Riešenie sústav rovníc.

V tomto dokumente z priestorových dôvodov budeme uvádzať len niektoré vybrané výpisy zistených hodnôt.

1. Začnime štandardnou situáciou.

```
>> A=rand(7,7)*10
>> b=rand(7,1)*10
```

Riešenie sústavy Ax = b získame jednoducho cez „delenie“ maticou zľava alebo použitím inverznej matice:

```
>> x1=A\b,  x2=inv(A)*b
```

Overme si, či ide o klasické riešenie:

>> A*x1-b	>> A*x2-b
ans = 1.0e-014 * -0.1332 -0.1776 0 0.0444 0.3553 0.4441 0	ans = 1.0e-014 * 0.3997 -0.2220 0.6217 0.1776 0.0888 0.0444 -0.1776

Výsledky vychádzajú na prvý pohľad rôzne. Ale ide o tak malé čísla, že ich môžeme považovať za „prakticky“ nulové vektory.

2. Vezmime si teraz situáciu, keď matica sústavy bude **preurčená**. Rovníc bude viac než neznámych.

```
>> Ae=A(:,1:6)
```

Riešenie budeme hľadať tak, ako v prvom prípade. Miesto inverzie, o ktorej má zmysel sa baviť iba pri štvorcových maticiach, musíme použiť pseudoinverziu. Výsledky oboch spôsobov riešenia budú rovnaké:

```
>> x1=Ae\b, x2=pinv(Ae)*b

>> norm(x1-x2)

ans =  1.4670e-015
```

```
>> Ae*x1-b, Ae*x2-b
                                        ans =
                                              -0.0053
                                               0.1182
                                              -0.1934
                                               0.3386
                                               0.3229
                                              -0.3309
                                              -0.2303
```

Ako vidíme, toto nie je nulový vektor. Riešenie je tzv. **zovšeobecnené**. Mal by to byť ten zo všetkých vektorov, ktorý dá najmenší reziduálny vektor v norme:

```
>> norm(Ae*x1-b)

ans =    0.6579
```

Skúsme iné blízke vektory:

```
>> norm(Ae*(x1+0.0001)-b),  norm(Ae*(x1-0.0001)-b)

ans =    0.6580
ans =    0.6580
```

Hodnota reziduálneho vektora v norme je väčšia...

---

3. Riešme teraz sústavu, ktorá bude mať nekonečne veľa riešení – bude to sústava 4 rovníc so 7 neznámymi:

```
>> Ao=A(1:4,:); bo=b(1:4);
```

Najprv musíme určiť bázu nulového priestoru:

```
>> N=null(Ao)

      N =

        -0.3977   -0.1126   -0.4338
        -0.6794   -0.1934    0.1499
         0.3951   -0.1158   -0.3992
         0.4214   -0.4966   -0.1112
         0.1307    0.3674    0.1924
         0.0734    0.7304   -0.1120
         0.1553   -0.1463    0.7537
```

Sú to tri vektory; pri bežnom riešení Gaussovou eliminačnou metódou by sme dostali výsledok s 3 parametrami.

Ďalej hľadáme partikulárne riešenie:

```
>> xp=Ao\bo
                xp =
                         0.2260
                              0
                         0.5903
                        -0.0072
                        -0.4651
                              0
                              0
>> norm(Ao*xp-bo)
                   ans =  1.1102e-015
```

Je dôležité si uvedomiť, že odpoveďou je JEDNO z množiny nekonečne veľa riešení. Inou cestou by sme dostali iné partikulárne riešenie:

```
>> xp=pinv(Ao)*b
                   xp =
                          0.0450
                          0.0669
                          0.3601
                         -0.2174
                         -0.2983
                          0.1376
                          0.2678
>> norm(Ao*xp-b)
                   ans =  1.7902e-015
```

Správnou a úplnou odpoveďou na otázku o riešení danej sústavy rovníc je formulácia, ktorá zahrnie VŠETKY, tj. nekonečne veľa riešení. Je to tzv. <u>všeobecné</u> riešenie:

```
x = xp + a1*N(1)+a2*N(2)+a3*N(3) = xp + N*[a1 a2 a3]'
```

Ľubovoľné partikulárne riešenie získame dosadením trojice reálnych čísel za a1 a2 a3. Napr.

```
        >> xine = xp + N*[7 -31 24]'
xine =
        -9.6601
         4.9038
        -2.8634
        15.4569
        -6.1555
       -24.6795
        23.9774

>> norm(Ao*xine-b)
ans =  4.2256e-014
```

4. Venujme sa ďalej takejto situácii:

```
>> Ah=[Ao; 0.5*Ao(1,:)+0.5*Ao(3,:); 0.5*Ao(2,:)+0.5*Ao(4,:)];
>> bh=b(1:6);

>> rank(Ah), rank([Ah,bh])

ans =     4
ans =     5
```

Hodnosť základnej a rozšírenej matice sústavy nie je tá istá. Treba preto hľadať zovšeobecnené riešenie, pričom vzhľadom na fakt, že rovníc je 6 (z toho nezávislých iba 4) a premenných 7, týchto riešení bude nekonečne veľa.

```
>> Nh=null(Ah)
                    Nh =
                       0.0595   -0.2437   -0.5441
                       0.6359   -0.0125   -0.3419
                      -0.5541    0.0534   -0.1379
                      -0.3978    0.5049   -0.1531
                       0.0062   -0.1682    0.4010
                      -0.1349   -0.6236    0.3800
                       0.3295    0.5153    0.4893

>> xph=pinv(Ah)*bh
                              xph =
                                 0.3824
                                 0.0144
                                -0.2476
                                 0.4558
                                 0.2114
                                 0.2545
                                 0.1372
```

Všimnime si najprv fakt, že nulový priestor s bázou N z predošlej úlohy nie je v podstate iný ako ten, ktorého bázu Nh sme našli teraz:

```
>> rank([N,Nh])
                              ans =     3
```

Všeobecné zovšeobecnené riešenie bude vyzerať podobne ako v predošlom príklade:

```
x = xph + a1*Nh(1)+a2*Nh(2)+a3*Nh(3) = xph + Nh*[a1 a2 a3]'
```

Skúsme počítať:

```
>> norm(Ah*xph-bh)
                                        ans =    2.0085
>> norm(Ah*(xph+Nh*[8 -7 1]')-bh)
                                        ans =    2.0085
>> norm(Ah*(xph+Nh*[-8 17 -10]')-bh)
                                        ans =    2.0085
```

Stále rovnaké číslo… čo to znamená??? A čo znamená nasledujúca vyššia hodnota?

```
>> norm(Ah*(xph+0.001)-bh)
                                        ans =    2.0102
```

Úlohu sme riešili pomocou príkazu pinv. Ak by sme použili backslash, stane toto:

```
>> xphh=Ah\bh

Warning: Rank deficient, rank = 4  tol =   2.5340e-014.

xphh =
          0.0003
               0
          0.0865
          0.0778
         -0.0337
               0
               0
```

Takýto typ hlásenia ukazuje nestabilnosť a teda nevhodnosť zvoleného postupu v danom prípade.
