej porade prevaha chlapcov viedla k úvahám, že vraj dievčatá príliš dbajú o líniu a nebudú mať preto dostatok ochoty pchať sa palacinkami do prasknutia. Padlo preto rozhodnutie zostaviť čisto chlapčenský tím. Koľko možností majú?

Odpoveď je jednoduchá – C(16,4) = 16! / (16-4)! / 4! = 1820

c) Vyššie uvedené triedne úvahy neostali v utajení a vedenie školy sa rozhodlo v záujme rovnosti šancí stanoviť kvótu „povinne aspoň jedno dievča v tíme“. Ak to teda musí byť, trieda sa uzniesla, že teda jedno dievča zaradia - práve jedno, ani menej ani viac. Koľko je možností na zostavenie tímu?

Vyberáme 1 dievča z 5 a 3 chlapcov zo 16. Sú to dva nezávislé výbery, výsledky sa teda budú násobiť:

C(5,1) * C(16,3) = 5 * 560 = 2800

d) Počas prípravného sústredenia ostali mnohí účastníci v šoku pri zistení, že niektoré devy svojou schopnosťou šrotovať (osobitne nutelové) palacinky priam hanebne prekonali aj tých najväčších jedákov spomedzi chlapcov. Výsledkom bola zmena taktiky a akceptovanie kvót v pôvodnom znení „aspoň dievča v tíme“, teda 1 až 4. Koľkými spôsobmi sa dá takto zostaviť tím?

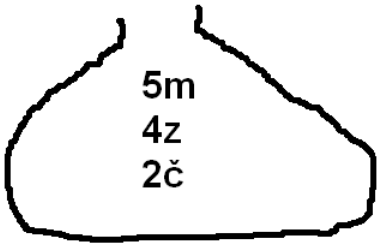
Budeme úsporní. „Aspoň jedno dievča v tíme“ je negáciou predikátu „čisto chlapčenský tím“. Potrebné čísla už máme. Od všetkých možností odrátame počet čisto chlapčenských štvoríc,

5985 - 1820 = 4165.

Vraj príbeh pokračoval žiadosťou chlapcov o stanovenie kvóty „aspoň 1 chlapec v tíme“.

Príklad 5

V nepriehľadnom vrecku je 11 gumených medvedíkov. 5 je modrých, 4 sú zelené a 2 červené. Hmatom sa farby odlíšiť nedajú. Náhodne z vrecka vyberieme **3** medvedíkov.



Otázky a riešenie:

a) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem medvedíkov s 3 navzájom rôznymi farbami?

Koľkými spôsobmi (bez ohľadu na farby) sa dá vybrať trojica gumkáčov z počtu 11? Odpoveď neprekvapí, je to C(11,3) = 165.

Koľkými spôsobmi vieme vybrať trojfarebnú partiu? Modrého ide vybrať 5 spôsobmi, zeleného 4 a červeného 2, odpoveď je teda 5*4*2 = 40

Hľadaná pravdepodobnosť je teda 40/165.

b) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem 3 medvedíkov s 2 rôznymi farbami?

Dvojfarebná partia môže vyzerať nasledovne:

2m+1z:	Dvoch modrých viem vybrať z pätice modrých C(5,2) = 10 spôsobmi 1 zelený zo štyroch sa dá vybrať 4 spôsobmi. Partia 2m+1z sa teda dá zostaviť 10*4 = 40 spôsobmi
2m+1č	C(5,2) * C(2,1) = 10*2= 20
2z+1m	C(4,2) * C(5,1) = 6*5= 30
2z+1č	C(4,2) * C(2,1) = 6*2= 12
2č+1m	C(2,2) * C(5,1) = 1*5= 5
2č+1z	C(2,2) * C(4,1) = 1*4= 4

Spolu je to 40+20+30+12+5+4 = 111 možností.
Pravdepodobnosť dvojfarebného výberu je teda 111/165.

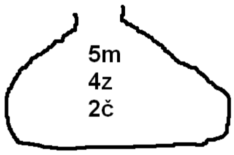
c) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem troch medvedíkov s rovnakej farby?

Jednofarebná partia nemôže byť červená. (Prečo?)

Modrá partia sa dá zostaviť C(5,3) = 10 spôsobmi .
Zelená trojica podobne C(4,3) = 4 spôsobmi.
Spolu je to 14. Hľadaná pravdepodobnosť je 14/165.

Ak sme počítali správne, súčet pravdepodobností získaných v častiach a, b, c by mal byť 1 (prečo?).
Overme si to: 40/165 + 111/165 + 14/165 = 1

Príklad 6
V nepriehľadnom vrecku je 11 gumených medvedíkov. 5 je modrých, 4 sú zelené a 2 červené. Hmatom sa farby odlíšiť nedajú. Náhodne z vrecka vyberieme 5 medvedíkov.



Otázky a riešenie:

a) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem medvedíkov s 3 navzájom rôznymi farbami?

Koľkými spôsobmi (bez ohľadu na farby) sa dá vybrať pätica gumkáčov z počtu 11? Odpoveď neprekvapí, je to C(11,5) = 462.

Trojfarebný výber sa dá urobiť mnohými spôsobmi, aby sme sa v tom nestratili, urobíme si podrobný prehľad možností:

m	z	č	P
3	1	1	C(5,3)*C(4,1)*C(2,1) = 80
2	1	2	C(5,2)*C(4,1)*C(2,2) = 40
2	2	1	C(5,2)*C(4,2)*C(2,1) = 120
1	2	2	C(5,1)*C(4,2)*C(2,2) = 30
1	3	1	C(5,1)*C(4,3)*C(2,1) = 40
			310

Hľadaná pravdepodobnosť je 310/462 .

b) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem medvedíkov s 2 navzájom rôznymi farbami?

Dvojfarebný výber sa dá urobiť nasledovnými spôsobmi:

m	z	č	P
4	1	0	C(5,4)*C(4,1) = 20
4	0	1	C(5,4)*C(2,1) = 10
3	2	0	C(5,3)*C(4,2) = 60
3	0	2	C(5,3)*C(2,2) = 10
2	3	0	C(5,2)*C(4,3) = 40
1	4	0	C(5,1)*C(4,4) = 5
0	4	1	C(4,4)*C(2,1) = 2
0	3	2	C(4,3)*C(2,2) = 4
			151

Hľadaná pravdepodobnosť je 151/462 .

c) Aká je pravdepodobnosť, že vyberiem 5 medvedíkov rovnakej farby?

Jednofarebná partia nemôže byť červená ani zelená. (Prečo?)
Modrá pätica sa dá zostaviť jediným spôsobom. Odpoveď je 1/462.

Kontrola správnosti: (310+151+1) / 462 = 1

Neriešené príklady

0. Riešte úlohy z príkladu 2, ak máte 4 kocky (červená, modrá, zelená, žltá)

a) Aká je pravdepodobnosť, že padnú štyri jednotky? (1/6^4)
b) Aká je pravdepodobnosť, že všetky štyri čísla z pokusu budú rovnaké? (6/6^4)
c) Aká je pravdepodobnosť, že vo výsledku aspoň dve čísla budú rovnaké? (936/1296)
d) Aká je pravdepodobnosť, že všetky štyri čísla budú navzájom rôzne? (360/1296)
e) Aká je pravdepodobnosť, že všetky štyri čísla budú párne? (3^4 / 6^4)
f) Aká je pravdepodobnosť, že aspoň dve čísla budú párne? (11 * 3^4 / 6^4)
g) Aká je pravdepodobnosť, že súčet „padnutých“ čísel bude práve 10? (80/6^4)
h) Aká je pravdepodobnosť, že súčet „padnutých“ čísel bude aspoň 10? (1170/1296)

1. V medzinárodnej študijnej skupine sa nachádza 5 odborníkov z ČR, 3 zo SR, 6 z Ukrajiny, 5 z Rumunska, 2 z Maďarska a 3 z Rakúska.
a) Náhodne vyberieme 6 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že budú zastúpené všetky spomenuté krajiny? (2700/C(24,6) = 0.02)
b)* Náhodne vyberieme 8 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že budú zastúpené všetky spomenuté krajiny? (108675/735471 = 0.1478)
c)* Náhodne vyberieme 8 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že tam budú zastúpené ČR, SR a Ukrajina? (631116/735471 = 0.85811)
d) Náhodne vyberieme 6 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere nebudú zastúpené ČR a SR? (8008/134596)
e) Náhodne vyberieme 6 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere budú aspoň dvaja z Rumunska? (49324/134596)

2. V nepriehľadnom vreci je 25 žetónov očíslovaných postupne od 1 do 25.
– Náhodne vyberieme 7 žetónov. Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere sa bude/ú nachádzať
a) číslo 1 ? b) čísla 1 aj 2? c) číslo 1 alebo 2 d)* aspoň 2 čísla obsahujúce cifru 1?
e)* Náhodne vyberieme 3 kocky. Aká je pravdepodobnosť, že súčet ich čísel bude najviac 30?
(0.0926)

3. Zo sady 32 kariet náhodne vyberieme
a) jednu kartu. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme eso alebo zeleň? (11/32)
b) dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že obidve budú eso alebo zeleň? (55/496)
c) dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jedna z nich bude eso alebo zeleň? (1-210/496)

4. Hádžem kockou n-krát. Ako mám zvoliť n, aby pravdepodobnosť, že padne aspoň raz šestka, bola aspoň 50% (75%, 90%, 99%) ? (4, 8, 13, 26)

5. V skupine sú šiesti útočníci. Prvý strelí do brány s pravdepodobnosťou 49%, ďalší so 75%, 41%, 20%, 34%, 63%. Každý raz vystrelí. Vypočítajte pravdepodobnosť, že počas tejto zábavy padne aspoň 1 gól / aspoň dva góly. (0.985304044 / 0.880616611)

6. Vo firme pracuje 40 zamestnancov. Aká je pravdepodobnosť, že práve / aspoň dvaja z nich majú narodeniny v rovnaký deň? (29.2. nemá narodeniny nikto)
(0.0003364 ; 0.89123)

Všeobecne: https://en.m.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem