Logické systémy

doc. RNDr. Jana Galanová, PhD.

RNDr. Peter Kaprálik, PhD.

Mgr. Marcel Polakovič, PhD.

Predslov

Publikácia je určená poslucháčom I. ročníka FEI STU Bratislava. Jej cieľom je oboznámiť študentov so základmi matematických disciplín vhodných na popis a skúmanie booleovských funkcií a následne logických systémov.

K pochopeniu preberanej problematiky sú z matematiky postačujúce vedomosti získané na strednej škole, ale nevyhnutná je chuť a snaha čitateľa porozumieť uvádzanej látke.

Autori

KAPITOLA 1

Úvodné pojmy

V tejto časti uvádzame základné pojmy, prevažne z diskrétnej matematiky, ktoré sú potrebné pre štúdium logických systémov. V prvom rade sa dohodnime na tomto označení číselných množín:

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$,
$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$,
$\mathbf{Z}$ – množina všetkých celých čísel,
$\mathbf{R}$ – množina všetkých reálnych čísel,
$\mathbf{R}^+$ – množina všetkých kladných reálnych čísel.

1. Zobrazenia a operácie

Definícia 1.1. Nech A, B sú množiny. Pravidlo (predpis) f, ktoré každému prvku $x \in A$ priradí jeden prvok $y \in B$, sa nazýva ***zobrazenie množiny*** A ***do množiny*** B a označuje sa $f : A \to B$. Prvok y priradený prvku x nazývame ***obrazom prvku*** x a píšeme $y = f(x)$ (tiež $x \mapsto y$). Prvok x nazývame ***vzorom prvku*** y. Množina A sa nazýva ***obor*** (tiež ***definičný obor***) a množina B ***koobor zobrazenia*** f.

Príklad 1.1. Nech $A = \{a, b, c\}, B = \{0, 1\}$. Potom $f : A \to B; a \mapsto 1, b \mapsto 0, c \mapsto 1$ je zobrazenie množiny A do množiny B, lebo každý prvok množiny A má len jeden obraz. ■

Definícia 1.2. Zobrazenie $f : A \to B$ sa nazýva

injektívne (tiež ***prosté***), ak pre každé $x_1, x_2 \in A$, platí: ak $x_1 \neq x_2$, potom $f(x_1) \neq f(x_2)$;
surjektívne, ak každý prvok $y \in B$ má vzor (t.j. ku každému $y \in B$ existuje také $x \in A$, že $y = f(x)$);
bijektívne, ak je injektívne aj surjektívne.

Príklad 1.2. Zobrazenie f z predchádzajúceho príkladu nie je injektívne, lebo $a \neq c$, ale $f(a) = 1 = f(c)$. Je však surjektívne, lebo každý prvok množiny B má vzor, konkrétne vzorom prvku 0 je b a vzorom prvku 1 je a. ■

Definícia 1.3. ***Karteziánskym súčinom množín*** $M_1, M_2, \dots, M_n$ nazývame množinu

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n\}.$$

V prípade, že $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M$, namiesto $M \times M \times \cdots \times M$ píšeme M^n.
Prvok $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa nazýva ***usporiadaná*** n***-tica***.
Usporiadané n-tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sú rovnaké práve vtedy, keď $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

Príklad 1.3. Karteziánskym súčinom množín $A = \{a, b, c\}, B = \{0, 1\}$ je množina $A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$. ■

Definícia 1.4. Nech A je množina, n je prirodzené číslo. Každé zobrazenie $h : A^n \to A$ nazývame ***n*-árnou operáciou na množine** A. Špeciálne pre $n = 1$ sa operácia h nazýva ***unárna*** a pre $n = 2$ ***binárna***.

Príklad 1.4. Funkcia $f(x, y) = x + y$ je binárna operácia na množine $\mathbf{R}$, pretože je definovaná pre každé $x, y \in \mathbf{R}$ a tiež $f(x, y) \in \mathbf{R}$.

Funkcia $g(x, y) = x \cdot y$ je tiež binárnou operáciou na $\mathbf{R}$, pretože jej definičný obor je $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a pre každé $x, y \in \mathbf{R}$ platí $g(x, y) \in \mathbf{R}$.

Funkcia $h(x, y) = x - y$ nie je binárna operácia na $\mathbf{R}^+$, pretože rozdiel každých dvoch kladných reálnych čísel nemusí byť kladné reálne číslo, napr. $2 - 3 = -1 \notin \mathbf{R}^+$, pričom $2, 3 \in \mathbf{R}^+$.

Funkcia $k(x) = x+3$ je unárna operácia na $\mathbf{R}$, pretože pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí $x+3 \in \mathbf{R}$. ■

Poznámka 1.1. Nech $\square : A^2 \to A$ je binárna operácia na množine A. Potom obraz dvojice $(a, b) \in A^2$ namiesto $\square(a, b)$ často označujeme symbolom $a \square b$.

Definícia 1.5. Binárna operácia $\square : A^2 \to A$ sa nazýva
komutatívna, ak pre každé $a, b \in A$ platí $a \square b = b \square a$,
asociatívna, ak pre každé $a, b, c \in A$ platí $(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$.
Prvok $e \in A$ sa nazýva ***neutrálny prvok*** binárnej operácie $\square$ na množine A, ak pre všetky $x \in A$ platí $x \square e = e \square x = x$.

Poznámka 1.2. Binárnu operáciu, ktorú označujeme $\cdot$, obvykle nazývame ***súčin*** a jej neutrálny prvok (pokiaľ existuje) nazývame ***jednotkový prvok***.
Binárnu operáciu, ktorú označujeme $+$, obvykle nazývame ***súčet*** a jej neutrálny prvok (pokiaľ existuje) nazývame ***nulový prvok***.

Príklad 1.5. Binárna operácia $\circ : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, x \circ y = x^3y^3$ je komutatívna, lebo pre všetky $x, y \in \mathbf{R}$

$$x \circ y = x^3y^3 = y^3x^3 = y \circ x,$$

ale nie je asociatívna, lebo napr. pre $x = \sqrt[3]{2}, y = 1, z = \sqrt[9]{2}$

$$(x \circ y) \circ z = (\sqrt[3]{2} \circ 1) \circ \sqrt[9]{2} = (2 \cdot 1) \circ \sqrt[9]{2} = 8\sqrt[3]{2}$$

$$x \circ (y \circ z) = \sqrt[3]{2} \circ (1 \circ \sqrt[9]{2}) = \sqrt[3]{2} \circ (1 \cdot \sqrt[3]{2}) = 2 \cdot 2 = 4$$

Pre neutrálny prvok $e \in \mathbf{R}$ by malo platiť $x \circ e = x$, teda $x^3e^3 = x$ a po úprave (za predpokladu, že $x \neq 0$) $e = \sqrt[3]{x^{-2}}$. Prvok e musí byť pre všetky x rovnaký, čo v našom prípade nenastáva. To znamená, že táto operácia nemá neutrálny prvok. ■

Definícia 1.6. Nech $\square, \triangle$ sú binárne operácie na množine A. Hovoríme, že ***binárna operácia*** $\square$ ***je distributívna vzhľadom k binárnej operácii*** $\triangle$, ak pre všetky $x, y, z \in A$

$$x \square (y \triangle z) = (x \square y) \triangle (x \square z),$$
$$(y \triangle z) \square x = (y \square x) \triangle (z \square x).$$

Príklad 1.6. Na množine $\mathbf{N}^+$ uvažujme binárne operácie:
$+ : (\mathbf{N}^+)^2 \to \mathbf{N}^+$ – štandardné sčitovanie,
$\square : (\mathbf{N}^+)^2 \to \mathbf{N}^+, x \square y = x$,

$\triangle : (\mathbf{N}^+)^2 \to \mathbf{N}^+, x \triangle y = y.$
Binárna operácia $\square$ je distributívna vzhľadom k operácii $\triangle$, lebo pre všetky $x, y, z \in \mathbf{N}^+$

$$\begin{aligned} x \square (y \triangle z) &= x \square z = x, \\ (x \square y) \triangle (x \square z) &= x \triangle x = x = x \square (y \triangle z), \\ (y \triangle z) \square x &= z \square x = z, \\ (y \square x) \triangle (z \square x) &= y \triangle z = z = (y \triangle z) \square x. \end{aligned}$$

Analogicky sa dá ukázať, že operácia $\triangle$ je distributívna vzhľadom k operácii $\square$. Naproti tomu operácie $\square$, $\triangle$ nie sú distributívne vzhľadom k operácii $+$, čo vyplýva z faktu

$$\begin{aligned} 1 \square (2+3) &= 1 \square 5 = 1, \\ (1 \square 2) + (1 \square 3) &= 1 + 1 = 2 \neq 1 \square (2+3), \\ (2+3) \triangle 1 &= 5 \triangle 1 = 1 \\ (2 \triangle 1) + (3 \triangle 1) &= 1 + 1 = 2 \neq (2+3) \triangle 1. \end{aligned}$$

■

2. Jazyk nad abecedou

Jedným z prostriedkov výmeny informácií medzi ľuďmi je ľudská reč. Jej významové jednotky sú vety. Vety sa skladajú zo slov a slová z písmen. V tejto časti zovšeobecníme tieto pojmy z prirodzených jazykov.

Definícia 1.7. Neprázdnu množinu X nazývame ***abecedou***. Prvky množiny X nazývame ***písmenami*** (abecedy X). Konečnú postupnosť písmen abecedy X nazývame ***slovom*** nad X. Počet písmen v slove w nad abecedou X nazývame ***dĺžkou slova*** w a označujeme ju $|w|$. Množinu všetkých slov nad abecedou X označujeme X^+.
Nech $\nabla \notin X^+$. Symbol ∇ nazývame ***prázdnym slovom*** nad X a priraďujeme mu dĺžku nula. Množinu všetkých slov nad abecedou X spolu s prázdnym slovom označujeme X^*.

Príklad 1.7. Nech $X = \{a, b, c, d, e\}$. X je abeceda, jej písmenami sú a, b, c, d, e. Slovami sú napr. $aa, baba, cda, e, dedaeccb$. Slovo aa má dĺžku 2, slovo $baba$ má dĺžku 4 ($|baba| = 4$), $|cda| = 3$, $|e| = 1$, $|dedaeccb| = 8$. ■

Príklad 1.8. Nech $X = \{0, 1\}$. Napíšeme postupne všetky slová nad X dĺžok 1, 2, 3.

Riešenie.
Dĺžku 1 majú dve slová: 0, 1.
Dĺžku 2 majú štyri slová: 00, 01, 10, 11.
Dĺžku 3 má osem slov: 000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, 111. ■

Poznamenajme, že všetkých slov s dĺžkou n nad dvojprvkovou abecedou je 2^n.

Definícia 1.8. Binárnu operáciu $\bullet$ na množine X^* definovanú:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_n \bullet y_1 y_2 \dots y_m &= x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m \\ x_1 x_2 \dots x_n \bullet \nabla &= \nabla \bullet x_1 x_2 \dots x_n = x_1 x_2 \dots x_n \\ \nabla \bullet \nabla &= \nabla \end{aligned}$$

kde $x_1 x_2 \dots x_n \in X^+, y_1 y_2 \dots y_m \in X^+$ a ∇ je prázdne slovo, nazývame ***zreťazením slov*** z X^*. Množinu X^+ spolu s binárnou operáciou $\bullet$ zreťazenia nazývame ***voľná pologrupa nad množinou*** X (množina X^* spolu s operáciou zreťazenia slov sa nazýva ***voľná pologrupa s jednotkou*** alebo tiež ***monoid***). Každú podmnožinu množiny X^* nazývame ***jazykom*** nad abecedou X.

Poznamenajme, že tak ako pri násobení reálnych čísel namiesto $x.y$ píšeme xy, tak aj pre binárnu operáciu $\bullet$ namiesto $x \bullet y$ píšeme xy. Potom môžeme definíciu zreťazenia slov z X^* prepísať takto:

$$\begin{aligned}(x_1x_2\ldots x_n)\,(y_1y_2\ldots y_m) &= x_1x_2\ldots x_ny_1y_2\ldots y_m\\ x_1x_2\ldots x_n\nabla &= \nabla x_1x_2\ldots x_n \;=\; x_1x_2\ldots x_n\\ \nabla\nabla &= \nabla\end{aligned}$$

Príklad 1.9. Slovo 01100 nad abecedou $X = \{0, 1\}$ je zreťazením slov 0 a 1100, tiež zreťazením slov 01 a 100, ale nie je zreťazením slov 000 a 11. ■

Príklad 1.10. Ak $X = \{0, 1\}$, tak zreťazením slov $1101, \nabla$ je slovo $1101\nabla = 1101$. Slovo 1101 je zreťazením slov $11, 01$, ako aj zreťazením slov $1, \nabla, 101$, pretože $(1\nabla)\,101 = 1101$. ■

Veta 1.1. Pre binárnu operáciu zreťazenia slov na množine X^* platí asociatívny zákon

$$(xy)\,z = x\,(yz)\,.$$

Dôkaz. Ak $x, y, z \in X^*$, tak podľa definície zreťazenia pre slová xy, z, x, yz platí $(xy)\,z = xyz$, $x\,(yz) = xyz$, teda $(xy)\,z = x\,(yz)$. □

Tak, ako je obvyklé v prípade platnosti asociatívneho zákona, budeme označovať $xyz = (xy)\,z = x\,(yz)$.

Príklad 1.11. Nech $X = \{0, 1, 2\}$. Potom zreťazením slov $01, 210, \nabla, 22$ je slovo $01\,(210\,(\nabla 22)) = 01\,(21022) = 0121022$. Slovo 120021 je zreťazením slov $12,\ 00,\ \nabla,\ 21$, ale aj zreťazením slov $12\nabla,\ \nabla\nabla,\ 0021$. ■

3. Výroková logika

3.1. Výroky.

Mnohé vety, ktoré používame v prirodzených jazykoch (slovenčina, angličtina, atď.) alebo v jazykoch vedných odborov sú pravdivé, mnohé sú nepravdivé (i keď o ich pravdivosti či nepravdivosti nemusíme vedieť práve rozhodnúť) a sú vety, o pravdivosti ktorých nemá zmysel vôbec uvažovať (napr. „Neotravujte ma s matematikou!“). V tejto časti sa budeme zaoberať vetami, o pravdivosti ktorých má zmysel uvažovať.

Definícia 1.9. Vety, ktoré sú pravdivé a vety, ktoré sú nepravdivé, majú ***pravdivostnú hodnotu***. Vety, ktoré majú pravdivostnú hodnotu a tá sa nemení, sa nazývajú ***výroky***. Pravdivostná hodnota pravdivého výroku je 1, pravdivostná hodnota nepravdivého výroku je 0.

Na označenie pravdivostnej hodnoty výroku A budeme používať symbol $\mathrm{ph}(A)$.

Príklad 1.12. V teórii prirodzených čísel je veta „Súčet čísla dva a čísla tri je číslo päť.“ pravdivým výrokom. „Tri je párne číslo.“ je nepravdivý výrok. „Číslo x je nepárne číslo.“ nie je výrok, lebo táto veta nie je ani pravdivá, ani nepravdivá. Pravdivou alebo nepravdivou sa stane až po dosadení konkrétneho čísla za x a to už bude iná veta. Veta „Číslo tri je nepárne číslo.“ je pravdivý výrok. ■

Výroky môžeme spájať pomocou špeciálnych slovných spojení a vytvárať tak zložitejšie výroky, hovoríme im ***zložené výroky***.

Definícia 1.10. Ak A, B sú výroky, tak
negáciou výroku A nazývame výrok „Nie je pravda, že A“ a označujeme ho $\overline{A}$ alebo $\neg A$,
konjunkciou výrokov A, B nazývame výrok „A a B“ a označujeme ho $A \wedge B$,
disjunkciou výrokov A, B nazývame výrok „A alebo B“ a označujeme ho $A \vee B$,
implikáciou výrokov A, B nazývame výrok „Ak A, potom B“ a označujeme ho $A \Rightarrow B$,
ekvivalenciou výrokov A, B nazývame výrok „A vtedy a len vtedy, keď B“ a označujeme ho $A \Leftrightarrow B$.

Okrem uvedených slovných spojení sa pri vytváraní zložených výrokov používajú aj iné. Napríklad, ak A je výrok „Číslo 2 je väčšie ako 3.“, tak jeho negáciu $\overline{A}$ môžeme vyjadriť: „Nie je pravda, že číslo 2 je väčšie ako 3.“ alebo „Číslo 2 nie je väčšie ako 3.“ alebo „Číslo 2 je menšie alebo sa rovná číslu 3.“ Tieto tri výroky samozrejme považujeme za rovnaké.
Konjunkciu dvoch výrokov A, B môžeme vyjadriť aj „A a súčasne B.“, ich implikáciu zas „Ak A, B.“ alebo „Ak A, tak B.“.

Aký je súvis medzi pravdivostnými hodnotami výrokov A, B a pravdivostnými hodnotami výrokov $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$? Pri ich určovaní sa vychádzalo zo zaužívaných spôsobov hodnotenia myslenia. Napríklad, ak výrok A je pravdivý, tak na otázku „Je pravdivý výrok A alebo B?“ odpovieme „Áno, je pravdivý.“. Teda $\mathrm{ph}(A \vee B) = 1$, keď $\mathrm{ph}(A) = 1$. Pravdivostné hodnoty negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie a ekvivalencie uvádzame v tab. 1.

Tabuľka 1. Pravdivostné hodnoty zložených výrokov

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definícia 1.11. Tieto tabuľky sa nazývajú ***pravdivostné tabuľky*** postupne negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie.

Znaky negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie, t.j. znaky $^{-}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ a im zodpovedajúce slovné spojenia nazývame ***logické spojky*** alebo ***funktory***.

Výroky A, B sa nazývajú ***ekvivalentné***, ak $ph(A \Leftrightarrow B) = 1$.

Uvažujme teraz o výroku „Ak zajtra bude u nás pekne, tak pôjdeme k jazeru alebo pôjdeme do hory.“ Skladá sa z výrokov „Zajtra bude u nás pekne.“, „Zajtra pôjdeme k jazeru alebo pôjdeme do hory.“. Keby sme prvý výrok označili A, druhý B, tak pôvodný výrok je $A \Rightarrow B$. Ale druhý výrok sa zasa skladá s dvoch výrokov, a to „Zajtra pôjdeme k jazeru.“ a „Zajtra pôjdeme do hory.“. Keď ich označíme postupne C, D, tak pôvodný výrok môžeme zapísať v tvare $A \Rightarrow (C \vee D)$. Výroky A, C, D sa už ďalej nedajú rozkladať na jednoduchšie výroky.

Definícia 1.12. Výroky, ktoré sa nedajú rozložiť na jednoduchšie výroky, alebo výroky ktoré vždy vystupujú ako celok, sa nazývajú ***atomické*** (alebo ***atomárne***).

Príklad 1.13. „Číslo 12 delí číslo 24 a číslo 4 číslo 12, a preto číslo 4 delí číslo 24“ je výrok v teórii prirodzených čísel. Skladá sa z atomických výrokov „Číslo 12 delí číslo

24“, „Číslo 4 delí číslo 12“, „Číslo 4 delí číslo 24“. Ak by sme si označili tieto atomické výroky postupne A, B, C, môžeme pôvodný výrok zapísať $(A \wedge B) \Rightarrow C$. ■

3.2. Kvantifikované výroky.

Už sme spomenuli, že veta (výraz) „Číslo x je nepárne číslo.“ nie je výrok. Ale ak za x dosadíme konkrétne celé číslo, dostaneme výrok.
Výraz, ktorý obsahuje jednu alebo viac premenných, z ktorého po dosadení prípustných hodnôt za premenné vznikne výrok, sa nazýva ***výroková forma***. Ak $A(x_1, \ldots, x_k)$ je výroková forma k premenných $x_1, \ldots, x_k$, tak množina k-tic prípustných hodnôt sa nazýva ***definičný obor výrokovej formy*** $A(x_1, \ldots, x_k)$. Množina všetkých $(q_1, \ldots, q_k)$ z definičného oboru D výrokovej formy $A(x_1, \ldots, x_k)$, pre ktoré je výrok $A(q_1, \ldots, q_k)$ pravdivý, sa nazýva ***obor pravdivosti výrokovej formy*** $A(x_1, \ldots, x_k)$ a označuje sa $\{(x_1, \ldots, x_k) \in D; A(x_1, \ldots, x_k)\}$.

Príklad 1.14. $x^2 + y^2 \leq 0$ je výroková forma dvoch premenných x, y. Jej definičný obor je $\mathbf{R}^2$. Do oboru pravdivosti patrí len dvojica $(0, 0)$, teda
$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 0\} = \{(0, 0)\}$. ■

Výrokové formy môžeme spájať pomocou logických spojok, a tak vytvárať nové výrokové formy.

Príklad 1.15. Negáciou výrokovej formy $x \geq 2$ s definičným oborom $\mathbf{R}$ je výroková forma $x < 2$ s rovnakým definičným oborom.
Konjunkciou výrokových foriem $x^2 - x - 6 = 0$, $x > 0$ je výroková forma
$x^2 - x - 6 = 0 \wedge x > 0$. ■

Z výrokovej formy sa dá vytvoriť výrok aj iným spôsobom ako je dosadenie hodnôt za premenné. Môžeme vytvoriť výrok, v ktorom sa hovorí o počte prvkov, ktoré keď dosadíme za premenné do výrokovej formy, dostaneme pravdivý výrok. Takéto výroky nazývame ***kvantifikované výroky***. Nech $A(x)$ je výroková forma jednej premennej x s definičným oborom D. Potom môžeme vytvoriť takéto kvantifikované výroky:

Existuje (existuje aspoň jedno) x, že $A(x)$.
Existujú aspoň štyri x, že $A(x)$.
Existuje najviac päť x, že $A(x)$.
Existujú práve tri x, že $A(x)$.
Pre všetky x (platí) $A(x)$.

Výrazy vytlačené polotučnou kurzívou sa nazývajú ***kvantifikátory***. V matematike sa najčastejšie používajú prvý a posledný. Ten prvý sa nazýva ***existenčný*** (alebo ***malý***) ***kvantifikátor*** a posledný ***všeobecný*** (alebo ***veľký***) ***kvantifikátor***.

Existenčný kvantifikátor sa označuje symbolom $\exists$ (otočené písmeno E). Kvantifikovaný výrok

„Existuje x, že $A(x)$.“

môžeme stručne zapísať

$$\exists x \in D\ A(x) \qquad \text{alebo} \qquad \exists_{x \in D}\ A(x)$$

Ak je známy obor premennej x, môžeme použiť aj zápis

$$\exists x\ A(x) \qquad \text{alebo} \qquad \exists_{x}\ A(x).$$

Všeobecný kvantifikátor sa označuje symbolom $\forall$ (otočené písmeno A). Kvantifikovaný výrok

„Pre všetky x $A(x)$.“

stručne zapisujeme

$$\forall x \in D\ A(x) \qquad \text{alebo} \qquad \underset{x\in D}{\forall} A(x)$$

alebo, ak je známy obor premennej x,

$$\forall x\ A(x) \qquad \text{alebo} \qquad \underset{x}{\forall} A(x).$$

Príklad 1.16. Rozhodnite o pravdivosti výrokov

(1) $\exists n \in \mathbf{Z}\ n^2 = 9$,
(2) $\forall n \in \mathbf{Z}\ n^2 = 9$,
(3) $\exists n \in \mathbf{Z}\ n^2 = 2$,
(4) $\forall n \in \mathbf{Z}\ n^2 = 2$.

Riešenie. Prvý výrok je pravdivý, lebo pre $n = -3$ je $(-3)^2 = 9$.

Druhý výrok je nepravdivý, lebo rovnosť $n^2 = 9$ neplatí pre každé celé číslo n, napr. pre $n = 0$ je $n^2 = 0^2 = 0 \neq 9$.

Tretí aj štvrtý výrok sú nepravdivé, lebo len pre dve reálne čísla platí, že ich druhá mocnina je 2. Sú to čísla $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$, no ani jedno z nich nie je celé číslo. ■

Kvantifikované výroky môžeme vytvoriť aj z výrokových foriem dvoch, troch a viac premenných. Napr. výraz

$$\exists x \in \mathbf{Z}\ \forall y \in \mathbf{R}\ x + y^2 \leq -4$$

je výrok, ktorý čítame:

„Existuje celé číslo x tak, že pre všetky reálne čísla y je $x + y^2 \leq -4$.“

Výrok

$$\forall y \in \mathbf{R}\, \exists x \in \mathbf{Z}\, \forall z \in \mathbf{R}\ x + y^2 - z \leq -4$$

čítame

„Pre každé reálne číslo y existuje celé číslo x tak, že pre všetky reálne čísla z je $x + y^2 - z \leq -4$.“

Nech $A(x, y)$ je výroková forma definovaná pre $x \in D, y \in E$. Výraz $\forall x \in D\ A(x, y)$ resp. $\exists x \in D\ A(x, y)$ nie je výrok. Ak však za premennú y dosadíme konkrétny prvok množiny E, dostaneme výrok. Uvedené výrazy sú teda výrokové formy premennej y.

Príklad 1.17. Rozhodnite o pravdivosti výrokov

(1) $\forall x \in \mathbf{R}\, \exists y \in \mathbf{R}\ x - y = 1$,
(2) $\exists y \in \mathbf{R}\, \forall x \in \mathbf{R}\ x - y = 1$.

Riešenie.

(1) Nech x je ľubovoľné reálne číslo. K splneniu rovnosti $x - y = 1$ stačí zvoliť $y = x - 1$. Ku každému $x \in \mathbf{R}$ sme našli (teda existuje) $y \in \mathbf{R}$ $(y = x - 1)$ tak, že platí $x - y = 1$. To znamená, že výrok je pravdivý.

(2) Malo by existovať y také, že pre všetky reálne čísla x je $x - y = 1$. Označme to číslo y_0. Pokiaľ existuje, má preň platiť $x - y_0 = 1$ pre všetky $x \in \mathbf{R}$. Lenže pre $x = y_0$ platí $x - y_0 = y_0 - y_0 = 0 \neq 1$. Znamená to, že také y_0 neexistuje, a teda výrok je nepravdivý. ■

Poznámka 1.3. Výroky z predchádzajúceho príkladu sa od seba líšia len poradím kvantifikátorov. Aby bol prvý výrok pravdivý, je potrebné, aby pre každé x existovalo y tak, že $x - y = 1$. Uvedomme si, že pre rôzne čísla x aj zodpovedajúce čísla y môžu byť rôzne. Naproti tomu, aby bol pravdivý druhý výrok, je potrebné, aby existovalo jedno

y tak, že pre všetky x je $x - y = 1$. Teda to y je pre všetky x stále to isté. Vidíme, že zmenou poradia malého a veľkého kvantifikátora dostávame odlišné výroky, ktoré nemusia byť ekvivalentné.

Poradie za sebou idúcich kvantifikátorov rovnakého typu (oba sú všeobecné alebo oba sú existenčné) môžeme meniť a výrok sa pritom nezmení. Preto aj výrazy $\forall x \in D\, \forall y \in D$ resp. $\exists x \in D\, \exists y \in D$ skracujeme na $\forall x, y \in D$ resp. $\exists x, y \in D$.

Venujme sa teraz tomu, ako tvoriť negácie kvantifikovaných výrokov. Nech $A(x)$ je výroková forma definovaná na množine D. Negáciou výroku $\exists x \in D\ A(x)$ je výrok „Nie je pravda, že existuje $x \in D$, pre ktoré platí $A(x)$." To je to isté ako „Neexistuje $x \in D$, pre ktoré platí $A(x)$." a tiež ako „Pre všetky $x \in D$ platí negácia $A(x)$,", čo môžeme zapísať takto: $\forall x \in D\ \overline{A(x)}$. Podobnými úvahami by sme utvorili aj negácie ďalších typov kvantifikovaných výrokov. Uvádzame ich v tabuľke 2. Číslo k je tu jedno konkrétne ale ináč ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako 1.

Tabuľka 2. Negácie kvantifikovaných výrokov

Výrok	Negácia výroku
$\exists x \in D\ A(x)$	$\forall x \in D\ \overline{A(x)}$
Existuje aspoň k prvkov x, že $A(x)$.	Existuje najviac $k-1$ prvkov x, že $A(x)$.
Existuje najviac k prvkov x, že $A(x)$.	Existuje aspoň $k+1$ prvkov x, že $A(x)$.
Existuje práve k prvkov x, že $A(x)$.	Existuje najviac $k-1$ alebo aspoň $k+1$ prvkov x, že $A(x)$.
$\forall x \in D\ A(x)$	$\exists x \in D\ \overline{A(x)}$

Negáciu výroku, ktorý obsahuje niekoľko malých a veľkých kvantifikátorov získame tak, že každý malý kvantifikátor zmeníme na veľký, veľký kvantifikátor zmeníme na malý a výrokovú formu negujeme.

Príklad 1.18. Napíšte negácie výrokov

(1) $\exists y \in \mathbf{R}\, \forall x \in \mathbf{R}\ xy \leq y$,
(2) $\forall x \in \mathbf{N}^+\, \exists y \in \mathbf{N}^+\, \exists z \in \mathbf{N}^+\ x^2 + y^2 = z^2$.

Riešenie.

(1) $\forall y \in \mathbf{R}\, \exists x \in \mathbf{R}\ xy > y$,
(2) $\exists x \in \mathbf{N}^+\, \forall y \in \mathbf{N}^+\, \forall z \in \mathbf{N}^+\ x^2 + y^2 \neq z^2$.

■

3.3. Výrokové formuly.

Výroková logika pri skúmaní pravdivostných hodnôt zložených výrokov si nevšíma obsah jednotlivých atomických výrokov ale ich pravdivostnú hodnotu a tiež tvar (štruktúru) zloženého výroku. Preto je vhodné zaviesť ***výrokové premenné*** – premenné, za ktoré je možné dosadzovať výroky – a pomocou nich, logických spojok a zátvoriek vytvárať výrazy, ktoré majú vlastnosť, že keď do nich za výrokové premenné dosadíme výroky, vzniknú z týchto výrazov výroky. Ako výrokové premenné budeme používať písmená p, q, r, s, t, poprípade tieto písmena s indexami napr. p_1, p_2, q_4. Výrazy, o ktorých sme teraz hovorili, nazývame výrokové formuly. Ich presná definícia je takáto:

Definícia 1.13. ***Formula výrokového počtu*** (skrátene ***výroková formula*** alebo ***formula***) je každé slovo nad abecedou $\{^{-}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\ (,), p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, \ldots\}$, ktoré vzniklo podľa pravidiel:

(1) Každá výroková premenná je formula.
(2) Ak a, b sú formuly, tak

$$\overline{a}, (a \wedge b), (a \vee b), (a \Rightarrow b), (a \Leftrightarrow b)$$

sú formuly.
(3) Žiadne iné slová nie sú formuly.

Formulu $\overline{a}$ nazývame ***negáciou formuly*** a, formulu $(a \wedge b)$ nazývame ***konjunkciou formúl*** a, b, formulu $(a \vee b)$ nazývame ***disjunkciou formúl*** a, b, formulu $(a \Rightarrow b)$ nazývame ***implikáciou formúl*** a, b a formulu $(a \Leftrightarrow b)$ ***ekvivalenciou formúl*** a, b.

Príklad 1.19. p, q, r sú výrokové premenné, a teda aj formuly, preto $(p \Rightarrow q), (p \vee r)$ sú tiež formuly. Keď použijeme opakovane postup z bodu 2 definície formuly, tak dostaneme aj tieto formuly: $(p \Rightarrow (q \vee r))$, $((p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (r \Rightarrow (r \Rightarrow q)))$. ■

Keby sme v definícii formuly nepoužili zátvorky, tak by formuly z predchádzajúceho príkladu mali tvar $p \Rightarrow q,\ p \vee r$, ale už pri posledných dvoch formulách $p \Rightarrow q \vee r$, $p \wedge \overline{q} \Rightarrow r \Rightarrow r \Rightarrow q$ by sme po dosadení výrokov za výrokové premenné mohli dostať vetu, ktorá nie je po obsahovej stránke jednoznačná a teda nie je výrok. Napríklad veta „Keď Vlado hovorí, vtedy Jano mlčí alebo Ivan plače“ vznikne dosadením do $p \Rightarrow (q \vee r)$, ale tiež do $(p \Rightarrow q) \vee r$. V hovorovej reči sa obvykle používajú nepísané dohody a väčšina by túto vetu priradila k $p \Rightarrow (q \vee r)$ a nie k $(p \Rightarrow q) \vee r$. V matematike, ale aj iných odboroch, je takáto nejednoznačnosť neprípustná.

Situácia, aby veľa zátvoriek nebolo na ujmu prehľadnosti, ale pritom nevznikala nejednoznačnosť, sa rieši buď

- dohodou, že zátvorky vynechávame, keď nemôže prísť k nejednoznačnosti

alebo

- dohodou o vynechávaní zátvoriek a priorite logických spojok.

Dohoda o vonkajších zátvorkách: V samostatne stojacich formulách budeme vonkajšie zátvorky vynechávať.

Princíp priority logických spojok: Ak logické spojky usporiadame do postupnosti $^{-}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, tak každá logická spojka, stojaca vľavo od uvažovanej, viaže silnejšie. Nech p, q, r sú výrokové premenné. Logická spojka L ***viaže silnejšie*** ako logická spojka K znamená, že $p\,L\,q\,K\,r$ je formula $(p\,L\,q)\ K\,r$.

Poznamenajme, že tento princíp poznáme z reálnych čísel, kde „krát“ viaže silnejšie ako „plus“, čiže napr. $2.3 + 1$ znamená $(2.3) + 1$ a nie $2.(3 + 1)$.

Príklad 1.20.
$p \wedge q \vee \overline{r}$ znamená formulu $(p \wedge q) \vee \overline{r}$,
$p \Rightarrow q \vee r \Leftrightarrow p$ znamená formulu $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow p$,
$p \vee r \Leftrightarrow p \wedge q \vee r$ znamená formulu $(p \vee r) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee r)$. ■

Definícia 1.14. Postupnosť formúl $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sa nazýva ***vytvárajúca postupnosť formuly*** a, ak $a = a_n$ a pre každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je a_k buď výroková premenná alebo existujú $i, j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ tak, že a_k je jedna z formúl $\overline{a}_i, a_i \wedge a_j, a_i \vee a_j, a_i \Rightarrow a_j$, $a_i \Leftrightarrow a_j$.

Príklad 1.21. Vytvárajúcou postupnosťou formuly

$$a = ((p \vee \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p} \vee r}) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

je postupnosť $p,\ q,\ r,\ \overline{p},\ \overline{q},\ p \vee \overline{q},\ \overline{p} \vee r,\ \overline{\overline{p} \vee r},\ q \Rightarrow r,\ (p \vee \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p} \vee r},\ p \Rightarrow (q \Rightarrow r),$ $((p \vee \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p} \vee r}) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$. ■

Definícia 1.15. Ak formula b obsahuje výrokové premenné $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a žiadne iné, tak formulu b označíme $b\,(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ a hovoríme, že b je formula n premenných $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Definícia 1.16. Výrok, ktorý vznikne z formuly, keď za všetky jej výrokové premenné dosadíme výroky, sa nazýva ***interpretácia formuly***.

Poznámka 1.4. Ak $A_1, \ldots, A_n$ sú výroky a $b\,(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ je formula, tak dosadením výroku A_1 za premennú p_1, A_2 za p_2 až A_n za p_n dostaneme výrok $b\,(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, ktorý je interpretáciou formuly b.

Príklad 1.22. Vezmime formulu $r \wedge s \Rightarrow t$. Jej interpretácie v teórii prirodzených čísel sú napríklad:
„Keď 2 delí 12 aj 3 delí 12, tak aj 6 delí 12.“
„Ak číslo 3 je väčšie ako číslo 2 a číslo 7 je väčšie ako číslo 32, tak číslo 3 je väčšie ako číslo 32.“
„Ak 5 je menšie ako 6 a 15 je väčšie ako 13, tak 5 je menšie ako 3.“

Formula $r \wedge s \Rightarrow t$ je formulou troch premenných r, s, t, môžeme ju teda označiť napr. $a\,(r, s, t)$. ■

Výroková formula nie je výrok, nemá teda pravdivostnú hodnotu. Každej výrokovej formule $a(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ však môžeme priradiť funkciu, ktorá vyjadruje závislosť pravdivostných hodnôt interpretácií $a(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ tejto formuly od pravdivostných hodnôt výrokov A_1, A_2 až A_n dosadených za jednotlivé výrokové premenné.

Definícia 1.17. Nech $a(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ je formula n premenných. Funkcia

$$\mathrm{ph}_a : \{0,1\}^n \to \{0,1\}, \mathrm{ph}_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{ph}(a(A_1, A_2, \ldots, A_n)),$$

kde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú výroky, pre ktoré $\mathrm{ph}(A_1) = x_1$, $\mathrm{ph}(A_2) = x_2$, …, $\mathrm{ph}(A_n) = x_n$, sa nazýva ***pravdivostné ohodnotenie formuly*** a.

Všetkých usporiadaných n-tíc prvkov 0, 1 je 2^n. Označme ich $\beta_1 = (0, 0, \ldots, 0, 0)$, $\beta_2 = (0, 0, \ldots, 0, 1), \beta_3 = (0, 0, \ldots, 1, 0), \ldots, \beta_{2^n} = (1, 1, \ldots, 1)$. Potom môžeme pravdivostné ohodnotenie formuly $a(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ zapísať v tvare tabuľky (pozri tab. 3), ktorú nazývame ***pravdivostnou tabuľkou formuly*** $a(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Tabuľka 3. Pravdivostná tabuľka formuly a

$(p_1, p_2, \ldots, p_n)$	$a\,(p_1, p_2, \ldots, p_n)$
β_1	$\mathrm{ph}_a\,(\beta_1)$
β_2	$\mathrm{ph}_a\,(\beta_2)$
$\vdots$	$\vdots$
β_{2^n}	$\mathrm{ph}_a\,(\beta_{2^n})$

Príklad 1.23. Pravdivostné tabuľky formúl

$$r \wedge \overline{s} \Leftrightarrow s \vee \overline{r},\ (r \wedge s) \vee t \Rightarrow (s \Rightarrow t)$$

sú v tab. 4.

Tabuľka 4

(r, s)	$r \wedge \overline{s} \Leftrightarrow s \vee \overline{r}$
(0,0)	0
(0,1)	0
(1,0)	0
(1,1)	0

(r, s, t)	$(r \wedge s) \vee t \Rightarrow (s \Rightarrow t)$
(0,0,0)	1
(0,0,1)	1
(0,1,0)	1
(0,1,1)	1
(1,0,0)	1
(1,0,1)	1
(1,1,0)	0
(1,1,1)	1

Pri ich tvorbe je vhodné postupovať tak, že do hlavičky tabuľky zapíšeme vytvárajúcu postupnosť danej formuly (pozri tab. 5 a 6), pod premenné dáme všetky možné zoskupenia pravdivostných hodnôt a postupne po stĺpcoch vyplňujeme pravdivostné ohodnotenia jednotlivých formúl vytvárajúcej postupnosti na základe pravdivostných tabuliek zložených výrokov (tab. 1). ■

Tabuľka 5

r, s	$\overline{s}$	$r \wedge \overline{s}$	$\overline{r}$	$s \vee \overline{r}$	$(r \wedge \overline{s}) \Leftrightarrow (s \vee \overline{r})$
0,0	1	0	1	1	0
0,1	0	0	1	1	0
1,0	1	1	0	0	0
1,1	0	0	0	1	0

Tabuľka 6

r, s, t	$r \wedge s$	$(r \wedge s) \vee t$	$s \Rightarrow t$	$(r \wedge s) \vee t \Rightarrow (s \Rightarrow t)$
0,0,0	0	0	1	1
0,0,1	0	1	1	1
0,1,0	0	0	0	1
0,1,1	0	1	1	1
1,0,0	0	0	1	1
1,0,1	0	1	1	1
1,1,0	1	1	0	0
1,1,1	1	1	1	1

Definícia 1.18. Formula sa nazýva
tautológia, ak jej pravdivostným ohodnotením je konštantná funkcia s hodnotou 1;
kontradikcia, ak jej pravdivostným ohodnotením je konštantná funkcia s hodnotou 0;
splniteľná, ak nie je kontradikciou.

Príklad 1.24.
Formula $p \vee \overline{p}$ je tautológia.
Formula $p \wedge \overline{p}$ je kontradikcia.
Formula $p \Rightarrow q$ je splniteľná.
Formula $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ je tautológia.
Výsledok vidíme z tab. 7. ■

Tabuľka 7

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
0	1	1	0
1	0	1	0

$p\ q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
0 0	1	0	1
0 1	1	0	1
1 0	0	0	1
1 1	1	1	1

Tautológia $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ je základom pre správne usudzovanie. Ukazuje nám, ako z pravdivosti jedného výroku usúdiť, že je pravdivý druhý výrok. Z pravdivostnej tabuľky tejto formuly vidieť, že keď A, B sú výroky, pričom výroky $A,\ A \Rightarrow B$ sú pravdivé, potom je pravdivý aj výrok B. Na usúdenie pravdivosti výroku B nepostačuje len pravdivosť implikácie $A \Rightarrow B$. Vidieť to z prvého riadku pravdivostnej tabuľky formuly $p \Rightarrow q$. Výrok $A \Rightarrow B$ môže byť pravdivý a pritom výrok B je nepravdivý.

Definícia 1.19. Dve formuly a, b s rovnakými premennými sa nazývajú ***tautologicky ekvivalentné***, ak majú rovnaké pravdivostné ohodnotenie. Tautologicky ekvivalentné formuly označujeme $a \sim b$.

Príklad 1.25. Dokážte, že formuly $\overline{p \wedge q}$ a $\overline{p} \vee \overline{q}$ sú tautologicky ekvivalentné.

Riešenie. Napíšeme pravdivostné tabuľky (tab. 8) týchto formúl. Obidve formuly majú dve premenné, a to p, q. Tabuľkami sú definované rovnaké funkcie, teda formuly sú tautologicky ekvivalentné. ■

Tabuľka 8

$p\ q$	$\overline{p \wedge q}$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

$p\ q$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Príklad 1.26. Zistite, či platí $(p \vee q) \vee r \sim p \vee (q \vee r)$.

Riešenie. Urobíme pomocnú tabuľku (tab. 9) a z nej už bude vidieť, keď si pozrieme prvý, predposledný a posledný stĺpec, či formuly majú rovnaké pravdivostné ohodnotenie. ■

TABUĽKA 9

p, q, r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
0, 0, 0	0	0	0	0
0, 0, 1	0	1	1	1
0, 1, 0	1	1	1	1
0, 1, 1	1	1	1	1
1, 0, 0	1	0	1	1
1, 0, 1	1	1	1	1
1, 1, 0	1	1	1	1
1, 1, 1	1	1	1	1

V nasledujúcej vete uvedieme základné tautologické ekvivalencie.

Veta 1.2. Nech a, b, c sú formuly s rovnakými premennými. Potom platia tieto tautologické ekvivalencie:

E1.	$a \vee b \sim b \vee a$,	$a \wedge b \sim b \wedge a$,
E2.	$(a \vee b) \vee c \sim a \vee (b \vee c)$,	$(a \wedge b) \wedge c \sim a \wedge (b \wedge c)$,
E3.	$(a \vee b) \wedge c \sim (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$,	$(a \wedge b) \vee c \sim (a \vee c) \wedge (b \vee c)$,
E4.	$\overline{a \vee b} \sim \overline{a} \wedge \overline{b}$,	$\overline{a \wedge b} \sim \overline{a} \vee \overline{b}$,
E5.	$a \vee a \sim a$,	$a \wedge a \sim a$,
E6.	$a \vee (b \wedge \overline{b}) \sim a$,	$a \wedge (b \vee \overline{b}) \sim a$,
E7.	$\overline{\overline{a}} \sim a$,	
E8.	$a \vee (a \wedge b) \sim a$,	$a \wedge (a \vee b) \sim a$,
E9.	$a \Rightarrow b \sim \overline{a} \vee b$,	$a \Rightarrow b \sim \overline{a \wedge \overline{b}}$,
E10.	$a \Leftrightarrow b \sim (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$,	$a \Leftrightarrow b \sim (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})$.

DÔKAZ tejto vety neurobíme, necháme na čitateľa, aby urobil a porovnal príslušné pravdivostné tabuľky. □

Príklad 1.27. Dokážte $p \Rightarrow q \sim \overline{p \wedge \overline{q}}$, druhú z ekvivalencií E9 z predchádzajúcej vety.

RIEŠENIE. Uvedený vzťah môžeme dokázať buď pomocou pravdivostných tabuliek oboch formúl, alebo využitím tabuľky tautologických ekvivalencií. Použijeme tautologické ekvivalencie. Nad znak tautologickej ekvivalencie napíšeme ktoré pravidlo z tabuľky tautologických ekvivalencií sme použili. Z E9 sme použili prvú ekvivalenciu.

$$p \Rightarrow q \overset{E9}{\sim} \overline{p} \vee q \overset{E7}{\sim} \overline{\overline{\overline{p} \vee q}} \overset{E4}{\sim} \overline{p \wedge \overline{q}}$$

■

Definícia 1.20. Hovoríme, že množina logických spojok S je ***úplný systém logických spojok*** (skrátene USLS), ak pre každú formulu a existuje formula b, ktorá obsahuje iba logické spojky z množiny S a platí $a \sim b$. Vtedy tiež hovoríme, že formula a ***sa dá vyjadriť pomocou*** S.

Príklad 1.28. Ukážte, že množiny $\{\vee, \wedge, ^-\}$, $\{^-, \Rightarrow\}$ sú úplné systémy logických spojok.

RIEŠENIE. Pre každé formuly c, d platí

$$c \Rightarrow d \sim \overline{c} \vee d,$$
$$c \Leftrightarrow d \sim (\overline{c} \vee d) \wedge (c \vee \overline{d}).$$

Pomocou týchto ekvivalencií môžeme každú formulu a upraviť na ekvivalentnú formulu b, ktorá neobsahuje logické spojky $\Rightarrow, \Leftrightarrow$, teda obsahuje iba logické spojky z množiny $\{\vee, \wedge, ^-\}$. Tým sme dokázali, že $\{\vee, \wedge, ^-\}$ je USLS.

Aby sme dokázali, že $\{^-, \Rightarrow\}$ je USLS, stačí dokázať, že každá formula a, ktorá obsahuje logické spojky len z množiny $\{\vee, \wedge, ^-\}$ je ekvivalentná niektorej formule b, ktorá obsahuje logické spojky len z množiny $\{^-, \Rightarrow\}$. Pravdivosť tohto tvrdenia vyplýva z toho, že pre každé formuly c, d platí

$$c \vee d \sim \overline{c} \Rightarrow d,$$
$$c \wedge d \sim \overline{\overline{c \wedge d}} \sim \overline{\overline{c} \vee \overline{d}} \sim \overline{c \Rightarrow \overline{d}}.$$

■

Príklad 1.29. Vyjadrite formulu $p \Leftrightarrow q$ pomocou

a) $\{\vee, \wedge, ^-\}$,
b) $\{^-, \Rightarrow\}$.

RIEŠENIE.

a) $p \Leftrightarrow q \sim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \sim (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$.

b) Použijeme $c \wedge d \sim \overline{\overline{c} \vee \overline{d}} \sim \overline{c \Rightarrow \overline{d}}$. Potom platí

$$p \Leftrightarrow q \sim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \sim \overline{(p \Rightarrow q) \Rightarrow \overline{q \Rightarrow p}}.$$

■

4. Relácie

Definícia 1.21. ***Binárnou reláciou*** (stručne len ***reláciou***) ***na množine*** A nazývame ľubovoľnú podmnožinu karteziánskeho súčinu A^2.

Poznámka 1.5. Ak $\sigma \subset A^2$ je binárna relácia na množine A a $(x, y) \in \sigma$, tak hovoríme, že ***prvok*** x ***je v relácii*** σ ***s prvkom*** y a namiesto $(x, y) \in \sigma$ píšeme aj $x \, \sigma \, y$.

Definícia 1.22. Relácia σ na množine A sa nazýva
reflexívna, ak $\forall x \in A \ (x, x) \in \sigma$,
symetrická, ak $\forall x, y \in A \ (x, y) \in \sigma \Rightarrow (y, x) \in \sigma$,
antisymetrická, ak $\forall x, y \in A \ (x, y) \in \sigma \wedge (y, x) \in \sigma \Rightarrow x = y$,
tranzitívna, ak $\forall x, y, z \in A \ (x, y) \in \sigma \wedge (y, z) \in \sigma \Rightarrow (x, z) \in \sigma$.

Príklad 1.30. Zistite, či relácia $\sigma \subset \mathbf{R}^2, \sigma = \{(x, y) \, ; x \leq y\}$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

RIEŠENIE. Relácia σ je reflexívna, lebo pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí $x \leq x$, teda $(x, x) \in \sigma$.
Relácia nie je symetrická, pretože napríklad $(2, 3) \in \sigma$, ale $(3, 2) \notin \sigma$.
Relácia je antisymetrická: Nech $(x, y) \in \sigma$, $(y, x) \in \sigma$, teda $x \leq y$, $y \leq x$. Z vlastností reálnych čísel vieme, že potom platí $x = y$.
Relácia je tranzitívna: Ak $(x, y) \in \sigma$ a zároveň $(y, z) \in \sigma$, teda $x \leq y$ a zároveň $y \leq z$, potom z vlastností reálnych čísel vyplýva $x \leq z$, teda $(x, z) \in \sigma$. ■

Definícia 1.23. Binárna relácia na množine A, ktorá je reflexívna, symetrická a tranzitívna, sa nazýva ***ekvivalencia*** alebo ***relácia ekvivalencie*** na množine A.

Príklad 1.31. Je relácia $\varrho = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2; 3 \mid (y - x)\}$ ekvivalenciou na množine $\mathbf{Z}$ všetkých celých čísel? ($a \mid b$ znamená: číslo b je deliteľné číslom a.)

Riešenie. $x - x = 0$, čo je číslo deliteľné tromi, preto $(x, x) \in \varrho$. Relácia ϱ je teda reflexívna.

Nech $(x, y) \in \varrho$. To znamená, že 3 delí číslo $y - x$. V takom prípade $y - x = 3k$, kde $k \in \mathbf{Z}$. Potom $x - y = -(y - x) = 3(-k)$, čo znamená, že $3 \mid (x - y)$ a teda $(y, x) \in \varrho$. Z toho vyplýva, že relácia ϱ je symetrická.

Nech $(x, y), (y, z) \in \varrho$. Existujú teda také celé čísla m, n, že $y - x = 3m, z - y = 3n$. Potom $z - x = z - x - y + y = (z - y) + (y - x) = 3m + 3n = 3(m + n)$. Číslo $z - x$ je deliteľné číslom 3, to znamená $(x, z) \in \varrho$ a teda relácia ϱ je tranzitívna.

Relácia ϱ má požadované vlastnosti, je preto ekvivalenciou na množine $\mathbf{Z}$. ■

Poznámka 1.6. Ak ϱ je relácia ekvivalencie a $(x, y) \in \varrho$, tak budeme hovoriť, že x ***je ekvivalentné s*** y.

Definícia 1.24. Nech σ je relácia ekvivalencie na množine A a $a \in A$. Potom množinu $\sigma(a) = \{x \in A; a\,\sigma\,x\}$ nazývame ***triedou ekvivalencie prvku*** a.

Príklad 1.32. Pre reláciu ekvivalencie ϱ definovanú v predchádzajúcom príklade nájdime triedy ekvivalencie prvkov 0, 1, 2.

Riešenie.
$\varrho(0) = \{x \in \mathbf{Z}; 0\,\varrho\,x\} = \{x \in \mathbf{Z}; 3 \mid (x - 0)\} = \{x; x = 3k, k \in \mathbf{Z}\} = \{3k; k \in \mathbf{Z}\}$,
$\varrho(1) = \{x \in \mathbf{Z}; 1\,\varrho\,x\} = \{x \in \mathbf{Z}; 3 \mid (x - 1)\} = \{x; x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\} = \{3k + 1; k \in \mathbf{Z}\}$,
$\varrho(2) = \{x \in \mathbf{Z}; 2\,\varrho\,x\} = \{x \in \mathbf{Z}; 3 \mid (x - 2)\} = \{x; x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\} = \{3k + 2; k \in \mathbf{Z}\}$. ■

Veta 1.3. Nech σ je relácia ekvivalencie na množine A. Potom pre každé $x, y \in A$

(1) $x \in \sigma(x)$,
(2) $x \in \sigma(y)$ práve vtedy, keď $\sigma(x) = \sigma(y)$,
(3) ak $\sigma(x) \neq \sigma(y)$, tak $\sigma(x) \cap \sigma(y) = \emptyset$.

Dôkaz.
(1) Relácia σ je reflexívna, preto pre každé $x \in A$ platí $(x, x) \in \sigma$, čo znamená, že $x \in \sigma(x)$.

(2) Nech $x \in \sigma(y)$ t.j. $(y, x) \in \sigma$. Ukážeme, že každý prvok $z \in \sigma(x)$ je prvkom aj množiny $\sigma(y)$. Nech teda $z \in \sigma(x)$, čo znamená, že $(x, z) \in \sigma$. Keďže $(y, x) \in \sigma$ a súčasne $(x, z) \in \sigma$, z tranzitívnosti relácie σ vyplýva $(y, z) \in \sigma$, a teda $z \in \sigma(y)$. Ukázali sme, že $\sigma(x) \subset \sigma(y)$. Analogicky sa ukáže, že $\sigma(y) \subset \sigma(x)$. Potom však platí $\sigma(x) = \sigma(y)$.

(3) (nepriamo) Nech $\sigma(x) \cap \sigma(y) \neq \emptyset$. Potom existuje $z \in \sigma(x) \cap \sigma(y)$ a pre tento prvok platí $(x, z) \in \sigma, (y, z) \in \sigma$. Keďže relácia σ je symetrická a tranzitívna, tak $(x, y) \in \sigma$ čiže $x \in \sigma(y)$ a podľa (2) $\sigma(x) = \sigma(y)$, čo je spor. □

Príklad 1.33. V relácii ekvivalencie $\varrho = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2; 3 \mid (y - x)\}$ jedinými triedami ekvivalencie sú $\varrho(0) = \{3k; k \in \mathbf{Z}\}$, $\varrho(1) = \{3k + 1; k \in \mathbf{Z}\}$, $\varrho(2) = \{3k + 2; k \in \mathbf{Z}\}$, lebo ľubovoľné celé číslo má tvar $3m$, $3m+1$ alebo $3m+2$ ($m \in \mathbf{Z}$) a potom $\varrho(3m) = \varrho(0)$, lebo $3m \in \varrho(0)$; $\varrho(3m + 1) = \varrho(1)$, lebo $3m + 1 \in \varrho(1)$; $\varrho(3m + 2) = \varrho(2)$, lebo $3m + 2 \in \varrho(2)$. ■

Definícia 1.25. Nech A je neprázdna množina a T je systém podmnožín množiny A, pre ktorý platí

(1) $\forall X \in T \;\; X \neq \emptyset$,
(2) $\forall X, Y \in T \;\; X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$,

(3) $\bigcup_{X\in T} X = A.$

Potom T sa nazýva ***rozklad množiny*** A a prvky množiny T sa nazývajú ***triedy rozkladu množiny*** A.

Príklad 1.34. Nech $A = \{a, b, c, d, e\},\ A_1 = \{a\},\ A_2 = \{b, d, e\},\ A_3 = \{c\},$ $B_1 = \{a, b, c\},\ B_2 = \{b, d, e\}$. Potom $T = \{A_1, A_2, A_3\}$ je rozklad množiny A, lebo množiny $A_1,\ A_2,\ A_3$ sú neprázdne, prienik každých dvoch rôznych z nich je prázdna množina a zjednotenie všetkých troch množín je množina A. Naproti tomu $S = \{B_1, B_2\}$ nie je rozklad množiny A, lebo $B_1 \neq B_2$ ale $B_1 \cap B_2 = \{b\} \neq \emptyset$. ■

Príklad 1.35. Triedy ekvivalencie $\varrho(0)$, $\varrho(1)$, $\varrho(2)$ relácie ekvivalencie $\varrho = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2; 3 \mid (y - x)\}$ tvoria rozklad množiny $\mathbf{Z}$, pretože $\varrho(0) = \{0, \pm3, \pm6, \ldots\}$, $\varrho(1) = \{1, -2, 4, -5, 7, -8, 10, \ldots\}$, $\varrho(2) = \{2, -1, 5, -4, 8, -7, 11, \ldots\}$, čo sú neprázdne množiny, $\varrho(0) \cap \varrho(1) = \emptyset$, $\varrho(0) \cap \varrho(2) = \emptyset$, $\varrho(1) \cap \varrho(2) = \emptyset$ a $\varrho(0) \cup \varrho(1) \cup \varrho(2) = \mathbf{Z}$. ■

Veta 1.4. Nech σ je ekvivalencia na množine A. Potom triedy ekvivalencie $\sigma(a)$, pre $a \in A$ tvoria rozklad množiny A. Triedami rozkladu sú triedy ekvivalencie relácie σ.

Dôkaz. Z vety 1.3 vyplýva, že každá trieda ekvivalencie $\sigma(a)$ prvku $a \in A$ je neprázdna, lebo $a \in A$. V tretej vlastnosti tejto vety sa priamo hovorí, že prienik dvoch rôznych tried ekvivalencie je prázdna množina. Každá trieda ekvivalencie obsahuje len prvky množiny A, preto $\bigcup_{a\in A} \sigma(a) \subset A$. Na druhej strane pre ľubovoľný prvok $b \in A$ platí $b \in \sigma(b)$, a teda aj $b \in \bigcup_{a\in A} \sigma(a)$, preto $A \subset \bigcup_{a\in A} \sigma(a)$. V spojení s predchádzajúcou inklúziou dostávame $\bigcup_{a\in A} \sigma(a) = A$. □

Poznámka 1.7. O rozklade, ktorý je tvorený triedami ekvivalencie, hovoríme, že je to ***rozklad indukovaný*** danou ***ekvivalenciou***.

Veta 1.5. Ku každému rozkladu množiny A existuje jednoznačne určená ekvivalencia na množine A, ktorá tento rozklad indukuje.

Dôkaz. 1. Nech T je rozklad množiny A. Definujme na množine A reláciu σ takto:

$$a\,\sigma\,b \text{ práve vtedy, keď existuje } X \in T \text{ také, že } a, b \in X.$$

Je zrejmé, že táto relácia je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Teda je to ekvivalencia. Ďalej vidíme, že prvky patriace do jednej triedy rozkladu sú navzájom ekvivalentné. Preto každá trieda rozkladu X je podmnožinou jednej triedy ekvivalencie relácie σ. Táto trieda ekvivalencie už nemôže obsahovať ďalšiu triedu rozkladu Y $(Y \neq X)$, lebo v opačnom prípade by pre prvky $x \in X, y \in Y$ na základe definície relácie σ platilo $(x, y) \notin \sigma$ a na druhej strane $(x, y) \in \sigma$, pretože x aj y patria do tej istej triedy ekvivalencie, a to je spor. Tým sme ukázali, že každá trieda rozkladu T je triedou ekvivalencie σ.

2. Z časti 1 vyplýva, že existuje aspoň jedna ekvivalencia, ktorá indukuje rozklad množiny A, ktorý je zhodný s T. Teraz ukážeme, že táto ekvivalencia je jediná.

Predpokladajme, že existuje ešte jedna ekvivalencia $\tau \subset A \times A$ na množine A, ktorou indukovaný rozklad množiny A na triedy ekvivalencie je opäť T.
Nech $a\,\tau\,b$. Teda existuje $X \in T$ také, že $X = \tau(a) = \tau(b)$. To znamená, že $a, b \in X$, a teda $a\,\sigma\,b$, kde σ je ekvivalencia z prvej časti dôkazu. Z toho vyplýva, že podmienka $(a, b) \in \tau$ implikuje $(a, b) \in \sigma$, a teda $\tau \subset \sigma$.
Nech naopak $(a, b) \in \sigma$. Teda existuje $X \in T$ také, že $a, b \in X$. Ale pretože T je rozklad

indukovaný aj ekvivalenciou τ, X je jednou z tried ekvivalencie τ. Preto $(a, b) \in \tau$. Z toho vyplýva, že $\sigma \subset \tau$, a teda spolu s predošlou časťou dostávame $\sigma = \tau$. Tým je veta dokázaná. □

Dokázali sme, že medzi ekvivalenciami na množine A a rozkladmi množiny A je vzájomne jedno-jednoznačné priradenie. Túto skutočnosť budeme využívať tak, že ekvivalenciu budeme definovať pomocou k nej patriaceho rozkladu.

Príklad 1.36. Nech systém množín $T = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f\}\}$ je rozklad množiny $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Potom relácia ekvivalencie σ, ktorá tento rozklad indukuje, je $\sigma = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (d.d)(e, e), (d, e), (e, d), (f, f)\}$. Vidíme, že zápis ekvivalencie pomocou príslušného rozkladu je oveľa prehľadnejší. ■

5. Orientované grafy

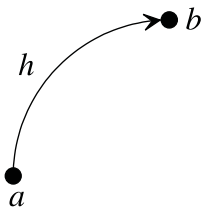
Teraz uvedieme základné pojmy z teórie grafov, ktoré využijeme pri štúdiu teórie konečných automatov.

Definícia 1.26. ***Orientovaný graf*** je usporiadaná trojica $G = (V, H, e)$, kde V, H sú konečné množiny, $V \neq \emptyset, V \cap H = \emptyset$ a e je zobrazenie $e : H \to V^2$. Prvky množiny V sa nazývajú ***vrcholy***, prvky množiny H sa nazývajú ***orientované hrany*** a zobrazenie e sa nazýva ***incidencia***. Ak u, v sú vrcholy, h je orientovaná hrana a $e(h) = (u, v)$, tak u, v sa nazývajú ***krajné vrcholy orientovanej hrany*** h, špeciálne: vrchol u sa nazýva ***začiatočný vrchol orientovanej hrany*** h a vrchol v ***koncový vrchol orientovanej hrany*** h.

Príklad 1.37. Nech $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ $e : e(h_1) = (1, 4)$, $e(h_2) = (4, 2)$, $e(h_3) = (3, 2)$, $e(h_4) = e(h_5) = (3, 4)$, $e(h_6) = (2, 2)$. Potom $G = (V, H, e)$ je orientovaný graf. ■

Definícia 1.27. Grafy $G = (V, H, e), G' = (V', H', e')$ sú rovnaké, ak $V = V', H = H', e = e'$.

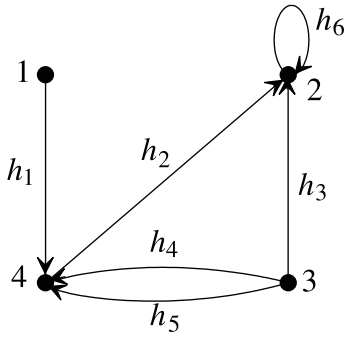
Orientované grafy budeme znázorňovať aj graficky a to takýmto spôsobom: vrcholy orientovaného grafu G znázorníme ako body roviny, ktoré označíme rovnako ako samotné vrcholy. Nech h je orientovaná hrana s krajnými vrcholmi a, b. Potom orientovanú hranu



Obr. 1

h s počiatočným vrcholom a a koncovým b znázorníme ako čiaru spájajúcu body a, b so šípkou pri koncovom vrchole b (obr. 1). Takto vytvorený objekt budeme nazývať ***diagram orientovaného grafu*** G. Často však namiesto „diagram grafu G“ budeme hovoriť iba „graf G“.

Poznámka 1.8. Tu sa budeme zaoberať iba orientovanými grafmi, preto slovo orientovaný budeme často vynechávať.



Obr. 2

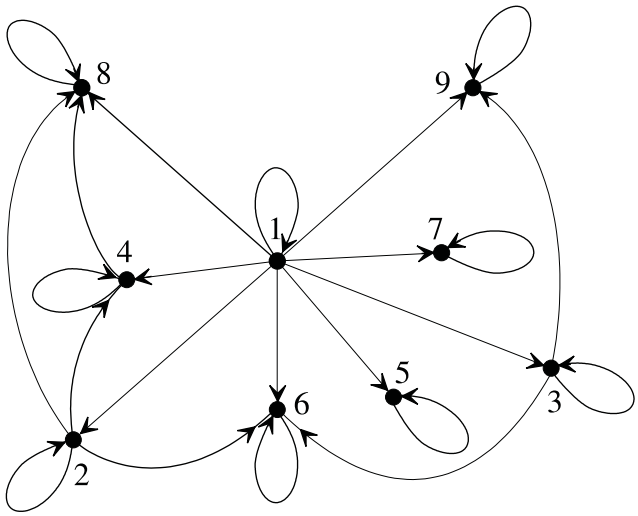
Príklad 1.38. Diagram orientovaného grafu z príkladu 1.37 je na obr. 2. ■

Definícia 1.28. Ak hrana h orientovaného grafu G inciduje s dvoma rôznymi vrcholmi, nazýva sa ***orientovaná linka*** a ak inciduje len s jedným vrcholom, nazýva sa ***orientovaná slučka***.

Príklad 1.39. V grafe G (obr. 2) hrany h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 sú linky a hrana h_6 je slučka.

Definícia 1.29. ***Násobnosťou orientovanej hrany so začiatočným vrcholom*** u ***a koncovým vrcholom*** v v orientovanom grafe G nazývame počet orientovaných hrán, ktorých začiatočný vrchol je u a koncový je v. Toto číslo budeme označovať $m(u, v)$.

Orientovaný graf nazývame ***jednoduchý*** (tiež ***prostý***) ***orientovaný graf***, ak pre každé dva jeho vrcholy u, v je $m(u, v) \leq 1$. Orientovaný graf, ktorý nie je jednoduchý sa nazýva ***orientovaný multigraf***.



Obr. 3

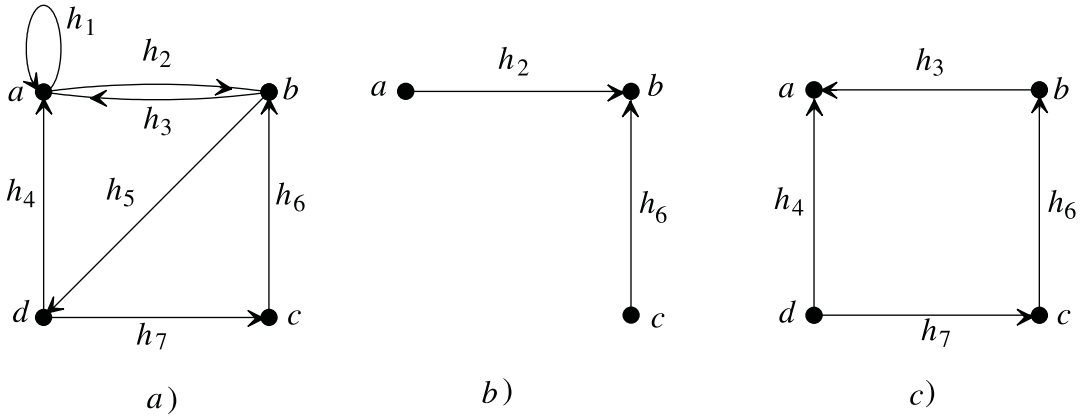
Jednoduché grafy, presnejšie ich diagramy, nám umožňujú grafické znázornenie binárnych relácií na množine. Deje sa to takto:

Nech A je množina a $\sigma \subset A \times A$ je binárna relácia na množine A. Definujme graf $G = (A, \sigma, e)$, ktorého vrcholmi sú prvky množiny A, hranami sú usporiadané dvojice patriace do relácie σ a incidenciou je zobrazenie $e : \sigma \to A \times A$, $e(x, y) = (x, y)$. Graf $G = (A, \sigma, e)$ sa nazýva ***orientovaný graf binárnej relácie*** σ.

Príklad 1.40. Na množine $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ je definovaná relácia $\varrho = \{(x, y) \in A^2; x \mid y\}$. Orientovaný graf relácie ϱ (presnejšie jeho diagram) je na obr. 3. ■

Definícia 1.30. Orientovaný graf $G' = (V', H', e')$ sa nazýva ***podgraf*** orientovaného grafu $G = (V, H, e)$, ak $V' \subset V$, $H' \subset H$, a e' je zúžením incidencie e na množinu hrán H', t.j. pre každú hranu $h \in H'$ je $e'(h) = e(h)$.

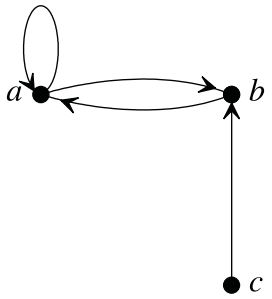
Príklad 1.41. Na obr. 4b, 4c sú podgrafy grafu G, ktorého diagram je na obr. 4a. ■



Obr. 4

Definícia 1.31. Nech $G = (V, H, e)$ je orientovaný graf, $V' \subset V$, $V' \neq \emptyset$. Podgraf $G(V')$ orientovaného grafu G, ktorého množina vrcholov je V' a množina hrán H' je určená vlastnosťou: ak $u, v \in V'$, tak H' obsahuje všetky hrany z H, ktoré incidujú s oboma vrcholmi u, v, sa nazýva ***indukovaný podgraf***.

Príklad 1.42. Nech G je graf z obr. 4a, $V' = \{a, b, c\}$. Indukovaný podgraf $G(V')$ grafu G je na obr. 5. ■



Obr. 5

Definícia 1.32. Nech u, v sú vrcholy orientovaného grafu G, $k \in \mathbf{N}$. ***Orientovaným sledom dĺžky*** k ***z vrchola*** u ***do vrchola*** v nazývame postupnosť

$$v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, h_k, v_k,$$

kde

1. $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sú vrcholy orientovaného grafu G,
2. $h_1, \ldots, h_k$ sú hrany orientovaného grafu G,

3. pre $i \in \{1, \ldots, k\}$ je v_{i-1} začiatočný a v_i koncový vrchol hrany h_i,
4. $v_0 = u,\ v_n = v$.

Vrchol u sa nazýva ***začiatočný*** a vrchol v ***koncový vrchol*** tohto sledu.

Príklad 1.43. V grafe z obr. 4a je
$a, h_1, a, h_2, b, h_5, d$ orientovaným sledom z vrcholu a do vrcholu d dĺžky 3,
a, h_2, b, h_5, d orientovaným sledom z vrcholu a do vrcholu d dĺžky 2,
a, h_1, a orientovaným sledom z vrcholu a do vrcholu a dĺžky 1,
a orientovaným sledom z vrcholu a do vrcholu a dĺžky 0.

Definícia 1.33. Orientovaný sled, v ktorom sa každá hrana grafu vyskytuje najviac raz, sa nazýva ***orientovaný ťah***.

Orientovaný sled, v ktorom sa každý vrchol grafu vyskytuje najviac raz, sa nazýva ***orientovaná cesta***.

Definícia 1.34. Graf $G = (V, H, e)$ sa nazýva ***silne súvislý*** graf, ak pre každé dva vrcholy $u, v \in V$ existuje orientovaný sled z vrchola u do vrchola v.

Definícia 1.35. Podgraf F grafu G sa nazýva ***silne súvislý komponent*** grafu G, ak platí:

1. F je indukovaný podgraf grafu G.
2. F je silne súvislý graf.
3. Ak $F' \neq F$ je taký podgraf grafu G, že F je jeho podgrafom, tak F' už nie je silne súvislým grafom.

V aplikáciách často k adekvátnemu opisu študovaného systému nestačí orientovaný graf, ale je potrebné k hranám a vrcholom pripísať nejaké údaje (najčastejšie číselné hodnoty). Graf, ktorého hrany a (alebo) vrcholy sú označené číselnými (alebo inými) hodnotami, sa nazýva ***ohodnotený graf***.