

KAPITOLA 2

Booleovské funkcie

V úvode sme sa stretli s pravdivostnými ohodnoteniami výrokových foriem, čo sú funkcie, ktoré zobrazujú prvky množiny $\{0, 1\}^n$ do množiny $\{0, 1\}$. Takýmito funkciami sa budeme v tejto kapitole podrobnejšie zaoberať. Dohodnime sa, že ďalej budeme používať označenie $\mathbf{B} = \{0, 1\}$.

1. Booleovské funkcie a booleovské výrazy

Definícia 2.1. Každá funkcia $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$, $n \in \mathbf{N}^+$ sa nazýva **booleovská** (tiež **logická**) **funkcia** n premenných.

Dohoda. Ako premenné v booleovských funkciách budeme používať x, y, z, u, v , resp. tieto premenné s indexami.

Funkcie jednej premennej sú uvedené v tab. 1.

TABUĽKA 1. Booleovské funkcie jednej premennej

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Existujú aj ďalšie booleovské funkcie jednej premennej? Ak by sme chceli do tabuľky 1 pridať ďalšiu funkciu, t.j. vložiť do tabuľky ďalší stĺpec núl a jednotiek, zistíme, že je rovný niektorému z predchádzajúcich štyroch stĺpcov. Znamená to, že booleovské funkcie jednej premennej sú iba štyri.

Koľko existuje booleovských funkcií dvoch premenných? Zapišme tieto funkcie do tabuľky. Keďže definičný obor booleovskej funkcie dvoch premenných má štyri prvky, bude mať tabuľka (okrem hlavičky) štyri riadky. Funkcií bude toľko, koľko existuje rôznych stĺpcov núl a jednotiek. V každom riadku je jedna z dvoch hodnôt 0, 1, preto môžeme vytvoriť $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 2^{2^2} = 16$ rôznych booleovských funkcií dvoch premenných. Uvádzame ich v tab. 2.

Veta 2.1. Booleovských funkcií n premenných je 2^{2^n} .

DÔKAZ. Počet všetkých n -tíc prvkov z množiny $\mathbf{B}$ je 2^n . Aby sme definovali booleovskú funkciu n premenných, musíme pre každú z týchto 2^n n -tíc zvoliť jednu funkčnú hodnotu z dvoch prvkov množiny $\mathbf{B}$. Každá takáto funkcia je teda určená 2^n -ticou núl a jednotiek a tých je možné vytvoriť $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{2^n} = 2^{2^n}$. $\square$

Poznámka 2.1. Takéto sú počty booleovských funkcií pre niektoré hodnoty n :

$$\begin{array}{ll}
 n = 1, & 2^{2^1} = 2^2 = 4 \\
 n = 2, & 2^{2^2} = 2^4 = 16 \\
 n = 3, & 2^{2^3} = 2^8 = 256 \\
 n = 4, & 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536 \\
 n = 5, & 2^{2^5} = 2^{32} \doteq 4,29497 \times 10^9 \\
 n = 10, & 2^{2^{10}} = 2^{1024} \doteq 1,7976931348 \times 10^{308}
 \end{array}$$

TABUĽKA 2. Booleovské funkcie dvoch premenných

(x, y)	$f_5(x, y)$	$f_6(x, y)$	$f_7(x, y)$	$f_8(x, y)$	$f_9(x, y)$	$f_{10}(x, y)$	$f_{11}(x, y)$	$f_{12}(x, y)$
$(0, 0)$	0	0	0	0	1	0	0	0
$(0, 1)$	0	0	0	1	0	0	1	1
$(1, 0)$	0	0	1	0	0	1	0	1
$(1, 1)$	0	1	0	0	0	1	1	0

(x, y)	$f_{13}(x, y)$	$f_{14}(x, y)$	$f_{15}(x, y)$	$f_{16}(x, y)$	$f_{17}(x, y)$	$f_{18}(x, y)$	$f_{19}(x, y)$	$f_{20}(x, y)$
$(0, 0)$	1	1	1	0	1	1	1	1
$(0, 1)$	0	0	1	1	0	1	1	1
$(1, 0)$	0	1	0	1	1	0	1	1
$(1, 1)$	1	0	0	1	1	1	0	1

Každá booleovská funkcia n premenných je n -árnou operáciou na množine $\mathbf{B}$. Všimnime si špeciálne jednu unárnu – f_3 (tab. 1) a dve binárne – f_6, f_{16} (tab. 2). Ak porovnáme tabuľky týchto funkcií a pravdivostné tabuľky výrokových formúl $\bar{p}, p \wedge q, p \vee q$, zistíme, že pravdivostnými ohodnoteniami týchto formúl v danom poradí sú funkcie f_3, f_6, f_{16} , čiže

$$\text{ph}_{\bar{p}}(x) = f_3(x), \text{ph}_{p \wedge q}(x, y) = f_6(x, y), \text{ph}_{p \vee q}(x, y) = f_{16}(x, y).$$

Definícia 2.2. Logický súčet nazývame binárnu operáciu na množine $\mathbf{B}$, ktorú označujeme $+$ a definujeme takto:

$$x + y = f_{16}(x, y).$$

Logický súčin nazývame binárnu operáciu na množine $\mathbf{B}$, ktorú označujeme $\cdot$ a definujeme takto:

$$x \cdot y = f_6(x, y).$$

Negáciou (alebo **komplementom**) nazývame unárnu operáciu na množine $\mathbf{B}$, ktorú označujeme $\bar{}$ a definujeme takto:

$$\bar{x} = f_3(x).$$

Z tabuliek funkcií f_6 a f_{16} vidieť, že

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 1,$$

$$0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1,$$

čo môžeme zapísať aj pomocou Cayleyho multiplikačných tabuliek, ktoré v tomto prípade majú tvar:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Z tabuľky funkcie f_3 zase zistíme, že

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0.$$

Poznámka 2.2. Množinu $\mathbf{B}$ spolu s binárnymi operáciami logický súčet, logický súčin a unárnou operáciou negácia nazývame **Booleova algebra**.

Práve definované operácie nám umožňujú zapísať mnohé booleovské funkcie šikovnejším spôsobom než sú tabuľky, napr. $f_{17}(x, y) = x + (\bar{x} \cdot \bar{y})$. O platnosti tejto rovnosti sa ľahko presvedčíme:

$$\begin{aligned} 0 + (\bar{0} \cdot \bar{0}) &= 0 + (1 \cdot 1) = 0 + 1 = 1 = f_{17}(0, 0), \\ 0 + (\bar{0} \cdot \bar{1}) &= 0 + (1 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 = f_{17}(0, 1), \\ 1 + (\bar{1} \cdot \bar{0}) &= 1 + (0 \cdot 1) = 1 + 0 = 1 = f_{17}(1, 0), \\ 1 + (\bar{1} \cdot \bar{1}) &= 1 + (0 \cdot 0) = 1 + 0 = 1 = f_{17}(1, 1), \end{aligned}$$

Veta 2.2. Pre každé $x, y, z \in \mathbf{B}$ platí

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $x + y = y + x$ | $x \cdot y = y \cdot x$ | komutatívne zákony |
| 2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ | $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ | asociatívne zákony |
| 3. $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ | $(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$ | distributívne zákony |
| 4. $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ | $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$ | de Morganove zákony |
| 5. $x + x = x$ | $x \cdot x = x$ | zákony idempotentnosti |
| 6. $x + \bar{x} = 1$ | $x \cdot \bar{x} = 0$ | zákony komplementárnosti |
| 7. $\bar{\bar{x}} = x$ | | zákon involúcie |
| 8. $x + (x \cdot y) = x$ | $x \cdot (x + y) = x$ | zákony absorpcie |
| 9. $x + 0 = x$ | $x \cdot 1 = x$ | zákony identity |
| 10. $x + 1 = 1$ | $x \cdot 0 = 0$ | zákon jednotkového sčítovania a nulového násobenia |

DÔKAZ. Dokážeme napr. vlastnosť $x + (x \cdot y) = x$. Ostatné vlastnosti sa dajú dokázať analogicky. Označme $L(x, y) = x + (x \cdot y)$ a $P(x, y) = x$. Potom

$$\begin{aligned} L(0, 0) &= 0 + (0 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 = P(0, 0), \\ L(0, 1) &= 0 + (0 \cdot 1) = 0 + 0 = 0 = P(0, 1), \\ L(1, 0) &= 1 + (1 \cdot 0) = 1 + 0 = 1 = P(1, 0), \\ L(1, 1) &= 1 + (1 \cdot 1) = 1 + 1 = 1 = P(1, 1), \end{aligned}$$

□

Z tabuliek operácií logického súčtu a súčinu priamo vidieť, že platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 2.3. Pre každé $x, y \in \mathbf{B}$ platí

$$\begin{aligned} x + y = 1 &\Leftrightarrow x = 1 \vee y = 1 \\ x + y = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0 \\ x \cdot y = 1 &\Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 1 \\ x \cdot y = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0 \end{aligned}$$

□

Označme F_n množinu všetkých booleovských funkcií n premenných. Na množine F_n definujeme operácie súčet, súčin a negáciu, ktoré budeme označovať v poradí $+$, $\cdot$, $\bar{}$.

Definícia 2.3. Nech $f, g : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ sú booleovské funkcie, potom **súčtom booleovských funkcií** f, g nazývame funkciu

$$f + g : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}, (f + g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n),$$

súčinom booleovských funkcií f, g nazývame funkciu

$$f \cdot g : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}, (f \cdot g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n),$$

negáciou funkcie f nazývame funkciu

$$\bar{f} : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}, \bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}.$$

Príklad 2.1. $f(x, y, z) = x + (y \cdot z)$, $g(x, y, z) = y + z$ sú booleovské funkcie troch premenných. Aký je predpis funkcie $h = \overline{f} \cdot g$?

RIEŠENIE. $h(x, y, z) = (\overline{f} \cdot g)(x, y, z) = \overline{f}(x, y, z) \cdot g(x, y, z) = \overline{f(x, y, z)} \cdot g(x, y, z) = x + (y \cdot z) \cdot (y + z)$.

Poznámka 2.3.

1. Vlastnosti z vety 2.2 zostanú v platnosti aj v prípade, keby x, y, z boli booleovské funkcie n premenných. Množina F_n spolu s práve definovanými operáciami súčtu, súčinu a negácie je tiež Booleova algebra. (Booleovu algebru by sme mohli definovať ako ľubovoľnú množinu $\mathbf{B}$, na ktorej sú definované operácie $+$, $\cdot$, $\bar{}$ tak, že sú splnené vlastnosti vety 2.2.)

2. V každej Booleovej algebre platí **princíp duality**: Ak v pravdivom tvrdení zmeňme $+$ na $\cdot$, 0 na 1 a naopak, dostaneme opäť pravdivé tvrdenie. Overte si, že je tento princíp splnený vo všetkých desiatich vlastnostiach vety 2.2.

Podľa zákona absorpcie sú funkcie dvoch premenných $f(x, y) = x$, $g(x, y) = x + (x \cdot y)$ rovnaké, aj keď výrazy x , $x + (x \cdot y)$ sú rôzne, pokiaľ sa na ne pozeráme ako na postupnosti znakov. Vidíme, že niektoré funkcie sa dajú vyjadriť viacerými výrazmi vytvorenými z premenných, znakov operácií $+$, $\cdot$, $\bar{}$ a zátvoriek. Na druhej strane sa vynára otázka, či je možné pomocou takýchto výrazov vyjadriť každú booleovskú funkciu. Poďme sa týmito výrazmi zaoberať podrobnejšie.

Definícia 2.4. Booleovský výraz (krátko **B-výraz**) n premenných $x_1, \dots, x_n$ je slovo nad abecedou $\{+, \cdot, \bar{}, (,), 0, 1, x_1, \dots, x_n\}$ definované takto:

- (1) $x_1, \dots, x_n, 0, 1$ sú booleovské výrazy.
- (2) Ak U, V sú booleovské výrazy, tak aj $\overline{U}$, $(U + V)$, $(U \cdot V)$ sú booleovské výrazy.
- (3) Iné slová nie sú booleovské výrazy.

Dohoda.

- (1) V samostatne stojacom B-výraze vynechávame vonkajšie zátvorky.
- (2) Princíp priority „ $\cdot$ pred $+$ “: $x \cdot y + z$ znamená $(x \cdot y) + z$.
- (3) Znak logického súčinu budeme často vynechávať, teda namiesto $x \cdot y$ budeme písať xy .
- (4) B-výraz U n premenných $x_1, \dots, x_n$ označujeme aj $U(x_1, \dots, x_n)$.

Poznamenajme, že body 1 a 2 tejto dohody sú analogické ako v dohode o formulách.

Príklad 2.2.

- (1) Premenné x, y, z sú B-výrazy.
- (2) $x + y, xy, yz, \overline{zx}$ sú B-výrazy.
- (3) $(x + y)z, (xy)z, yz + x$ sú B-výrazy.
- (4) $x + y + +z$ nie je B-výraz. ■

Poznámka 2.4. Keďže B-výrazy sú slová, tak rovnosť B-výrazov je rovnosť slov, čiže dva B-výrazy sú rovnaké, ak majú rovnaký počet písmen a rovnaké prvé písmená, atď., rovnaké posledné písmená. Napríklad nerovnajú sa B-výrazy $(x + y)z$, $xz + yz$. Pritom, ako ľahko zistíme z tabuliek, ako booleovské funkcie sú rovnaké. Preto je vždy potrebné vedieť, či ide o B-výraz, alebo booleovskú funkciu.

Každý B-výraz $U(x_1, \dots, x_n)$ určuje jednoznačne booleovskú funkciu. Jej hodnotu v bode $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{B}^n$ určíme tak, že za premenné $x_1, \dots, x_n$ dosadíme prvky $\beta_1, \dots, \beta_n$ a vykonáme uvedené operácie s týmito prvkami. Túto funkciu môžeme označiť takisto $U(x_1, \dots, x_n)$. Ak však chceme, aby bolo priamo z označenia vidieť, že je to funkcia určená

B-výrazom U , použijeme označenie f_U resp. $f_U(x_1, \dots, x_n)$. Tiež hovoríme, že **B-výraz** $U(x_1, \dots, x_n)$ **reprezentuje funkciu** $f_U(x_1, \dots, x_n)$.

Príklad 2.3. B-výraz $U(x, y, z) = (x + \bar{y})z$ určuje funkciu $f_U(x, y, z) = (x + \bar{y})z$. Jej hodnota v bode $(0, 0, 1)$ je $f_U(0, 0, 1) = (0 + \bar{0}) \cdot 1 = (0 + 1) \cdot 1 = 1$. ■

Definícia 2.5. B-výrazy $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa nazývajú **ekvivalentné**, ak určujú rovnakú booleovskú funkciu. Označujeme to

$$U \cong V, \text{ resp. } U(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong V(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Poznámka 2.5. Predchádzajúcu definíciu môžeme stručne zapísať takto:

$$U \cong V \Leftrightarrow f_U = f_V.$$

Príklad 2.4. Dokážte, že $xz + yz \cong (x + y)z$.

RIEŠENIE. Vytvorme tabuľky funkcií určených týmito B-výrazmi (tab. 3). ■

TABUĽKA 3. Tabuľka funkcií z príkladu 2.4

x, y, z	xz	yz	$xz + yz$	$x + y$	$(x + y)z$
0, 0, 0	0	0	0	0	0
0, 0, 1	0	0	0	0	0
0, 1, 0	0	0	0	1	0
0, 1, 1	0	1	1	1	1
1, 0, 0	0	0	0	1	0
1, 0, 1	1	0	1	1	1
1, 1, 0	0	0	0	1	0
1, 1, 1	1	1	1	1	1

Príklad 2.5. Dokážte, že pre B-výrazy platí

- (1) $x + y \cong \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$,
- (2) $x \cdot y \cong \overline{\bar{x} + \bar{y}}$.

RIEŠENIE. Stačí ukázať, že B-výrazy $x + y$, $\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$ a B-výrazy $x \cdot y$, $\overline{\bar{x} + \bar{y}}$ určujú rovnaké booleovské funkcie. Vidíme to z nasledujúcej spoločnej tab. 4. ■

TABUĽKA 4. Tabuľka funkcií z príkladu 2.5

x, y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} + \bar{y}$	$\bar{x} \cdot \bar{y}$	$\overline{\bar{x} + \bar{y}}$	$x \cdot y$	$\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$	$x + y$
0, 0	1	1	1	1	0	0	0	0
0, 1	1	0	1	0	0	0	1	1
1, 0	0	1	1	0	0	0	1	1
1, 1	0	0	0	0	1	1	1	1

Veta 2.4. (Tabuľka ekvivalencií B-výrazov.) Nech U, V, W sú B-výrazy s premennými $x_1, x_2, \dots, x_n$. Potom platí:

E1.	$U + V \cong V + U$	$UV \cong VU$	komutatívne zákony
E2.	$(U + V) + W \cong U + (V + W)$	$(UV)W \cong U(VW)$	asociatívne zákony
E3.	$(U + V)W \cong UW + VW$	$UV + W \cong (U + W)(V + W)$	distributívne zákony
E4.	$\overline{U + V} \cong \overline{U} \overline{V}$	$\overline{UV} \cong \overline{U} + \overline{V}$	de Morganove zákony
E5.	$U + U \cong U$	$UU \cong U$	zákony idempotentnosti
E6.	$U + \overline{U} \cong 1$	$U\overline{U} \cong 0$	zákony komplementárnosti
E7.	$U \cong \overline{\overline{U}}$		zákon involúcie
E8.	$U + (UV) \cong U$	$U(U + V) \cong U$	zákon absorpcie (pohltenia)
E9.	$U + 0 \cong U$	$U \cdot 1 \cong U$	zákony identity
E10.	$U + 1 \cong 1$	$U \cdot 0 \cong 0$	zákony jednotkového sčítania a nulového násobenia

DÔKAZ. $f_{U+V} = f_U + f_V = f_V + f_U = f_{V+U}$. Z toho vyplýva $U + V \cong V + U$. Ostatné vlastnosti sa dokážu podobne. $\square$

Veta 2.5. (zákony stability) Pre každé B-výrazy U, V, W platí: ak $U \cong V$, tak

$$\begin{aligned} U + W &\cong V + W \\ UW &\cong VW \\ \overline{U} &\cong \overline{V} \end{aligned}$$

DÔKAZ. B-výrazy U, V sú ekvivalentné, preto nimi určené booleovské funkcie sú rovnaké, t.j. $f_U = f_V$. Potom

$$\begin{aligned} f_{U+W} &= f_U + f_W = f_V + f_W = f_{V+W} \\ f_{UW} &= f_U f_W = f_V f_W = f_{VW} \\ f_{\overline{U}} &= \overline{f_U} = \overline{f_V} = f_{\overline{V}} \end{aligned}$$

odkiaľ už vyplýva tvrdenie vety. $\square$

Dohoda. Dohodneme sa na ďalších zjednodušeníach pri zápise B-výrazov.

1. Nebudeme rozlišovať medzi B-výrazmi $U + V$, $V + U$ a tiež medzi UV , VU .
2. B-výrazy $(U + V) + W$, $U + (V + W)$ budeme považovať za rovnaké a miesto nich budeme písať $U + V + W$. Podobne namiesto $(UV)W$ či $U(VW)$ budeme písať UVW .
3. Za rovnaké budeme považovať aj B-výrazy $1 \cdot U$, $0 + U$, U , tiež $1 + U$, 1 a tiež $0 \cdot U$, 0 .

Príklad 2.6. Napíšte B-výraz $xyz u + xyz \overline{u} + x \overline{y} z u$ pomocou najviac 5 výskytov písmen x, y, z, u .

RIEŠENIE.

$$\begin{aligned} xyz u + xyz \overline{u} + x \overline{y} z u &\stackrel{E5}{\cong} xyz u + xyz u + xyz \overline{u} + x \overline{y} z u \stackrel{E1}{\cong} xyz u + xyz \overline{u} + xyz u + x \overline{y} z u \stackrel{E3, E1}{\cong} \\ &\cong xyz(u + \overline{u}) + xzu(y + \overline{y}) \stackrel{E6}{\cong} xyz + xzu \stackrel{E3, E1}{\cong} xz(y + u). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Definícia 2.6. Nech $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$. Prvok $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{B}^n$ sa nazýva

jednotkový bod funkcie f , ak $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$,

nulový bod funkcie f , ak $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Množinu všetkých jednotkových resp. nulových bodov funkcie f budeme označovať $J(f)$ resp. $N(f)$. Tieto pojmy budeme vzťahovať aj na B-výrazy, ktorými je funkcia f určená.

Veta 2.6. Nech f, g sú booleovské funkcie n premenných. Potom

- | | |
|--|--------------------------------------|
| (1) $f = g \Leftrightarrow J(f) = J(g),$ | $f = g \Leftrightarrow N(f) = N(g),$ |
| (2) $J(f + g) = J(f) \cup J(g),$ | $N(f + g) = N(f) \cap N(g),$ |
| (3) $J(f \cdot g) = J(f) \cap J(g),$ | $N(f \cdot g) = N(f) \cup N(g),$ |
| (4) $J(\bar{f}) = N(f),$ | $N(\bar{f}) = J(f).$ |

DÔKAZ.

(1) Tvrdenie vyplýva z toho, že každý bod definičného oboru booleovskej funkcie je buď jednotkový alebo nulový.

(2) Z vlastnosti

$$f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 1 \vee g(x_1, \dots, x_n) = 1$$

vyplýva $J(f + g) = J(f) \cup J(g).$

(3) Z vlastnosti

$$f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 1 \wedge g(x_1, \dots, x_n) = 1$$

vyplýva $J(f \cdot g) = J(f) \cap J(g).$

(4) Z vlastnosti

$$\overline{f(x_1, \dots, x_n)} = 1 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

vyplýva $J(\bar{f}) = N(f).$

Tvrdenia o nulových bodoch sa dokazujú analogicky. □

Príklad 2.7. Určte množinu všetkých jednotkových bodov funkcie

$$f(x, y, z, u) = xy + \bar{x}\bar{z}u + yz\bar{u}.$$

RIEŠENIE. Funkcia f je súčtom troch funkcií

$$f_1(x, y, z, u) = xy, \quad f_2(x, y, z, u) = \bar{x}\bar{z}u, \quad f_3(x, y, z, u) = yz\bar{u},$$

preto $J(f) = J(f_1) \cup J(f_2) \cup J(f_3).$ Z vlastnosti: súčin prvkov z $\mathbf{B}$ sa rovná 1 práve vtedy, keď každý prvok sa rovná 1, vyplýva

$$\begin{aligned} J(f_1) &= \{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}, \\ J(f_2) &= \{(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}, \\ J(f_3) &= \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

Potom

$$J(f) = \{(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}.$$

■

1.1. Úplná normálna disjunktívna a konjunktívna forma.

Definícia 2.7. *Elementárnym súčinovým členom (elementárnym súčinom)*

n premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazývame B-výraz

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 y_2 \dots y_n,$$

kde $y_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$, pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}.$

Príklad 2.8. Elementárne súčinové členy 2 premenných sú 4. Sú to: $xy, \bar{x}y, x\bar{y}, \bar{x}\bar{y}.$ Elementárnym súčinovým členom nie je $\bar{x}\bar{y}.$ Elementárných súčinových členov 3 premenných je 8. Sú to: $xyz, \bar{x}yz, x\bar{y}z, xy\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}y\bar{z}, x\bar{y}\bar{z}, \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$ ■

Veta 2.7. Jednotkové body každých dvoch rôznych elementárnych súčinových členov sú rôzne.

DÔKAZ. Nech

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, \dots, x_n) &= u_1 u_2 \dots u_n, & u_i &\in \{x_i, \bar{x}_i\}, \\ V(x_1, x_2, \dots, x_n) &= v_1 v_2 \dots v_n, & v_i &\in \{x_i, \bar{x}_i\} \end{aligned}$$

sú rôzne elementárne súčinové členy. Keďže sú rôzne, tak pre niektoré $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $u_k = x_k$, $v_k = \bar{x}_k$ alebo $u_k = \bar{x}_k$, $v_k = x_k$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že nastal prvý prípad. Potom pre k -tú zložku β_k, γ_k jednotkových bodov členov v poradí U, V platí $\beta_k = 1, \gamma_k = 0$. To však znamená, že tieto jednotkové body sú rôzne. $\square$

Je zrejmé, že počet rôznych elementárnych súčinových členov s n premennými je 2^n . Každý elementárny súčinový člen má práve jeden jednotkový bod, ktorý ho teda jednoznačne charakterizuje.

Každých n -tici $(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$ môžeme jednoznačne priradiť nezáporné celé číslo $j = j_1 \cdot 2^{n-1} + j_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + j_{n-1} \cdot 2^1 + j_n \cdot 2^0$, $0 \leq j \leq 2^n - 1$. Ale aj naopak každému celému číslu j , $0 \leq j \leq 2^n - 1$ je jednoznačne priradená n -tica $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ taká, že $j = j_1 \cdot 2^{n-1} + j_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + j_{n-1} \cdot 2^1 + j_n \cdot 2^0$.

Definícia 2.8. Nech $(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbf{B}^n$ je jednotkový bod elementárneho súčinového člena a nech $j = j_1 \cdot 2^{n-1} + j_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + j_{n-1} \cdot 2^1 + j_n \cdot 2^0$. Potom tento súčinový člen budeme označovať $S_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alebo $S_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a nazývať ho **elementárny súčinový člen priradený k n -tici** $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Príklad 2.9. Ako označujeme elementárny súčinový člen $x\bar{y}z$? Ktoré elementárne súčinové členy majú označenie $S_6(x, y, z, u)$ a $S_{15}(x, y, z, u)$?

RIEŠENIE. Jednotkový bod elementárneho súčinového člena $x\bar{y}z$ je $(1, 0, 1)$. Potom $j = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0 = 5$, a teda $x\bar{y}z = S_{(1, 0, 1)}(x, y, z) = S_5(x, y, z)$.

$6 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2^0$, preto jednotkovým bodom elementárneho súčinového člena $S_6(x, y, z, u)$ je $(0, 1, 1, 0)$ a teda $S_6(x, y, z, u) = \bar{x}yz\bar{u}$.

$15 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0$, preto $(1, 1, 1, 1)$ je jednotkový bod člena $S_{15}(x, y, z, u)$, a teda $S_{15}(x, y, z, u) = xyzu$.

Definícia 2.9. Každý B-výraz

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_0 S_0(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + c_{2^n-1} S_{2^n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j S_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \text{kde } c_j \in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

nazývame **úplná normálna disjunktívna forma**, v skratke UNDF.

V zápise UNDF (na základe dohody o zjednodušení písania B-výrazov) budeme súčinové členy, pri ktorých je nulový koeficient, vynechávať a nebudeme písať koeficienty $c_k = 1$. Teda napríklad $1 \cdot xy + 0 \cdot \bar{x}y + 1 \cdot x\bar{y} + 0 \cdot \bar{x}\bar{y}$ budeme písať v tvare $xy + x\bar{y}$.

Príklad 2.10. UNDF dvoch premenných sú napr. xy , $xy + \bar{x}y$, $\bar{x}y + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$. UNDF troch premenných sú napr. $x\bar{y}z$, $xyz + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z$, $\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}, 0$. $\blacksquare$

Veta 2.8. Každé dve rôzne UNDF určujú dve rôzne booleovské funkcie.

DÔKAZ. Nech

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j S_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad c_j \in \mathbf{B},$$

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} d_j S_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad d_j \in \mathbf{B}$$

sú dve rôzne UNDF. Potom existuje $k \in \{0, 1, \dots, 2^n-1\}$, že $c_k \neq d_k$. Nech $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ je jednotkový bod elementárneho súčinového člena $S_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Potom pre funkcie určené B-výrazmi U, V platí

$$f_U(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j S_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = c_k S_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = c_k,$$

$$f_V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} d_j S_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d_k S_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d_k.$$

Keďže $c_k \neq d_k$, tak z toho vyplýva $f_U \neq f_V$. $\square$

Veta 2.9. Každá booleovská funkcia je určená B-výrazom.

DÔKAZ. Úplná normálna disjunktívna forma n premenných je súčtom 2^n elementárnych súčinových členov násobených konštantami, ktoré môžu mať hodnotu 0 alebo 1. Z toho vyplýva, že UNDF n premenných je 2^{2^n} . Presne toľko je aj booleovských funkcií n premenných. Preto každá booleovská funkcia je určená niektorou UNDF. $\square$

Definícia 2.10. Nech $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je UNDF a $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je B-výraz, taký že $W \cong U$. Potom U sa nazýva **úplná normálna disjunktívna forma B-výrazu W** , tiež **úplná normálna disjunktívna forma funkcie f_W** a píšeme

$$\text{UNDF}(W) = U, \quad \text{UNDF}(f_W) = U.$$

Veta 2.10. Nech $g : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ je booleovská funkcia n premenných. Potom

$$\begin{aligned} \text{UNDF}(g) &= \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n} g(a_1, a_2, \dots, a_n) S_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ak } g \text{ nemá jednotkový bod} \\ \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in J(g)} S_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{ak } g \text{ má jednotkový bod} \end{cases} \end{aligned}$$

DÔKAZ. Stačí ukázať, že hodnota funkcie určenej uvedeným B-výrazom v ľubovoľnom bode $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ sa rovná $g(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Ak si uvedomíme, že pre elementárne súčinové členy platí

$$S_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(b_1, b_2, \dots, b_n) = 1 \Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

tak

$$\begin{aligned} &\sum_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n} g(a_1, \dots, a_n) S_{(a_1, \dots, a_n)}(b_1, \dots, b_n) = \\ &= g(b_1, \dots, b_n) S_{(b_1, \dots, b_n)}(b_1, \dots, b_n) + \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n \\ (a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_n)}} g(a_1, \dots, a_n) S_{(a_1, \dots, a_n)}(b_1, \dots, b_n) = \\ &= g(b_1, \dots, b_n) \cdot 1 + \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n \\ (a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_n)}} g(a_1, \dots, a_n) \cdot 0 = g(b_1, \dots, b_n). \end{aligned} \quad \square$$

Príklad 2.11. Nájdite úplnú normálnu disjunktívnu formu B-výrazu

$$W(x, y, z) = \overline{xy} + \overline{z} + \overline{xy}z.$$

RIEŠENIE. Keďže $\text{UNDF}(W) = \text{UNDF}(f_W)$, zostavíme tabuľku funkcie f_W , ktorá je určená B-výrazom W a ku každému jednotkovému bodu funkcie f_W napíšeme k nemu priradený elementárny súčinový člen.

x	y	z	$f_W(x, y, z)$	S_j
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\overline{x}\overline{y}z$
0	1	0	1	$\overline{x}y\overline{z}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$x\overline{y}z$
1	1	0	0	
1	1	1	1	xyz

Hľadaná UNDF je súčtom týchto elementárnych súčinových členov:

$$\text{UNDF}(W) = \text{UNDF}(f_W) = \overline{x}\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}z + xyz.$$

■

Uvedieme ešte algoritmus, ktorým nájdeme UNDF B-výrazu $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bez toho, aby sme konštruovali tabuľku funkcie f_W . Použijeme pritom ekvivalencie z vety 2.4.

1. Pomocou de Morganových zákonov zostrojíme k B-výrazu $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ekvivalentný B-výraz $W_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, v ktorom nie je znak negácie (pruh) nad znakom operácií $+$ a $\cdot$.

2. Pomocou distributívnych zákonov odstránime v B-výraze $W_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zátvorky. Dostaneme B-výraz $W_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ekvivalentný s $W_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pričom $W_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bude v tvare „súčtu súčinov“.

3. Pomocou zákonov involúcie, komutatívnosti, asociatívnosti, idempotentnosti, komplementárnosti, identity, nulového násobenia a jednotkového sčítovania každý sčítanec upravíme na tvar $y_1, y_2, \dots, y_n$, kde $y_i \in \{x_i, \overline{x}_i, 1\}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Pri úpravách môžeme, ale nemusíme používať zákony absorpcie. Získame tak B-výraz $W_3(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong W_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

4. V každom sčítanci B-výrazu $W_3(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nahradíme $y_i = 1$ ekvivalentným B-výrazom $x_i + \overline{x}_i$. Dostaneme B-výraz $W_4(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong W_3(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

5. Pomocou distributívneho zákona odstránime v B-výraze $W_4(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zátvorky. Dostaneme B-výraz $W_5(x_1, x_2, \dots, x_n)$, v ktorom každý sčítanec je elementárny súčinový člen.

6. Pomocou zákona idempotentnosti zlúčime rovnaké elementárne súčinové členy. Získaný B-výraz $W_6(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je už UNDF(W).

Príklad 2.12. Pomocou ekvivalentných úprav nájdite UNDF B-výrazu

$$W(x, y, z) = \overline{\overline{xy} + \overline{z}} + \overline{xy}z.$$

RIEŠENIE. $W(x, y, z) = \overline{\overline{xy} + \overline{z}} + \overline{xy}z \cong \overline{\overline{xy}}\overline{\overline{z}} + \overline{xy}z \cong (\overline{\overline{x}} + \overline{\overline{y}})\overline{\overline{z}} + \overline{xy}z = W_1(x, y, z)$
 $W_1(x, y, z) \cong \overline{\overline{x}}\overline{\overline{z}} + \overline{\overline{y}}\overline{\overline{z}} + \overline{xy}z = W_2(x, y, z)$

$$W_2(x, y, z) \cong xz + \bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} \cong x \cdot 1 \cdot z + 1 \cdot \bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} = W_3(x, y, z)$$

$$W_3(x, y, z) \cong x(y + \bar{y})z + (x + \bar{x})\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} = W_4(x, y, z)$$

$$W_4(x, y, z) \cong xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} = W_5(x, y, z)$$

$$W_5(x, y, z) \cong xyz + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} = \text{UNDF}(W) \quad \blacksquare$$

Duálnymi pojmami k pojmom elementárny súčinový člen a úplná normálna disjunktívna forma sú elementárny súčtový člen a úplná normálna konjunktívna forma. Stručne uvedieme ich definície a vlastnosti.

Definícia 2.11. *Elementárnym súčtovým členom (elementárnym súčtom)* n premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$, nazývame B-výraz

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 + y_2 + \dots + y_n,$$

kde $y_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$, pre $i \in \{1, \dots, n\}$.

Príklad 2.13. Elementárne súčtové členy 2 premenných sú 4. Sú to: $x + y$, $\bar{x} + y$, $x + \bar{y}$, $\bar{x} + \bar{y}$. Elementárne súčtové členy troch premenných sú $x + y + z$, $\bar{x} + y + z$, $x + \bar{y} + z$, $x + y + \bar{z}$, $\bar{x} + \bar{y} + z$, $\bar{x} + y + \bar{z}$, $x + \bar{y} + \bar{z}$, $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$. $\blacksquare$

Počet elementárnych súčtových členov n premenných je 2^n .

Definícia 2.12. Nech $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ je nulový bod elementárneho súčtového člena a nech $\nu = \nu_1 \cdot 2^{n-1} + \nu_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + \nu_n \cdot 2^0$. Potom tento súčtový člen budeme označovať $T_{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alebo $T_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a nazývať ho *elementárny súčtový člen priradený k n -tici* $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$.

Definícia 2.13. Každý B-výraz

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (c_0 + T_0(x_1, x_2, \dots, x_n)) \dots (c_{2^n-1} + T_{2^n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \\ &= \prod_{\nu=0}^{2^n-1} (c_\nu + T_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n)), \quad \text{kde } c_\nu \in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

nazývame *úplnou normálnou konjunktívnou formou*, v skratke UNKF.

Nech $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je B-výraz, taký že $W \cong V$. Potom V sa nazýva *úplná normálna konjunktívna forma B-výrazu* W , tiež *úplná normálna konjunktívna forma funkcie* f_W a píšeme

$$\text{UNKF}(W) = V, \quad \text{UNKF}(f_W) = V.$$

Príklad 2.14. UNKF dvoch premenných sú napr.

$$x + y, (x + y)(\bar{x} + y)(\bar{x} + \bar{y}), (x + y)(x + \bar{y}), 1.$$

UNKF troch premenných sú napr.

$$(x + y + z)(x + \bar{y} + z), (\bar{x} + y + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(x + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + \bar{z}). \quad \blacksquare$$

Veta 2.11. Nech $g : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ je booleovská funkcia n premenných. Potom

$$\begin{aligned} \text{UNKF}(g) &= \prod_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n} (g(a_1, a_2, \dots, a_n) + T_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{ak } g \text{ nemá nulový bod} \\ \prod_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in N(g)} T_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{ak } g \text{ má nulový bod} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Príklad 2.15. Nájdite UNKF funkcie $g(x, y, z) = \overline{\overline{xy} + \overline{z}} + \overline{xy}z$.

RIEŠENIE. Zostavíme tabuľku hodnôt funkcie g . Do ďalšieho stĺpca tabuľky zapíšeme priradené elementárne súčtové členy k nulovým bodom funkcie.

x	y	z	$g(x, y, z)$	T_ν
0	0	0	0	$x + y + z$
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	0	$x + \overline{y} + \overline{z}$
1	0	0	0	$\overline{x} + y + z$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\overline{x} + \overline{y} + z$
1	1	1	1	

UNKF funkcie g je súčinom týchto členov:

$$\text{UNKF}(g) = (x + y + z)(x + \overline{y} + \overline{z})(\overline{x} + y + z)(\overline{x} + \overline{y} + z).$$

Uvedieme ešte druhý spôsob – ekvivalentné úpravy B-výrazu, ktorým je funkcia g určená. Algoritmus je podobný ako pre UNDF, akurát používame duálne postupy:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{xy} + \overline{z}} + \overline{xy}z &\cong \overline{\overline{xy} \overline{z}} + \overline{xy}z \cong (\overline{\overline{x} + \overline{y}}) \overline{\overline{z}} + \overline{xy}z \cong (x + \overline{y}) \overline{z} + \overline{xy}z \cong \\ &\cong ((x + \overline{y})z + \overline{x})((x + \overline{y})z + y)((x + \overline{y})z + \overline{z}) \cong \\ &\cong (x + \overline{y} + \overline{x})(z + \overline{x})(x + \overline{y} + y)(z + y)(x + \overline{y} + \overline{z})(z + \overline{z}) \cong 1 \cdot (\overline{x} + z) \cdot 1 \cdot (y + z)(x + \overline{y} + \overline{z}) \cong \\ &\cong (\overline{x} + z)(y + z)(x + \overline{y} + \overline{z}) \cong (\overline{x} + 0 + z)(0 + y + z)(x + \overline{y} + \overline{z}) \cong \\ &\cong (\overline{x} + y\overline{y} + z)(x\overline{x} + y + z)(x + \overline{y} + \overline{z}) \cong \\ &\cong (\overline{x} + y + z)(\overline{x} + \overline{y} + z)(x + y + z)(\overline{x} + y + z)(x + \overline{y} + \overline{z}) \cong \\ &\cong (\overline{x} + y + z)(\overline{x} + \overline{y} + z)(x + y + z)(x + \overline{y} + \overline{z}) = \text{UNKF}(g) \end{aligned}$$

1.2. Normálna disjunktívna a konjunktívna forma.

V tejto časti sa budeme zaoberať zovšeobecnením elementárnych súčinových (súčtových) členov a úplnej normálnej disjunktívnej (konjunktívnej) formy. Elementárny súčinový člen sme definovali ako B-výraz

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 y_2 \dots y_n, \text{ kde } y_i \in \{x_i, \overline{x}_i\}.$$

Nás budú teraz zaujímať podobné B-výrazy, len v nich niektoré y_i môžeme nahradiť aj hodnotou 1 (túto jednotku na základe zákona o jednotkovom násobení spravidla do výrazu nebudeme písať; takýto výraz vznikne z elementárneho súčinového člena vynechaním niektorých premenných).

Definícia 2.14. Súčinovým členom n premenných $x_1, \dots, x_n$ nazývame B-výraz $S(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 y_2 \dots y_n$, kde $y_i \in \{x_i, \overline{x}_i, 1\}$ (ak $y_i = 1$ môžeme túto jednotku v zápise súčinového člena vynechať).

Príklad 2.16. Súčinových členov 2 premenných x, y je 9. Sú to tieto súčinové členy: $1, x, \overline{x}, y, \overline{y}, xy, \overline{x}y, x\overline{y}, \overline{x}\overline{y}$. ■

Je zrejmé, že počet rôznych súčinových členov n premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$ je práve 3^n . Môžeme ich teda očíslovať číslami od 1 po 3^n . Predpokladajme, že sme jedno pevné očíslovanie $S_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, S_{3^n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ už zvolili.

Definícia 2.15. Každý B-výraz

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{3^n} c_k S_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ kde } c_k \in \mathbf{B},$$

nazývame **normálna disjunktívna forma**, v skratke NDF.

Ak $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je B-výraz a $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je NDF, ktorá je ekvivalentná s $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, budeme hovoriť, že $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **normálna disjunktívna forma B-výrazu** $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a pisať $\text{NDF}(V) = U$.

Ak booleovská funkcia $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ je určená normálnou disjunktívnou formou $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tak $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ budeme nazývať **normálna disjunktívna forma booleovskej funkcie** $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ a budeme pisať $\text{NDF}(f) = U$.

V zápise normálnej disjunktívnej formy budeme súčinové členy, pri ktorých stojí nulový koeficient, vynechávať a nebudeme pisať jednotkové koeficienty. Teda napríklad $0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot \bar{x} + 0 \cdot y + 0 \cdot \bar{y} + 1 \cdot xy + 0 \cdot \bar{x}y + 0 \cdot x\bar{y} + 0 \cdot \bar{x}\bar{y}$ budeme stručnejšie pisať v tvare $\bar{x} + xy$. Všeobecne, ak

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{3^n} c_k S_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

je NDF a m je počet tých koeficientov c_k , ktoré sa rovnajú 1, tak tie súčinové členy, pri ktorých stoja jednotkové koeficienty, teraz nanovo očísľujeme od 1 až po m a danú NDF budeme pisať v tvare

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m S_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pretože každý elementárny súčinový člen je aj súčinovým členom, je UNDF B-výrazu aj NDF tohto B-výrazu. Je preto pravdivé tvrdenie, že každú booleovskú funkciu môžeme určiť pomocou NDF. Táto reprezentácia, prirodzene, už nie je jednoznačná, lebo napríklad pre každé $(x, y) \in \mathbf{B}^2$ je $f(x, y) = \bar{x}y + x = y + x$.

Definícia 2.16. Súčtovým členom n premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazývame B-výraz $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, kde $y_i \in \{x_i, \bar{x}_i, 0\}$ pre $i \in \{1, \dots, n\}$.

Príklad 2.17. Súčtových členov 2 premenných x, y je 9. Sú to tieto súčtové členy: $0, x, \bar{x}, y, \bar{y}, x + y, \bar{x} + y, x + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}$. ■

Podobne, ako súčinových, tak aj súčtových členov n premenných je práve 3^n . Predpokladajme, že sme tieto súčtové členy pevne očíslovali:

$$T_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, T_{3^n}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Potom, podobne ako sme definovali NDF, môžeme definovať aj normálnu konjunktívnu formu.

Definícia 2.17. Každý B-výraz

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{3^n} (c_k + T_k(x_1, x_2, \dots, x_n)), \text{ kde } c_k \in \mathbf{B},$$

nazývame **normálna konjunktívna forma**, skrátene NKF.

Analogicky, ako pre NDF, sa definujú pojmy **normálna konjunktívna forma B-výrazu** a **normálna konjunktívna forma booleovskej funkcie**. Opäť platí, že každá booleovská funkcia sa dá určiť pomocou normálnej konjunktívnej formy.

Tak ako pre NDF aj pre NKF budeme používať skrátenejší zápis: Nech m je počet koeficientov c_k , ktoré sa rovnajú 0. Tie súčtové členy, pri ktorých sú tieto nulové koeficienty, nanovo očísľujeme od 1 až po m a danú NKF budeme písať v tvare

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^m T_k(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Príklad 2.18. Ukážte, že $U(x, y, z) = \bar{x}\bar{z} + xy + \bar{y}z$, $V(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} + y\bar{z} + xz$ sú NDF tej istej booleovskej funkcie.

RIEŠENIE. Stačí ukázať, že B-výrazy U a V sú ekvivalentné:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \bar{x}\bar{z} + xy + \bar{y}z \cong \bar{x}(y + \bar{y})\bar{z} + xy(z + \bar{z}) + (x + \bar{x})\bar{y}z \cong \\ &\stackrel{3.}{\cong} \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \stackrel{1.}{x}y\bar{z} + \stackrel{5.}{x}y\bar{z} + \stackrel{4.}{x}y\bar{z} + \stackrel{6.}{x}\bar{y}z + \stackrel{2.}{x}\bar{y}z \cong (\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z) + (\bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z}) + (xyz + x\bar{y}z) \cong \\ &\cong \bar{x}\bar{y}(\bar{z} + z) + (\bar{x} + x)y\bar{z} + x(y + \bar{y})z \cong \bar{x}\bar{y} + y\bar{z} + xz = V(x, y, z) \end{aligned}$$

■

1.3. Normálne disjunktívne a konjunktívne formy výrokových formúl.

Pravdivostné ohodnotenie každej formuly výrokového počtu je booleovská funkcia. Špeciálne vieme, že

$$\text{ph}_{p \vee q}(x, y) = x + y, \quad \text{ph}_{p \wedge q}(x, y) = xy, \quad \text{ph}_{\bar{p}}(x) = \bar{x}.$$

Keďže množina $\{\vee, \wedge, \bar{}\}$ je úplným systémom logických spojok, môžeme ľubovoľnú výrokovú formulu n premenných $p_1, p_2, \dots, p_n$ vyjadriť len pomocou týchto logických spojok. Ak v tejto formule prepíšeme $\vee$ na $+$, $\wedge$ na $\cdot$ a p_i na x_i pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, zrejme dostaneme B-výraz, ktorý reprezentuje pravdivostné ohodnotenie tejto formuly. Z druhej strany, každú booleovskú funkciu $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je možné reprezentovať B-výrazom, ktorý neobsahuje 0 a 1. Ak v tomto B-výraze prepíšeme $+$ na $\vee$, $\cdot$ na $\wedge$ a x_i na p_i pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, dostaneme výrokovú formulu, ktorej pravdivostným ohodnotením je funkcia f . Z týchto úvah tiež vyplýva:

Veta 2.12. Každá booleovská funkcia je pravdivostným ohodnotením niektorej výrokovej formuly. □

Príklad 2.19. Určte pravdivostné ohodnotenie formuly $a(p, q, r) = ((p \Rightarrow r) \wedge q) \Rightarrow r$ pomocou B-výrazu.

RIEŠENIE. Najprv nájdeme k formule $a(p, q, r)$ ekvivalentnú formulu, ktorá z logických spojok obsahuje len $\vee, \wedge, \bar{}$.

$$a(p, q, r) \sim ((\bar{p} \vee r) \wedge q) \Rightarrow r \sim \overline{((\bar{p} \vee r) \wedge q)} \vee r$$

Teraz môžeme pravdivostné ohodnotenie formuly a vyjadriť takto (výrokové premenné p, q, r nahradíme v uvedenom poradí premennými x, y, z):

$$\text{ph}_{a(p,q,r)}(x, y, z) = \overline{((\bar{x} + z)y)} + z = x\bar{z} + \bar{y} + z$$

■

Príklad 2.20. Napíšte formulu $a(p, q, r, s)$, ktorej pravdivostné ohodnotenie je reprezentované B-výrazom $U(x, y, z, u) = 1 \cdot x\bar{y}u + 0 \cdot yzu + 1 \cdot xy\bar{z}u$.

RIEŠENIE. Keďže $U(x, y, z, u) \cong (x\bar{y}u) + (xy\bar{z}u)$, hľadaná formula je

$$a(p, q, r, s) = (p \wedge \bar{q} \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r} \wedge s)$$

a tiež ktorákoľvek s ňou ekvivalentná formula. ■

Normálna disjunktívna a konjunktívna forma výrokových formúl je analógiou k pojmu normálna disjunktívna a konjunktívna forma B-výrazov. Vzhľadom na vyššie spomenutú príbuznosť B-výrazov a výrokových formúl môžeme normálnu disjunktívnu a konjunktívnu formu výrokových formúl definovať pomocou B-výrazov.

Najprv sa dohodnime na nasledujúcom označení. Nech $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je B-výraz, v ktorom sa nevyskytujú znaky 0, 1. Výrokovú formulu, ktorú z neho dostaneme prepisom znaku $+$ na $\vee$, znaku $\cdot$ na $\wedge$ a zámenou booleovských premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$ na výrokové premenné $p_1, p_2, \dots, p_n$, budeme označovať $a_U(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Definícia 2.18. Nech B-výraz $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je NDF (resp. NKF), pričom sa v nej nevyskytujú znaky 0 a 1. Potom výrokovú formulu $a_U(p_1, p_2, \dots, p_n)$ nazývame **normálna disjunktívna** (resp. **konjunktívna**) **forma** každej výrokovej formuly b ekvivalentnej s formulou $a_U(p_1, p_2, \dots, p_n)$ a označujeme ju $\text{NDF}(b)$ (resp. $\text{NKF}(b)$).

Definícia 2.19. Nech $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je elementárny súčet a $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je elementárny súčin premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$. Potom formulu $a_U(p_1, p_2, \dots, p_n)$ nazývame **elementárnou disjunkciou** premenných $p_1, p_2, \dots, p_n$ a formulu $a_V(p_1, p_2, \dots, p_n)$ **elementárnou konjunkciou** premenných $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Nech B-výraz W je UNKF, $W \neq 1$. Potom formulu a_W nazývame **úplnou normálnou konjunktívnou formou formuly** b tautologicky ekvivalentnej s formulou a_W a označujeme ju $\text{UNKF}(b)$.

Nech B-výraz W je UNDF, $W \neq 0$. Potom formulu a_W nazývame **úplnou normálnou disjunktívnou formou formuly** b tautologicky ekvivalentnej s formulou a_W a označujeme ju $\text{UNDF}(b)$.

Príklad 2.21. Nájdite UNKF a UNDF formuly $p \Leftrightarrow q$.

RIEŠENIE. Urobíme pravdivostnú tabuľku danej formuly (tab. 5). Pomocou nej nájdeme UNKF a UNDF B-výrazu. K nim prepisom priradíme UNKF resp. UNDF formuly.

Môžeme postupovať aj tak, že priamo z tabuľky priradíme elementárnym súčtom elementárne disjunkcie, resp. elementárnym súčinom elementárne konjunkcie. Tie potom spojíme konjunkciou, resp. disjunkciou.

TABUĽKA 5. Pravdivostná tabuľka formuly $p \Leftrightarrow q$

$p \ q$	$p \Leftrightarrow q$		
0 0	1	$\bar{p} \wedge \bar{q} \quad (\bar{x} \bar{y})$	$p \vee \bar{q} \quad (x + \bar{y})$ $\bar{p} \vee q \quad (\bar{x} + y)$
0 1	0		
1 0	0		
1 1	1	$p \wedge q \quad (xy)$	

$$\text{UNDF}(p \Leftrightarrow q) = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q),$$

$$\text{UNKF}(p \Leftrightarrow q) = (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q).$$

■

Veta 2.13. Nech b je formula. Ak existuje $\text{UNDF}(b)$, tak $b \sim \text{UNDF}(b)$. Ak existuje $\text{UNKF}(b)$, tak $b \sim \text{UNKF}(b)$.

DÔKAZ. Formula b , aj $\text{UNDF}(b)$ a $\text{UNKF}(b)$, pokiaľ existujú, majú rovnaké pravdivostné ohodnotenie, teda sú tautologicky ekvivalentné.

Poznamenajme, že $\text{UNDF}(b)$ neexistuje práve vtedy, keď b je kontradikcia a $\text{UNKF}(b)$ neexistuje len vtedy, keď b je tautológia. $\square$

2. Úplný systém booleovských funkcií

Z časti o UNDF a UNKF vieme, že každá booleovská funkcia $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ sa dá vyjadriť pomocou logického súčtu $g_1 : B^2 \rightarrow B$, $g_1(x, y) = x + y$, logického súčinu $g_2 : B^2 \rightarrow B$, $g_2(x, y) = xy$ a negácie $g_3 : B \rightarrow B$, $g_3(x) = \bar{x}$. Presnejšie, funkcia f sa dá vyjadriť ako zložená funkcia z funkcií g_1, g_2, g_3 .

Príklad 2.22. Vyjadrite funkciu $f(x, y, z) = \overline{x + \bar{y} + yz}$ ako zloženú funkciu z logického súčtu $g_1(x, y)$, logického súčinu $g_2(x, y)$ a negácie $g_3(x)$.

RIEŠENIE. $f(x, y, z) = \overline{(x + \bar{y}) + (yz)} = \overline{g_1(x, \bar{y}) + g_2(y, z)} = \overline{g_1(g_1(x, g_3(y)), g_2(y, z))} = g_3(g_1(g_1(x, g_3(y)), g_2(y, z)))$ $\blacksquare$

Predošlé úvahy nás vedú k nasledujúcej definícii.

Definícia 2.20. Množina $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ booleovských funkcií sa nazýva **úplný systém booleovských funkcií** (stručne USBF), ak každá booleovská funkcia f sa dá vyjadriť ako zložená funkcia z funkcií $f_1, f_2, \dots, f_k$.

Veta 2.14. Nech $\mathcal{Q}$ je USBF a $\mathcal{R}$ je ľubovoľná množina booleovských funkcií. Ak sa dá každá funkcia $f \in \mathcal{Q}$ vyjadriť ako zložená funkcia z funkcií množiny $\mathcal{R}$, potom aj množina $\mathcal{R}$ je USBF.

DÔKAZ. Ľubovoľnú booleovskú funkciu vieme napísať ako zloženú funkciu z funkcií množiny $\mathcal{Q}$, lebo táto množina je USBF. Ak sem za funkcie množiny $\mathcal{Q}$ dosadíme ich vyjadrenia pomocou funkcií množiny $\mathcal{R}$, dostaneme funkciu f zapísanú ako zloženú funkciu len z funkcií množiny $\mathcal{R}$. $\square$

Príklad 2.23. Dokážte, že množina $\mathcal{P}_2 = \{h_1\}$, kde $h_1 : \mathbf{B}^2 \rightarrow \mathbf{B}$, $h_1(x, y) = \overline{x + y}$ je USBF.

RIEŠENIE. Podľa predchádzajúcej vety stačí dokázať, že logický súčet, súčin a negácia sa dajú vyjadriť len pomocou funkcie h_1 .

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \overline{x + x} = h_1(x, x), \\ x + y &= \overline{\overline{x + y}} = \overline{\overline{x + y} + \overline{x + y}} = h_1(h_1(x, y), h_1(x, y)), \\ xy &= \overline{\overline{xy}} = \overline{\overline{x + y} + \overline{x + y}} = h_1(h_1(x, x), h_1(y, y)).\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Definícia 2.21. Booleovskú funkciu $h_1(x, y) = \overline{x + y}$ nazývame **Pierceovou funkciou**, a označujeme $h_1(x, y) = (x \downarrow y)$. Booleovskú funkciu $h_2(x, y) = \overline{xy}$ nazývame **Shefferovou funkciou**, a označujeme $h_2(x, y) = (x \uparrow y)$.

Ak použijeme označenia $\downarrow$, $\uparrow$ binárnych operácií definovaných Pierceovou a Shefferovou funkciou, tak

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x \downarrow x), \\ x + y &= ((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)), \\ xy &= ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)). \\ \bar{x} &= \overline{\bar{x}} = (x \uparrow x), \\ x + y &= \overline{\overline{x + y}} = \overline{\bar{x} \bar{y}} = \overline{\bar{x} \bar{y} \bar{y}} = ((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)), \\ xy &= \overline{\bar{x} \bar{y}} = \overline{\bar{x} \bar{y} \bar{y}} = ((x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)).\end{aligned}$$

Vidíme, že aj množina $\mathcal{S}_2 = \{h_2\}$ je USBF.

Každá booleovská funkcia $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ je n -árnou operáciou na množine $\mathbf{B}$. Pre zjednodušenie zápisu tejto operácie a zlepšenie jeho prehľadnosti používame namiesto $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ iné, vhodnejšie označenie. Napríklad pre binárnu operáciu určenú Shefferovou funkciou používame znak $\uparrow$ a namiesto $h_2(x, y)$ píšeme $(x \uparrow y)$. Vo všeobecnosti budeme prvok $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ktorý je zapísaný pomocou znaku príslušnej operácie, označovať $(x_1, x_2, \dots, x_n)_{\omega_f}$.

Nech $\mathcal{Q}$ je množina (navzájom rôznych) booleovských funkcií. Analogicky ako sme definovali B-výrazy budeme definovať $\mathcal{Q}$ -výrazy.

Definícia 2.22. Nech $\mathcal{Q}$ je množina booleovských funkcií. Potom $\mathcal{Q}$ -výraz n **pre-menných** $x_1, x_2, \dots, x_n$ definujeme takto:

1. $x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 1$ sú $\mathcal{Q}$ -výrazy n premenných.
2. Ak $U_1, U_2, \dots, U_k$ sú $\mathcal{Q}$ -výrazy n premenných a $(f : \mathbf{B}^k \rightarrow \mathbf{B}) \in \mathcal{Q}$, potom aj $(U_1, U_2, \dots, U_k)_{\omega_f}$ je $\mathcal{Q}$ -výraz n premenných.
3. Každý $\mathcal{Q}$ -výraz n premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$ vznikne pomocou bodov 1 a 2.

Poznámka 2.6. Ak $\mathcal{Q}$ je USBF, tak každá booleovská funkcia sa dá vyjadriť pomocou $\mathcal{Q}$ -výrazu.

Príklad 2.24. Nájdite $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{S}_2$ -výrazy, ktoré reprezentujú funkciu $f(x, y, z) = \overline{x + yz} + z$.

RIEŠENIE.

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= \overline{\overline{x + yz} + z} = \overline{\overline{x + yz}} \downarrow \overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + yz}} \downarrow \overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + yz}} \downarrow \overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + yz}} \downarrow \overline{\overline{z}} = \\ &= \overline{((x \downarrow (\overline{y \downarrow \overline{z}})) \downarrow z)} = \overline{(((x \downarrow (\overline{y \downarrow \overline{z}})) \downarrow z) \downarrow ((x \downarrow (\overline{y \downarrow \overline{z}})) \downarrow z))} = \\ &= \overline{(((x \downarrow ((y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z))) \downarrow z) \downarrow ((x \downarrow ((y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z))) \downarrow z))}, \\ f(x, y, z) &= \overline{\overline{x} \overline{yz} + z} = \overline{\overline{\overline{x} \overline{yz}} + z} = \overline{\overline{\overline{x} \overline{yz}} \downarrow \overline{\overline{z}}} = \overline{\overline{(x \uparrow x)(y \uparrow z)(z \uparrow z)}} = \\ &= \overline{((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow z))(z \uparrow z)} = \overline{((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow z)) \uparrow (z \uparrow z)}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Dohoda.

1. V $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{S}_2$ -výrazoch budeme výrazy $(U \downarrow U)$, $(U \uparrow U)$ skracovať na $(U \downarrow)$, $(U \uparrow)$.
2. V samostatne stojacích $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{S}_2$ -výrazoch budeme vynechávať vonkajšie zátvorky.

Na základe tejto dohody, môžeme $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{S}_2$ -výrazy určujúce funkciu f z predchádzajúceho príkladu napísať takto:

$$((x \downarrow ((y \downarrow) \downarrow (z \downarrow))) \downarrow z) \downarrow, \quad ((x \uparrow) \uparrow (y \uparrow z)) \uparrow (z \uparrow).$$

Definícia 2.23. *Pierceovou funkciou n premenných*, $n \geq 2$, nazývame booleovskú funkciu

$$h_1^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

a budeme používať označenie $(x_1 \downarrow x_2 \downarrow \dots \downarrow x_n)$.

Shefferovou funkciou n premenných, $n \geq 2$, nazývame booleovskú funkciu

$$h_2^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1 x_2 \dots x_n}$$

a budeme používať označenie $(x_1 \uparrow x_2 \uparrow \dots \uparrow x_n)$.

Veta 2.15. Každá z množín $\mathcal{P}_n = \{h_1^{(n)}\}$, $\mathcal{S}_n = \{h_2^{(n)}\}$ pre $n \geq 2$ je USBF.

DÔKAZ. Stačí ukázať, že Pierceova funkcia $h_1(x, y) = x \downarrow y$ sa dá vyjadriť pomocou funkcie $h_1^{(n)}$ a Shefferova funkcia $h_2(x, y) = x \uparrow y$ zase pomocou funkcie $h_2^{(n)}$.

$$h_1(x, y) = \overline{x + y} = \overline{x + y + 0 + \dots + 0} = (x \downarrow y \downarrow 0 \downarrow \dots \downarrow 0)$$

$$h_2(x, y) = \overline{xy} = \overline{xy \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = (x \uparrow y \uparrow 1 \uparrow \dots \uparrow 1)$$

□

Poznámka 2.7. Pierceovu a Shefferovu funkciu n premenných sme mohli definovať vďaka tomu, že binárne operácie $+$ a $\cdot$ sú asociatívne. Keby sme uvažovali o ternárnych operáciách definovaných funkciami $f_1 : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}$, $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + (x_2 + x_3)$ a $f_2 : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$, zistili by sme, že sú rovnaké ako operácia, ktorej hodnoty označujeme $x_1 + x_2 + x_3$. To pravdaže neplatí v prípade Pierceovej funkcie. Uvažujme o funkcii $h_1^{(3)} : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}$, $h_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3) = \overline{x_1 + x_2 + x_3} = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$. Porovnajme túto funkciu s funkciou $g_1 : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}$, $g_1(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3) = \overline{x_1 + x_2 + x_3} = \overline{x_1 + x_2} \overline{x_3} = \overline{(x_1 + x_2)} \overline{x_3}$ a s funkciou $g_2 : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}$, $g_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3)) = \overline{x_1 + (x_2 + x_3)} = \overline{x_1} \overline{x_2 + x_3} = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$. Teraz je už veľmi jednoduché sa presvedčiť, že tieto tri funkcie sú rôzne. To znamená, že binárna Pierceova operácia nie je asociatívna a ternárna Pierceova operácia nie je definovaná ani jednou z funkcií g_1 , g_2 . Rovnaká situácia nastáva aj pre Shefferove funkcie.

Príklad 2.25. Nájdite $\mathcal{S}_3$ -výraz, ktorý reprezentuje funkciu

$$f(x, y, z, u) = yz + \overline{x}yu + x\overline{y}zu.$$

RIEŠENIE.

$$\begin{aligned} f(x, y, z, u) &= yz + \overline{x}yu + x\overline{y}zu = \overline{\overline{yz} + \overline{\overline{x}yu} + \overline{\overline{x\overline{y}zu}}} = \overline{(yzz)(\overline{x}yu)(\overline{x\overline{y}zu})} = \\ &= \overline{(yzz)((xxx)yu)(xzu)\overline{y}} = \overline{(yzz)((xxx)yu)(xzu)yyy} = \\ &= \overline{(yzz)((xxx)yu)((xzu) \cdot 1 \cdot 1) \overline{yyy} \cdot 1} = \\ &= \overline{(y \uparrow z \uparrow z)((x \uparrow x \uparrow x) \uparrow y \uparrow u)((x \uparrow z \uparrow u) \uparrow 1 \uparrow 1)(y \uparrow y \uparrow y) \cdot 1)} = \\ &= \overline{(y \uparrow z \uparrow z)((x \uparrow x \uparrow x) \uparrow y \uparrow u)((x \uparrow z \uparrow u) \uparrow 1 \uparrow 1) \uparrow (y \uparrow y \uparrow y) \uparrow 1)} = \\ &= ((y \uparrow z \uparrow z) \uparrow ((x \uparrow x \uparrow x) \uparrow y \uparrow u) \uparrow ((x \uparrow z \uparrow u) \uparrow 1 \uparrow 1) \uparrow (y \uparrow y \uparrow y) \uparrow 1) \end{aligned}$$

■

Úplným systémom booleovských funkcií sú aj množiny $\mathcal{P} = \{h_1^{(2)}, h_1^{(3)}, \dots, h_1^{(n)}, \dots\}$ a $\mathcal{S} = \{h_2^{(2)}, h_2^{(3)}, \dots, h_2^{(n)}, \dots\}$. Preto každú booleovskú funkciu môžeme reprezentovať $\mathcal{P}$ -výrazmi aj $\mathcal{S}$ -výrazmi.

Príklad 2.26. Vyjadrite funkciu $f(x, y, z, u) = yz + \bar{x}yu + x\bar{y}zu$ pomocou $\mathcal{P}$ -výrazov aj $\mathcal{S}$ -výrazov.

RIEŠENIE.

$$\begin{aligned} f(x, y, z, u) &= yz + \bar{x}yu + x\bar{y}zu = \overline{\overline{yz}} + \overline{\overline{\bar{x}yu}} + \overline{\overline{x\bar{y}zu}} = \overline{\overline{y} + \overline{\bar{z}}} + \overline{\overline{x} + \overline{\bar{y}} + \overline{\bar{u}}} + \overline{\overline{x} + \overline{y} + \overline{\bar{z}} + \overline{\bar{u}}} = \\ &= \overline{\overline{\overline{\overline{y} + \bar{z}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{x} + \bar{y}} + \bar{u}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{x} + y + \bar{z}} + \bar{u}}}} = \overline{(\overline{\overline{y} + \bar{z}}) + (\overline{\overline{x} + \bar{y} + \bar{u}}) + (\overline{\overline{x} + y + \bar{z} + \bar{u}})} = \\ &= \overline{((\overline{\overline{y} + \bar{z}}) \downarrow (\overline{\overline{x} + \bar{y} + \bar{u}}) \downarrow (\overline{\overline{x} + y + \bar{z} + \bar{u}}))} = ((\overline{\overline{y} + \bar{z}}) \downarrow (\overline{\overline{x} + \bar{y} + \bar{u}}) \downarrow (\overline{\overline{x} + y + \bar{z} + \bar{u}})) \downarrow = \\ &= (((\overline{y} \downarrow \bar{z}) \downarrow (\overline{x} \downarrow \bar{y} \downarrow \bar{u}) \downarrow (\overline{x} \downarrow y \downarrow \bar{z} \downarrow \bar{u})) \downarrow = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z, u) &= yz + \bar{x}yu + x\bar{y}zu = \overline{\overline{yz} + \overline{\bar{x}yu} + \overline{\overline{x\bar{y}zu}}} = \overline{\overline{yz} \overline{\bar{x}yu} \overline{\overline{x\bar{y}zu}}} = \\ &= (\overline{y} \uparrow \bar{z})(\overline{\bar{x}} \uparrow y \uparrow u)(\overline{x} \uparrow \bar{y} \uparrow \bar{z} \uparrow \bar{u}) = ((\overline{y} \uparrow \bar{z}) \uparrow ((\overline{\bar{x}} \uparrow y \uparrow u) \uparrow (\overline{x} \uparrow \bar{y} \uparrow \bar{z} \uparrow \bar{u}))) \downarrow \end{aligned}$$

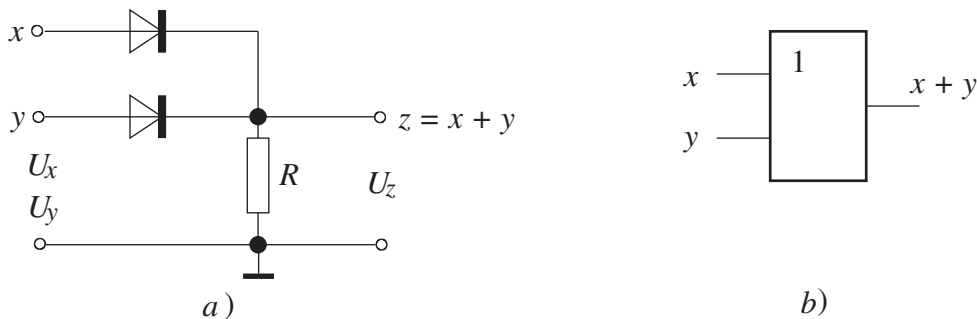
3. Kombinačné logické siete

Booleovské funkcie je možné realizovať (modelovať) pomocou rôznych technických prostriedkov, napr. mechanických, hydraulických, pneumatických alebo elektrických. Ich základom je realizácia tých booleovských funkcií, ktoré tvoria úplný systém. Obvykle sú to logický súčet, logický súčin a negácia (tvoria úplný systém booleovských funkcií). Fyzikálne systémy, ktoré realizujú tieto základné booleovské funkcie budeme nazývať (**základné**) **logické členy** alebo **hradlá**. Pri realizácii pomocou elektrických prostriedkov sa najčastejšie používajú tieto dva spôsoby:

1. Využíva sa prítomnosť elektrického prúdu (napätia) na priradenie hodnoty 1 a jeho neprítomnosť na priradenie hodnoty 0. (V tomto prípade ide o tzv. pozitívnu logiku. Je možné uvažovať aj o opačnom priradení, vtedy hovoríme o negatívnej logike. My budeme používať iba pozitívnu logiku.)

2. Využívajú sa technické zariadenia, ktoré sú schopné prevádzky pri dvoch (značne) odlišných hladinách elektrického napätia. Pre naše úvahy je výhodné jednu z nich označiť ako „vysokú“ hladinu napätia (v praxi spravidla 5 V) a priradiť jej hodnotu 1 a druhú označiť ako „nízku“ hladinu napätia (v praxi spravidla 0,5 V) a priradiť jej logickú hodnotu 0 (pozitívna logika).

V zariadeniach prvej skupiny základnou zložkou logických členov sú obvykle kontaktné relé. V zariadeniach druhej skupiny sa na konštrukciu logických členov používajú polovodičové diódy a tranzistory.



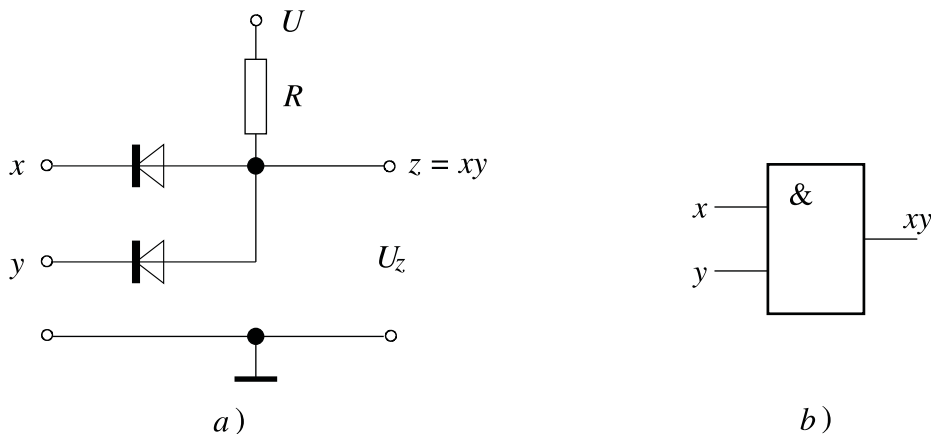
OBR. 1. Súčtový logický člen.

Každý logický člen je charakterizovaný vzťahom medzi jeho vstupnými a výstupnými logickými premennými. **Vstupné premenné** sú nezávislé a **výstupné premenné** sú závislé premenné tej booleovskej funkcie, ktorú daný logický člen realizuje. Každé vstupnej premennej x (výstupnej premennej z) je priradené napätie $U_x \in \{U_0, U_I\}$ ($U_z \in \{U_0, U_I\}$).

U_I nazývame **jednotkovou úroveňou**, U_0 **nulovou úroveňou** napätia (signálu). Napätie U_x nazývame **vstupným**, U_z **výstupným napätím** logického člena. Pripomeňme, že pre stručnosť vyjadrovania obvykle nerozlišujeme medzi x a U_x , resp. z a U_z .

Súčtový logický člen (člen OR) je realizáciou booleovskej funkcie $f(x, y) = x + y$. Jedna takáto realizácia je znázornená na obr. 1a. Ideálne berme do úvahy, že napr. $U_I = 5\text{ V}$, $U_0 = 0\text{ V}$. Ak potom pripojíme na ktorúkoľvek z diód jednotkovú úroveň napätia, dióda sa otvorí a $U_z = U_I$ (zmenšené o úbytok na dióde, čo zanedbávame). Diódy pripojené na úroveň U_0 sa uzatvoria. Ak sa zanedbajú úbytky napätí na diódach, pre výstupné napätie platí $U_z = \max\{U_x, U_y\}$, čo skutočne zodpovedá funkčným hodnotám logického súčtu. Pre súčtový logický člen budeme používať symbolickú značku uvedenú na obr. 1b.

Súčinový logický člen (člen AND) realizuje booleovskú funkciu $f(x, y) = xy$. Na obr. 2a je jeho diódová realizácia. Nech je $U > U_I$. Ak je na ktorúkoľvek diódu pripojené vstupné napätie U_0 , dióda je otvorená, a ak zanedbáme jej vnútorný odpor v priamom smere, úroveň U_0 (zväčšená o úbytok na dióde, ktorý môžeme zanedbať) je aj na výstupe člena. Úroveň napätia U_I sa objaví na výstupe člena práve vtedy, keď sú obidve diódy

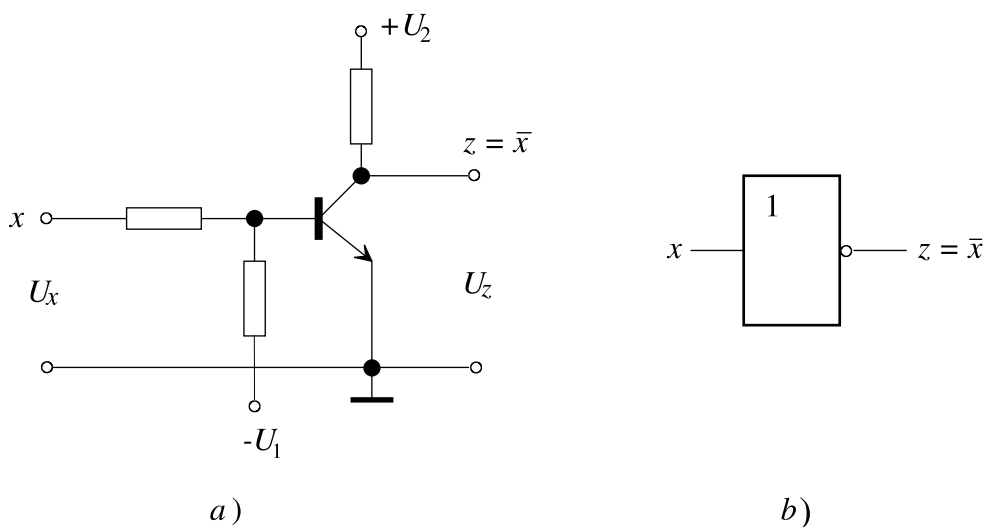


OBR. 2. Súčinový logický člen.

uzavreté, t.j. keď je na ne pripojené vstupné napätie U_I . Ak zanedbáme úbytky napätia na diódach, tak pre výstupné napätie platí $U_z = \min\{U_x, U_y\}$. Obvod teda skutočne realizuje logický súčin. Symbolická značka súčinového logického člena je na obr. 2b.

Logický člen negátor (invertor) (člen NOT) realizuje funkciu $f(x) = \bar{x}$. Na obr. 3a je príklad jednoduchého tranzistorového negátora, kde tranzistor pracuje ako bezkontaktný spínač. Pri $U_x = U_I$ je tranzistor otvorený a ak zanedbáme jeho odpor v priamom smere, $U_z = U_0$. Naopak pri $U_x = U_0$ je tranzistor zatvorený, takže $U_z = U_I$. Schematická značka negátora je na obr. 3b.

Fyzikálnu realizáciu ľubovoľnej booleovskej funkcie nazývame **kombinačný logický obvod**. Nás teraz nebude zaujímať skutočná fyzikálna realizácia booleovskej funkcie ale iba jej schéma (kombinačná logická sieť), ktorá opisuje, ako sa kombinačný logický obvod zostaví zo základných logických členov. Takéto schémy sme už definovali pre logické členy, sú to ich schematické značky. Všimnime si, že ich môžeme považovať za orientované grafy, ktoré v prípade súčtového a súčinového logického člena majú dva vstupné vrcholy x , y a jeden výstupný vrchol a v prípade negátora jeden vstupný vrchol x a jeden výstupný vrchol $z = x + y$, resp. $z = xy$. Takúto kombinačnú logickú sieť môžeme priradiť ku každému B-výrazu.



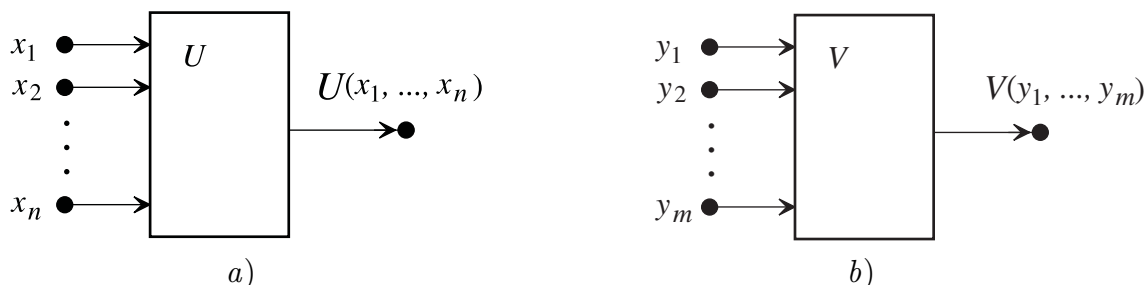
OBR. 3. Logický člen negátor.

Definícia 2.24. Kombinačná logická sieť prislúchajúca k B-výrazu $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je jednoduchý orientovaný graf, ktorý obsahuje n vstupných vrcholov $x_1, x_2, \dots, x_n$, jeden výstupný vrchol $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a niekoľko funkčných vrcholov, ktoré predstavujú použité logické členy. Schéma takéhoto grafu je na obr. 5a. Vnútoraná štruktúra (ďalšie hrany a funkčné vrcholy) tohto grafu je reprezentovaná pomocou logických členov v závislosti od induktívnej definície B-výrazu takto:

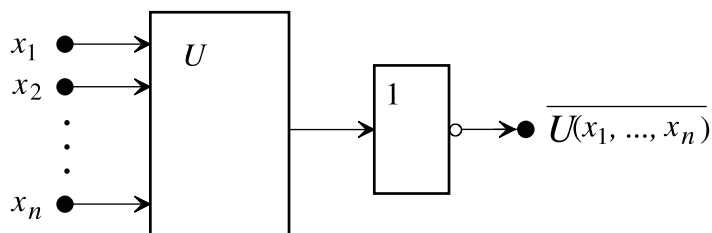
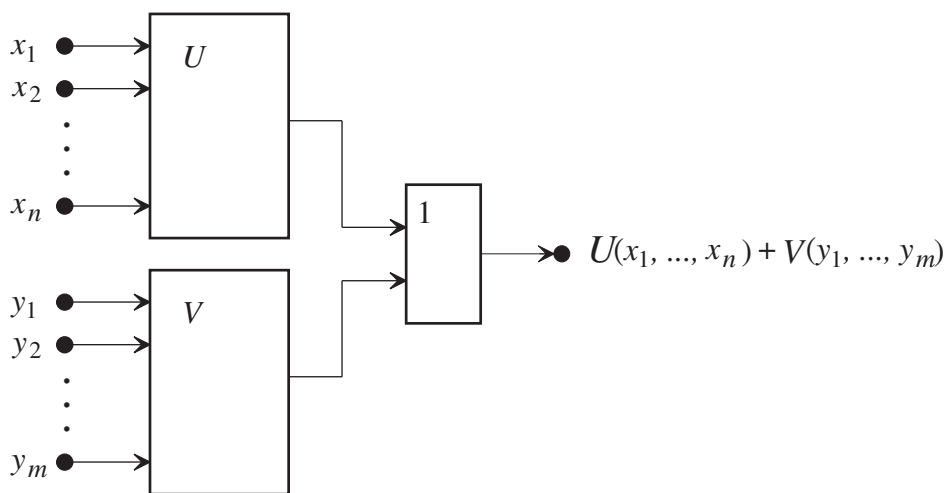
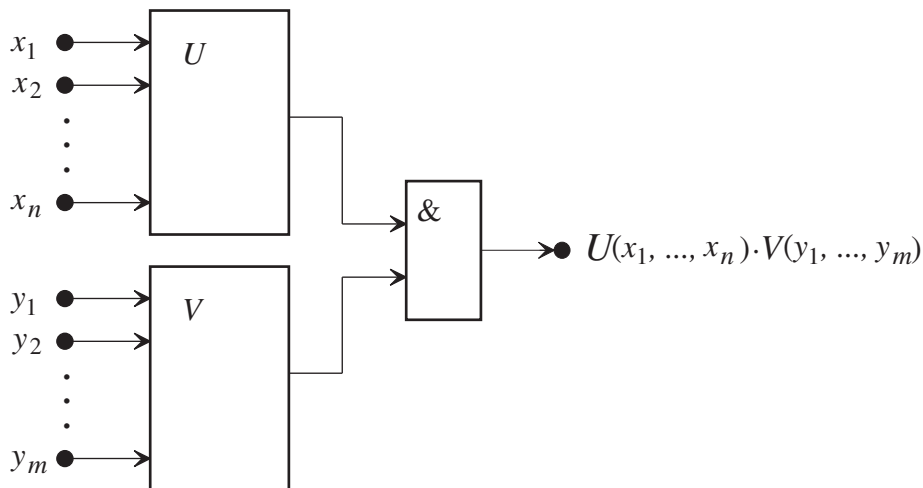
1. Kombinačné logické siete patriace k B-výrazom $U(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ a $W(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ sú na obr. 4.

OBR. 4. Kombinačné logické siete patriace k B-výrazom 0, 1 a x_i

2. Nech kombinačná logická sieť patriaca k B-výrazu $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je na obr. 5a. Potom kombinačná logická sieť patriaca k B-výrazu $\overline{U(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ je na obr. 6.

OBR. 5. Kombinačné logické siete patriace k B-výrazom U, V

3. Nech kombinačná logická sieť patriaca k B-výrazu $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je na obr. 5a a kombinačná logická sieť patriaca k B-výrazu $V(y_1, y_2, \dots, y_m)$ je na obr. 5b. Potom kombinačné logické siete patriace k B-výrazom $U(x_1, x_2, \dots, x_n) + V(y_1, y_2, \dots, y_m)$ a $U(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot V(y_1, y_2, \dots, y_m)$ sú na obr. 7 a 8.

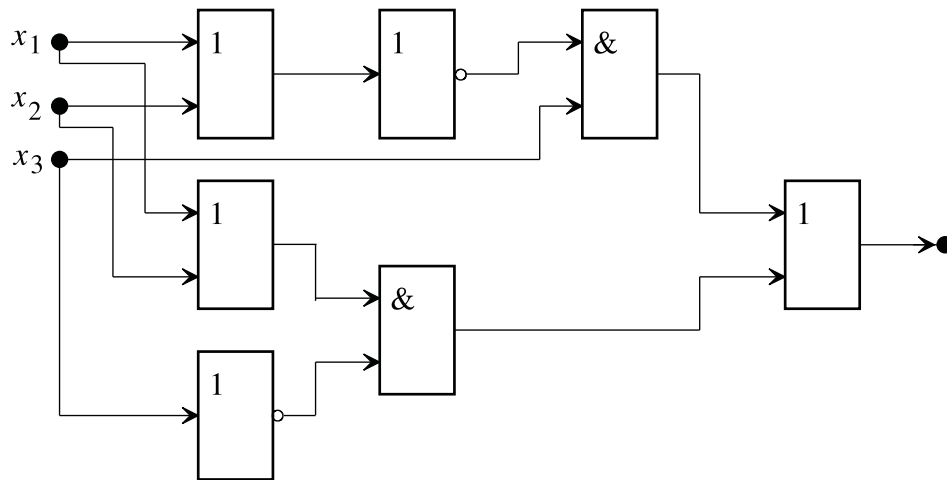
OBR. 6. Kombinačná logická sieť patriaca k B-výrazu $\overline{U}$ OBR. 7. Kombinačná logická sieť patriaca k B-výrazu $U + V$ OBR. 8. Kombinačná logická sieť patriaca k B-výrazu $U \cdot V$

Príklad 2.27. Na obr. 9 je kombinačná logická sieť prislúchajúca k B-výrazu $U(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} + x_2)x_3 + (x_1 + x_2)\overline{x_3}$. ■

Dohoda o zjednodušení kreslenia kombinačných sietí

Pri kreslení kombinačných logických sietí budeme používať tieto zjednodušenia:

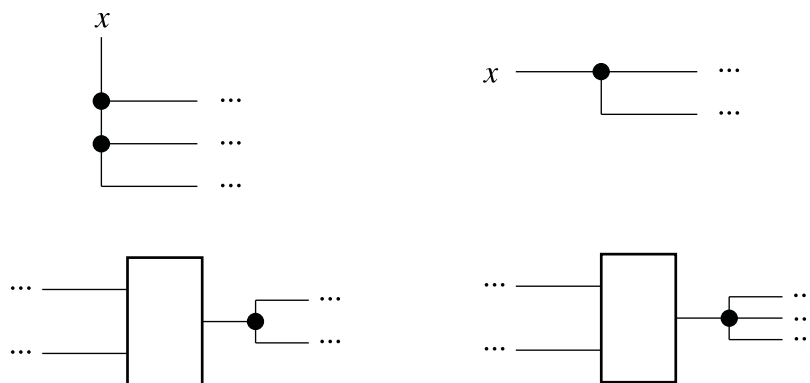
1. Orientované hrany budú smerovať zľava doprava, preto na nich prestaneme kresliť šípky.

OBR. 9. Kombinačná logická sieť patriaca k B-výrazu $(\overline{x_1 + x_2})x_3 + (x_1 + x_2)\overline{x_3}$

2. Vstupné vrcholy budeme vyznačovať iba vtedy, keď z nich vystupujú najmenej dve hrany. Vstupné premenné zodpovedajúce nevyznačeným vstupným vrcholom pripíšeme k hranám, ktoré s týmito vrcholmi incidujú.

3. Výstupné vrcholy vynecháme a im priradené výstupné premenné pripíšeme k príslušným hranám.

4. Ak z jedného vstupného alebo funkčného vrchola vychádza viac hrán, pridávame do kombinačnej logickej siete nové vrcholy - **vnútorné vrcholy**, ako to vidieť na obr. 10. Vnútorň vrchol kreslíme iba vtedy, keď z neho vychádzajú aspoň dve hrany.



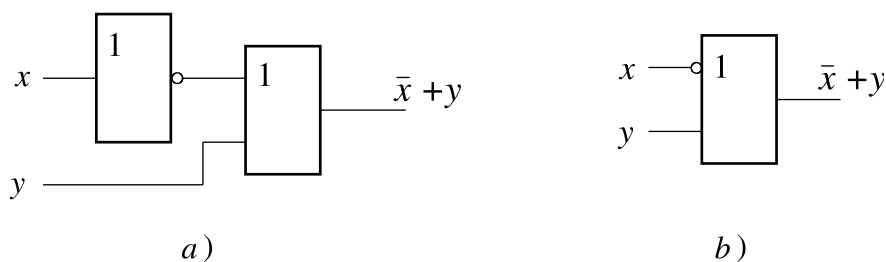
OBR. 10. Vnútorňé vrcholy

5. V prípade, že na vstup niektorého logického člena privádzame negáciu niektorej premennej, vyznačíme to krúžkom na príslušnom vstupe. Teda napr. logickú sieť z obr. 11a nahradíme logickou sieťou z obr. 11b.

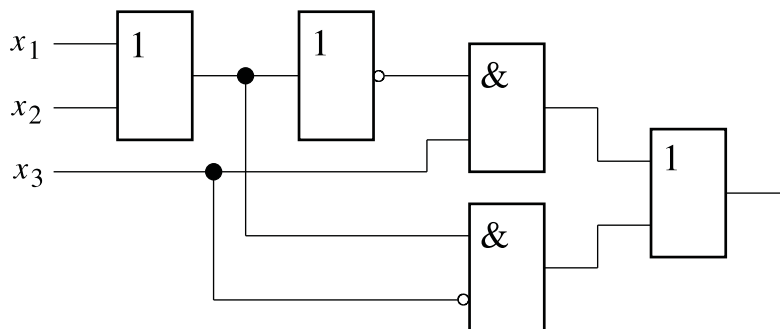
Kombinačná logická sieť z predchádzajúceho príkladu nakreslená podľa dohodnutých zjednodušení je na obr. 12.

Pri zostavovaní kombinačných logických sietí booleovských funkcií budeme ako funkčné vrcholy používať aj iné logické členy, než sme doteraz uviedli, napr.:

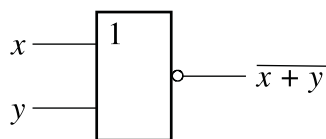
Logický člen NOR je realizáciou booleovskej funkcie $f(x, y) = \overline{x + y}$. Jeho označenie je na obr. 13.



OBR. 11. Zjednodušenie kreslenia logickej siete, ak na vstup logického člena je privádzaná negácia premennej

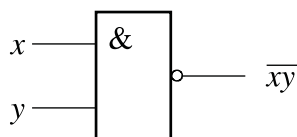


OBR. 12. Kombinačná logická sieť z príkladu 2.27



OBR. 13. Logický člen NOR

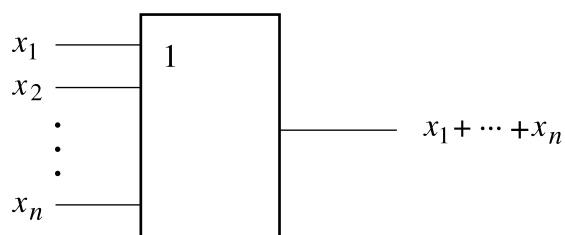
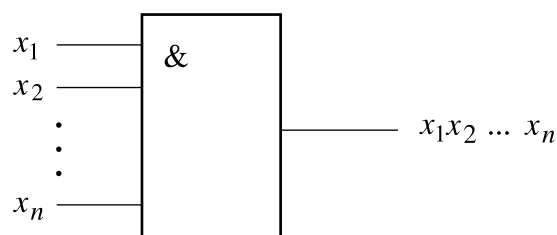
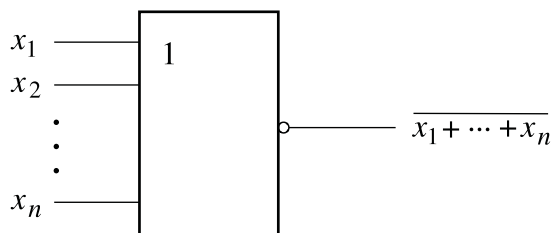
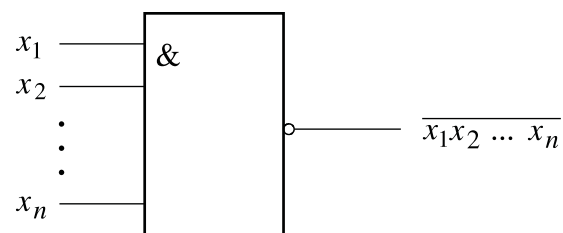
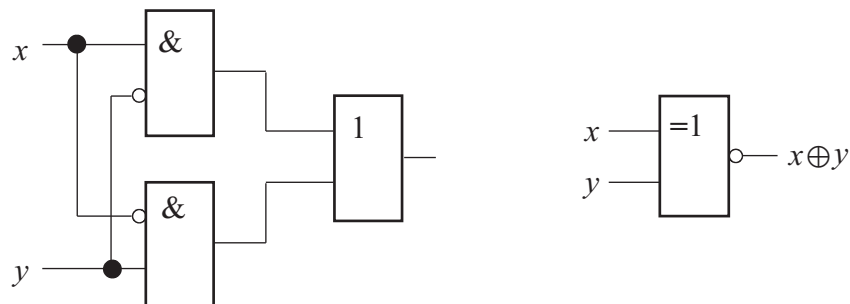
Logický člen NAND je realizáciou booleovskej funkcie $f(x, y) = \overline{xy}$. Jeho označenie je na obr. 14.



OBR. 14. Logický člen NAND

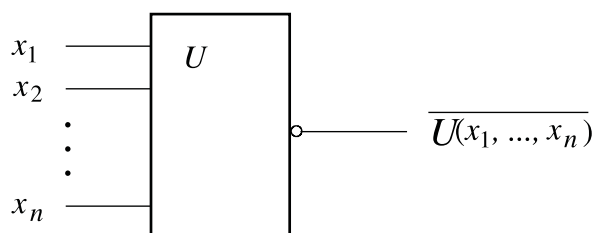
n -vstupový logický člen OR (resp. **AND**, **NOR**, **NAND**) $n \geq 2$, je realizáciou funkcie $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ (resp. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1 x_2 \dots x_n}$). Označenia týchto logických členov sú v poradí na obr. 15 až 18. V technickej praxi je počet vstupov týchto logických členov zhora ohraničený spravidla číslom 8. My o hornom ohraňení vstupov logických členov nebudeme uvažovať.

Logický člen XOR je realizáciou booleovskej funkcie $f(x, y) = \overline{xy} + x\overline{y} = x \oplus y$. Jeho kombinačná logická sieť a značka sú na obr. 19.

OBR. 15. n -vstupový logický člen OROBR. 16. n -vstupový logický člen ANDOBR. 17. n -vstupový logický člen NOROBR. 18. n -vstupový logický člen NAND

OBR. 19. Logický člen XOR

Na záver sa ešte dohodnime, že pri kreslení kombinačnej siete patriacej ku komplementu výrazu budeme logickú sieť z obr. 6 nahrádzať logickou sieťou z obr. 20.

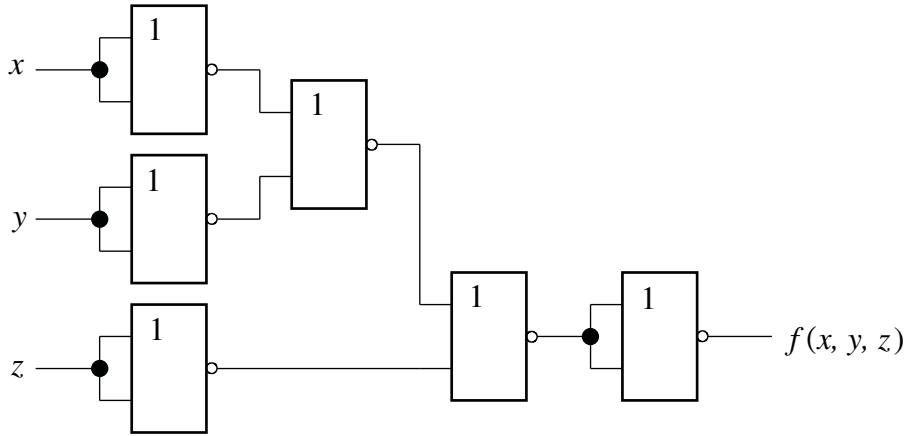
OBR. 20. Kombinačná logická sieť patriaca k $\overline{U(x_1, x_2, \dots, x_n)}$

Príklad 2.28. Nakreslite kombinačnú logickú sieť zostavenú len z dvojevstupových logických členov NOR, patriacu booleovskej funkcii $f(x, y, z) = xy + \bar{z}$.

RIEŠENIE. Vyjadrime funkciu f pomocou Pierceovej funkcie dvoch premenných, teda pomocou $\mathcal{P}_2$ -výrazov:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \overline{\overline{xy + \bar{z}}} = \overline{\overline{(\overline{\overline{x + y}})} + \bar{z}} = \overline{\overline{((\overline{\overline{x + x}}) + (\overline{\overline{y + y}})) + (\overline{\overline{z + z}})}} = \\ &= (((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)) \downarrow (((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)) \end{aligned}$$

Na základe tohto vyjadrenia už ľahko zostavíme kombinačnú logickú sieť funkcie f . Je na obr. 21. ■



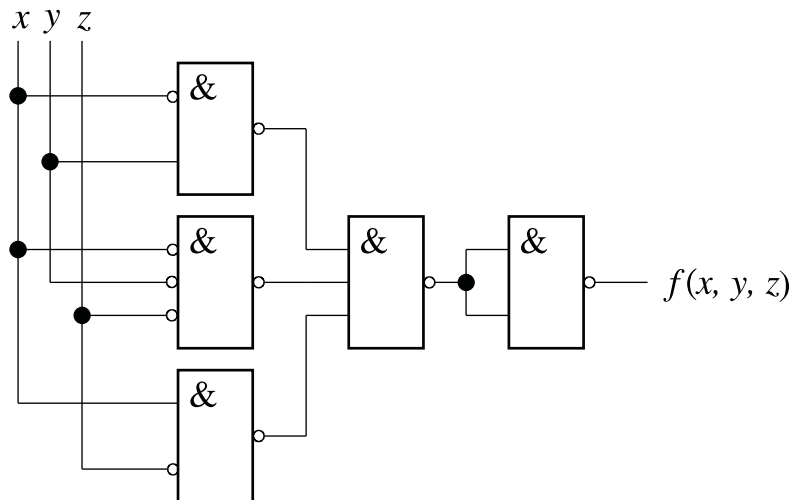
OBR. 21. Kombinačná logická sieť funkcie f z príkladu 2.28

Príklad 2.29. Nakreslite kombinačnú logickú sieť zostavenú len z logických členov NAND (resp. NOR) patriacu booleovskej funkcii $f(x, y, z) = (x + \bar{y})(x + y + z)(\bar{x} + z)$ bez obmedzenia počtu vstupov logických členov.

RIEŠENIE. Vyjadríme funkciu f pomocou $\mathcal{S}$ -výrazov resp. $\mathcal{P}$ -výrazov. Pritom pripustíme, že vo výrazoch určujúcich funkciu f môžu vystupovať aj negácie premenných.

a) Kombinačná logická sieť zostavená pomocou logických členov NAND (obr.22).

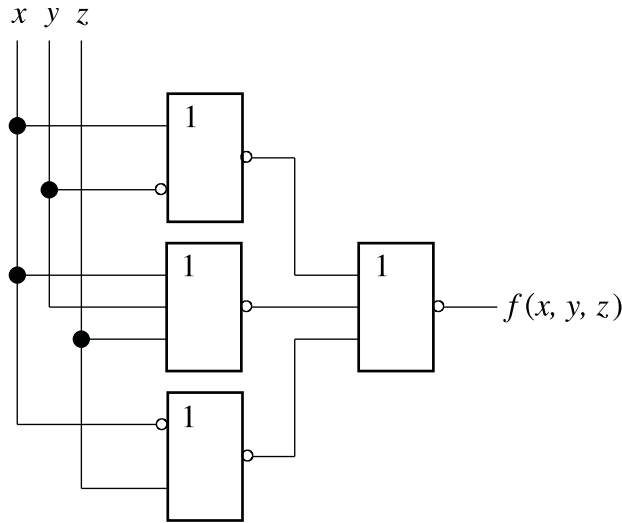
$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \overline{\overline{(x + \bar{y})}} \overline{\overline{(x + y + z)}} \overline{\overline{(\bar{x} + z)}} = \overline{\overline{(x\bar{y})}} \overline{\overline{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}} \overline{\overline{(x\bar{z})}} = \overline{\overline{(x\bar{y})}} \overline{\overline{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}} \overline{\overline{(x\bar{z})}} = \\ &= ((\bar{x} \uparrow y) \uparrow (\bar{x} \uparrow \bar{y} \uparrow \bar{z}) \uparrow (x \uparrow \bar{z})) \uparrow ((\bar{x} \uparrow y) \uparrow (\bar{x} \uparrow \bar{y} \uparrow \bar{z}) \uparrow (x \uparrow \bar{z})) \end{aligned}$$



OBR. 22. Kombinačná logická sieť zostavená z logických členov NAND

b) Kombinačná logická sieť zostavená pomocou logických členov NOR (obr.23).

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \overline{\overline{(x + \bar{y})}} \overline{\overline{(x + y + z)}} \overline{\overline{(\bar{x} + z)}} = \overline{\overline{(x + \bar{y})}} + \overline{\overline{(x + y + z)}} + \overline{\overline{(\bar{x} + z)}} = \\ &= ((x \downarrow \bar{y}) \downarrow (x \downarrow y \downarrow z) \downarrow (\bar{x} \downarrow z)) \end{aligned}$$



OBR. 23. Kombinačná logická sieť zostavená z logických členov NOR

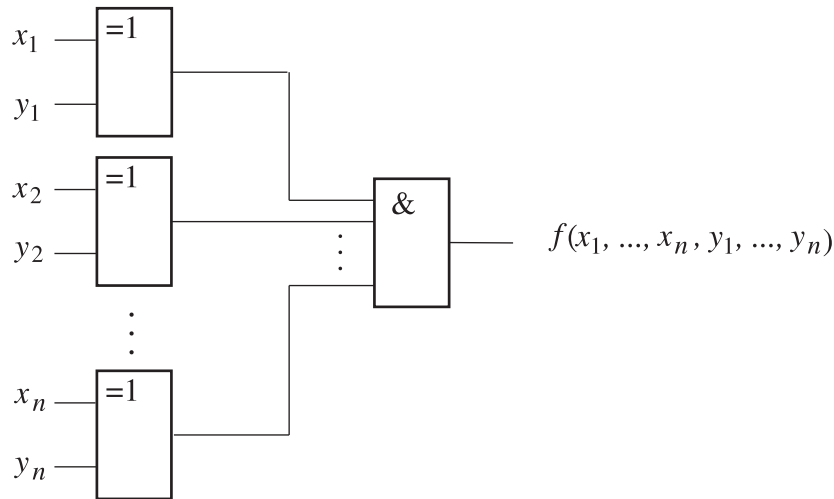
Príklad 2.30. (Porovnávací obvod - komparátor) Nech $c, d \in \mathbf{B}^n$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Chceme navrhnúť logickú sieť, pomocou ktorej by sme automaticky rozhodli, či $c = d$, alebo $c \neq d$. Preto uvažujeme o funkcii $f : \mathbf{B}^{2n} \rightarrow \mathbf{B}$, pre ktorú platí:

$$f(c, d) = f(c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{cases} 1, & \text{pre } c = d \\ 0, & \text{pre } c \neq d \end{cases}$$

Ľahko sa presvedčíme, že tejto požiadavke vyhovuje funkcia

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = \overline{(x_1 \oplus y_1)} \overline{(x_2 \oplus y_2)} \dots \overline{(x_n \oplus y_n)}.$$

Logickú sieť patriacu k danej funkcii uvádzame na obr. 24. Použili sme v nej logické členy XNOR, ktoré realizujú booleovskú funkciu $g(x, y) = \overline{x \oplus y}$. ■



OBR. 24. Kombinačná logická sieť komparátora

4. Booleovské funkcie $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}^m$

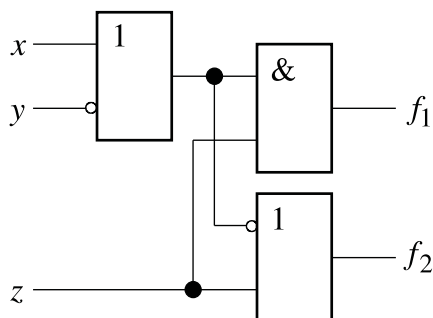
Funkcia $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}^m$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ má m zložiek. Každá z týchto zložiek je zrejme booleovská funkcia, teda $f_i : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$, pre $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Preto aj funkciu $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}^m$ budeme nazývať booleovská funkcia.

Každá zložka $f_i : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ booleovskej funkcie $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}^m$ je určená B-výrazom. Ku každému B-výrazu patrí kombinačná logická sieť. Dostávame m -ticu logických sietí, ktorá reprezentuje fyzikálnu realizáciu danej booleovskej funkcie. Túto m -ticu logických sietí budeme nazývať kombinačná logická sieť patriaca k funkcii $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}^m$. Táto logická sieť je daná pomocou B-výrazov určujúcich jednotlivé zložky danej funkcie. Jedným zo špecifik tejto siete je tá vlastnosť, že všetky logické siete patriace k jednotlivým zložkám majú spoločné vstupné vrcholy. Preto môžeme uvažovať aj o spoločných logických členoch, ktoré sa môžu nachádzať súčasne v niekoľkých logických sieťach, patriacich k jednotlivým zložkám danej funkcie. Tento problém už súvisí s otázkou minimalizácie kombinačných logických sietí. Podrobnejšie sa o ňom môžete dočítať v práci [3].

Príklad 2.31. Logická sieť patriaca k booleovskej funkcii

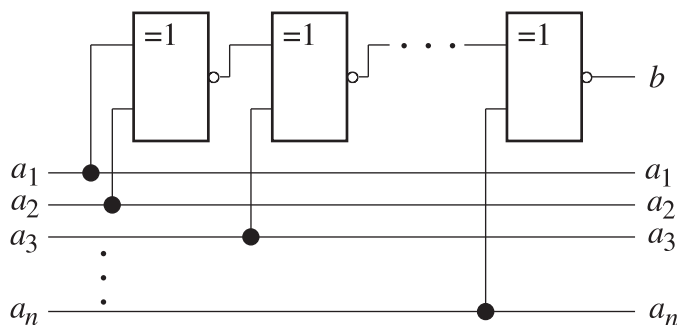
$$f : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}^2, f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = ((x + \bar{y})z, z + \overline{(x + \bar{y})})$$

je na obr. 25. ■



OBR. 25. Kombinačná logická sieť funkcie $f : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}^2$ z príkladu 2.31

Príklad 2.32. (Kontrola parity) Pri prenose informácií sa často k prenášanej n -tici pridáva ešte jedno miesto (jeden bit), aby sme mali možnosť kontroly prenesenej užitočnej informácie (na vstupe máme n -ticu $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a na výstupe $(n + 1)$ -ticu). Na obr. 26 uvádzame logickú sieť, pomocou ktorej generujeme prídavný bit b tak, aby počet všetkých



OBR. 26. Generovanie prídavného bitu na kontrolu parity

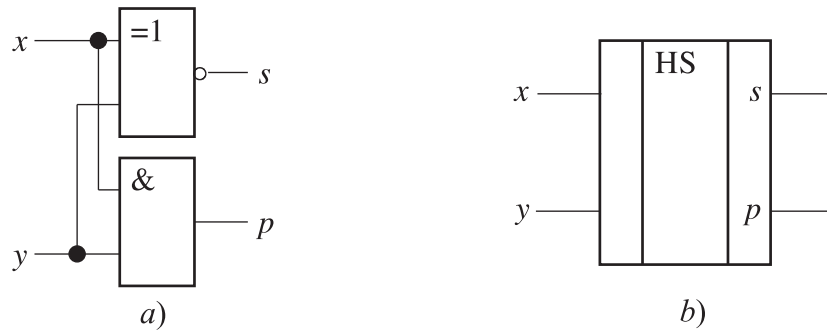
jednotiek na výstupe bol párny. To znamená, že ak na výstupe je nepárny počet jednotiek, ide o nesprávny prenos (šum). ■

Príklad 2.33. Uvažujme o funkcii $f : \mathbf{B}^2 \rightarrow \mathbf{B}^2$, $f(x, y) = (s, p)$, ktorej hodnoty uvádzame v tab. 6. Hodnoty tejto funkcie sa vyskytujú pri sčítaní dvoch čísel x, y v dvojkovej sústave. Hodnota s určuje zvyšok po delení (obyčajného) súčtu číslom 2 (teda je

TABUĽKA 6. Tabuľka funkcie $f(x, y) = (s, p)$

x, y	s	p
0, 0	0	0
0, 1	1	0
1, 0	1	0
1, 1	0	1

to sčítanie podľa modulu 2). Hodnota p nám udáva prenos, ktorý je nenulový iba pri sčítaní $1 + 1$. Z tabuľky priamo vyplýva, že $s = x \oplus y$ a $p = xy$. Logická sieť patriaca k tejto funkcii je nakreslená na obr. 27a. Na obr. 27b je nakreslená značka logického člena,



OBR. 27. Logický člen polosčítačka

ktorý je realizáciou booleovskej funkcie $f : \mathbf{B}^2 \rightarrow \mathbf{B}^2$, $f(x, y) = (s, p)$. Tento logický člen nazývame **polosčítačka**. ■

Príklad 2.34. Pri sčítovaní čísel v dvojkovej sústave je potrebná aj funkcia $f : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}^2$, $f(x, y, z) = (s, p)$, ktorá udáva súčet s podľa modulu 2 čísel x, y, z a prenos p . Jej hodnoty uvádzame v tab. 7. Ľahko sa dá overiť, že $s = x \oplus y \oplus z$ a priamo z tabuľky

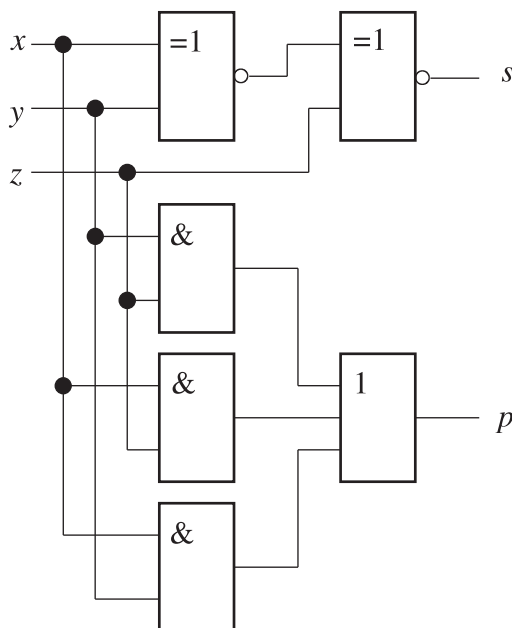
TABUĽKA 7. Tabuľka funkcie $f(x, y, z) = (s, p)$

$x \ y \ z$	s	p
0 0 0	0	0
0 0 1	1	0
0 1 0	1	0
0 1 1	0	1
1 0 0	1	0
1 0 1	0	1
1 1 0	0	1
1 1 1	1	1

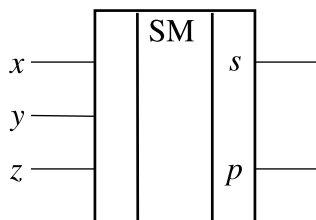
dostávame

$$p = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz = (\bar{x}yz + xyz) + (x\bar{y}z + xyz) + (xy\bar{z} + xyz) = yz + xz + xy$$

Príslušnú logickú sieť funkcie f uvádzame na obr. 28. Na obr. 29 je značka logického člena, ktorý je realizáciou funkcie f . Tento logický člen sa nazýva **úplná sčítačka**. ■

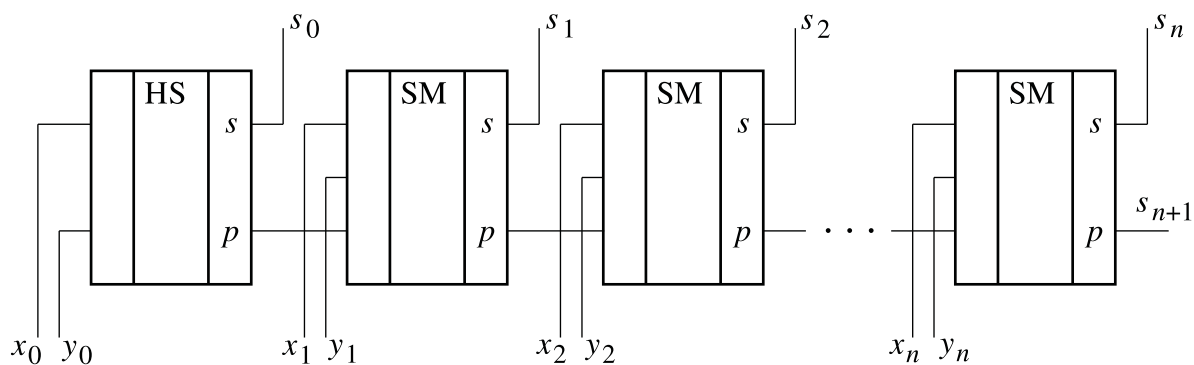


OBR. 28. Kombinačná logická sieť úplnej sčítačky



OBR. 29. Značka pre úplnú sčítačku

Logické členy polosčítačka a úplná sčítačka sa dajú využiť na generovanie logickej siete, pomocou ktorej je dvom číslam $x_n x_{n-1} \dots x_0$ a $y_n y_{n-1} \dots y_0$, zapísaným v dvojkovej sústave, priradený ich súčet $s_{n+1} s_n s_{n-1} \dots s_0$. Túto logickú sieť uvádzame na obr. 30.



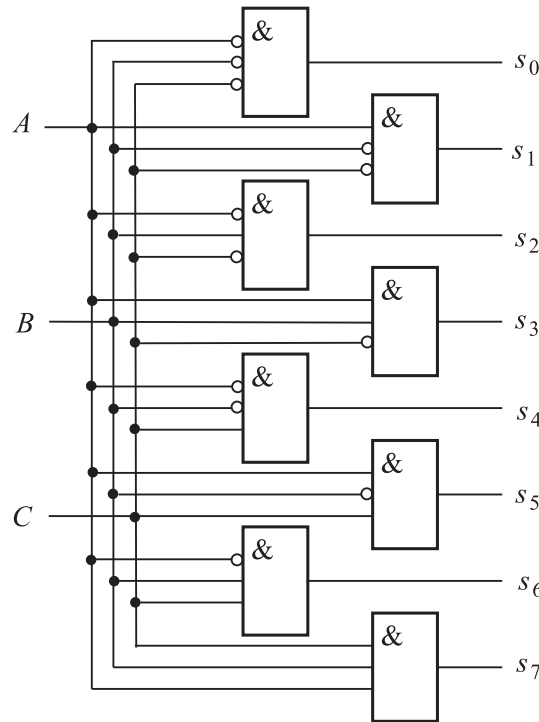
OBR. 30. Logická sieť pre sčítanie dvoch čísel v dvojkovej sústave

Všimnime si ešte, že keby sme chceli zostrojiť booleovskú funkciu vyjadrujúcu sčítanie dvoch 8-miestnych čísel v dvojkovej sústave, potrebovali by sme vytvoriť tabuľku funkcie $f : \mathbf{B}^{16} \rightarrow \mathbf{B}^9$. Tabuľka tejto funkcie by mala $2^{16} = 2^6 \cdot 2^{10} \doteq 64 \cdot 10^3 = 64000$ riadkov, čo predstavuje asi 2000 tlačенých strán.

TABUĽKA 8. Booleovská funkcia z príkladu 2.35

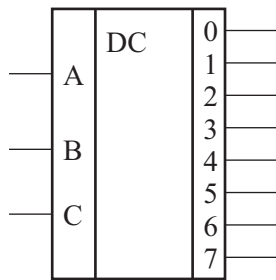
C	B	A	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Príklad 2.35. (Dvojkový dekóder) Budeme uvažovať o logickom obvode, ktorý má n vstupov a 2^n výstupov. Vstupy sa zvyknú označovať postupne $A, B, C, \dots$ a výstupy $s_0, s_1, s_2, \dots$. Na vstup privádzame n -tícu $j_1 j_2 \dots j_n \in \mathbf{B}^n$, ktorú považujeme za dvojkový zápis čísla $j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \dots + j_n 2^0$, pričom číslicu j_n s najnižšou váhou privádzame



OBR. 31. Logická sieť z príkladu 2.35

na vstup A , číslicu j_{n-1} na vstup B atď. Ak na vstup privedieme n -tícu $j_1 j_2 \dots j_n$, aktivuje sa práve výstup s_j , kde $j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \dots + j_n 2^0$, ktorý nadobúda hodnotu 1, ostatné výstupy majú hodnotu 0. Booleovskú funkciu $f : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}^8$, $f = (s_0, s_1, \dots, s_7)$, ktorá opisuje daný logický obvod pre $n = 3$, uvádzame v tabuľke 8. Pre výstupy daného logického obvodu dostávame: $s_0 = \overline{A} \overline{B} \overline{C}$, $s_1 = \overline{A} \overline{B} C$, $s_2 = \overline{A} B \overline{C}$, $s_3 = \overline{A} B C$, $s_4 = A \overline{B} \overline{C}$, $s_5 = A \overline{B} C$, $s_6 = A B \overline{C}$, $s_7 = A B C$. Príslušnú logickú sieť uvádzame na obr. 31. Na obr. 32 je logický člen, ktorý je symbolom (ľubovoľnej) logickej siete patriacej k uvedenej funkcii $f : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}^8$. Tento logický člen nazývame **dvojkový dekóder** (s tromi adresovými vstupmi). ■



OBR. 32. Logický člen dvojkový dekóder

Príklad 2.36. (Multiplexor) Pomocou dvojkového dekódera zostavíme schému logického obvodu, ktorý má n adresových vstupov $A, B, C, \dots$ a 2^n tzv. informačných vstupov $E_0, E_1, E_2, \dots$. Tento logický obvod má iba jeden výstup S . Na adresové vstupy privedieme n -ticu $j_1 j_2 \dots j_n \in \mathbf{B}^n$, ktorú považujeme za dvojkový zápis čísla $j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \dots + j_n 2^0$, pričom na vstup A privádzame hodnotu j_n s najmenšou váhou, na vstup B hodnotu j_{n-1} atď. Na informačné vstupy privádzame ľubovoľné (logické) hodnoty. Vtedy na výstupe S dostávame tú hodnotu, ktorá je privedená na informačný vstup E_j . Symbolicky uvádzame hodnoty príslušnej funkcie S pre $n = 3$ v tabuľke 9. Všimnime si, že v skutočnosti ide o funkciu $3 + 2^3 = 11$ premenných. Na vyplnenie tabuľky takejto funkcie

TABUĽKA 9. Funkcia z príkladu 2.36

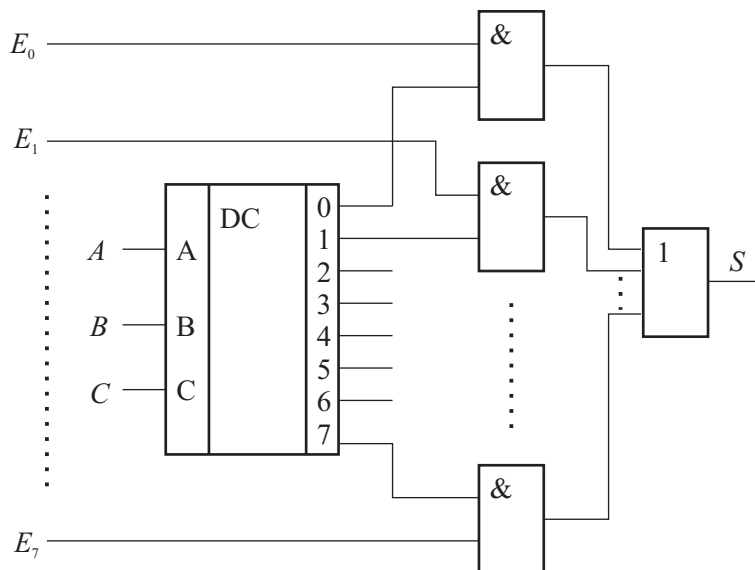
C	B	A	S
0	0	0	E_0
0	0	1	E_1
0	1	0	E_2
0	1	1	E_3
1	0	0	E_4
1	0	1	E_5
1	1	0	E_6
1	1	1	E_7

by sme potrebovali 2^{11} riadkov = 2048 riadkov = 65 strán. Ďalej je zrejmé, že

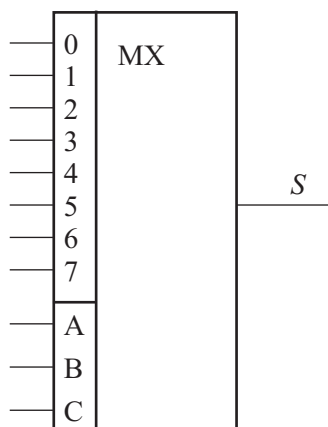
$$S = \overline{A}\overline{B}\overline{C}E_0 + \overline{A}\overline{B}CE_1 + \overline{A}B\overline{C}E_2 + \overline{A}BCE_3 + A\overline{B}\overline{C}E_4 + A\overline{B}CE_5 + AB\overline{C}E_6 + ABCE_7.$$

Logickú sieť patriacu k danej funkcii sme získali pomocou dvojkového dekódera. Táto sieť je nakreslená na obr. 33. Označenie príslušného logického člena, ktorý nazývame **multiplexor**, uvádzame na obr. 34. ■

Príklad 2.37. (Použitie multiplexora na generovanie logických funkcií) Uvažujme o ľubovoľnej (ale pevne zvolenej) funkcii $f : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}$. Jednu funkciu sme zvolili pomocou tabuľky 10. Ak chceme, aby na výstupe S multiplexora bola funkcia f , porovnaním tabuľiek 10 a 9, zistíme, že stačí túto funkciu považovať za funkciu premenných $C = x$, $B = y$, $A = z$ a pre $j = j_1 2^2 + j_2 2^1 + j_3 2^0$ na informačný vstup E_j pripojiť konštantu 0 práve vtedy, keď $f(j_1, j_2, j_3) = 0$, a konštantu 1 práve vtedy, keď $f(j_1, j_2, j_3) = 1$. Logickú sieť patriacu k funkcii f z tabuľky 10 sme zostavili pomocou multiplexora s tromi adresovými vstupmi. Je nakreslená na obr. 35. ■



OBR. 33. Logická sieť z príkladu 2.36

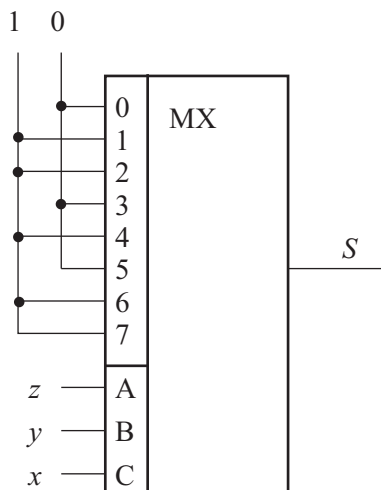


OBR. 34. Logický člen multiplexor

TABUĽKA 10. Funkcia z príkladu 2.37

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Príklad 2.38. Keď pozornejšie študujeme tabuľku 9, vidíme, že v každom riadku máme dve možnosti pre voľbu E_j , a teda na výstupe môžeme dostať 16 rôznych možností. To znamená, že pomocou multiplexora s tromi adresovými vstupmi môžeme generovať aj funkciu štyroch premenných. Postupujeme pritom takto. Uvažujme o funkcii $f : \mathbf{B}^4 \rightarrow \mathbf{B}$,



OBR. 35. Logická sieť z príkladu 2.37

ktorej premenné označme postupne x, y, z, u . Tak ako v predošlom príklade položíme $x = C$, $y = B$, $z = A$. Ďalší postup vyvysvetlíme na konkrétnej funkcii $f : \mathbf{B}^4 \rightarrow \mathbf{B}$, ktorej hodnoty uvádzame v tabuľke 11. Pri zostavovaní tejto schémy sme postupovali takto. Štvorice $(x, y, z, u) = (C, B, A, u)$ usporiadame do dvojíc tak, aby sa prvky v jednotlivých

TABUĽKA 11. Funkcia z príkladu 2.38

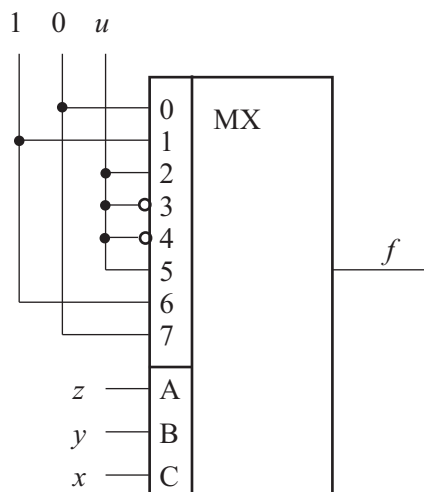
C	B	A	u	f	
0	0	0	0	0	$E_0 = 0$
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	1	$E_1 = 1$
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	0	$E_2 = u$
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	1	$E_3 = \bar{u}$
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	$E_4 = \bar{u}$
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	$E_5 = u$
1	0	1	1	1	
1	1	0	0	1	$E_6 = 1$
1	1	0	1	1	
1	1	1	0	0	$E_7 = 0$
1	1	1	1	0	

dvojiciach nelíšili na prvých troch miestach. Dostávame dvojice $(j_1, j_2, j_3, 0)$, $(j_1, j_2, j_3, 1)$. Každé takej dvojici je priradený informačný vstup E_j , kde $j = j_1 2^2 + j_2 2^1 + j_3 2^0$. Potom vidíme, že pre voľbu pripojenia na vstupe E_j máme štyri možnosti:

- (1) Ak $f(j_1, j_2, j_3, 0) = f(j_1, j_2, j_3, 1) = 0$, položíme $E_j = 0$.

- (2) Ak $f(j_1, j_2, j_3, 0) = f(j_1, j_2, j_3, 1) = 1$, položíme $E_j = 1$.
 (3) Ak $f(j_1, j_2, j_3, 0) = 0, f(j_1, j_2, j_3, 1) = 1$, položíme $E_j = u$.
 (4) Ak $f(j_1, j_2, j_3, 0) = 1, f(j_1, j_2, j_3, 1) = 0$, položíme $E_j = \bar{u}$.

Na základe týchto pravidiel sme zostrojili aj logickú sieť, ktorá patrí k funkcii z tabuľky 11. Túto logickú sieť uvádzame na obr. 36. ■



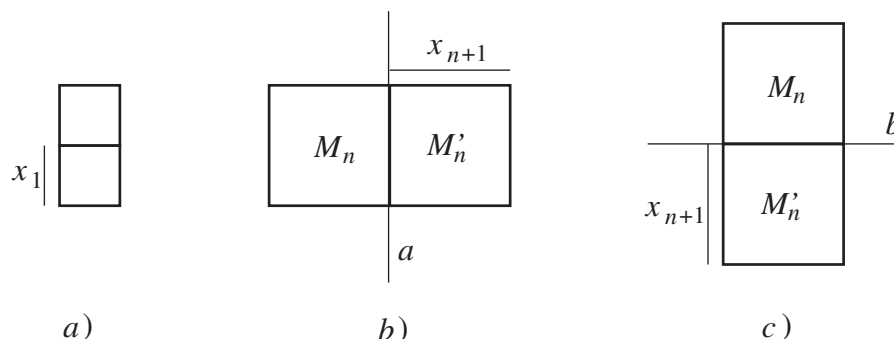
OBR. 36. Logická sieť z príkladu 2.38

5. Karnaughove mapy

Karnaughova mapa je špecifická tabuľka, slúžiaca na zápis booleovskej funkcie, ktorá nám umožní jednoduché grafické vyznačenie NDF tejto funkcie. Budeme ju definovať rekurentne vzhľadom na počet premenných booleovskej funkcie.

Definícia 2.25. Karnaughova mapa pre booleovské funkcie n premenných $x_1, \dots, x_n$ je tabuľka pozostávajúca z 2^n štvorčekov, pričom každému štvorčeku je priradený práve jeden bod z $\mathbf{B}^n$.

Pre $n = 1$ je Karnaughova mapa znázornená na obr. 37a. Štvorčeku, ktorý je zľava vyznačený zvislou čiarou, je priradený bod 1 a štvorčeku nad ním bod 0.

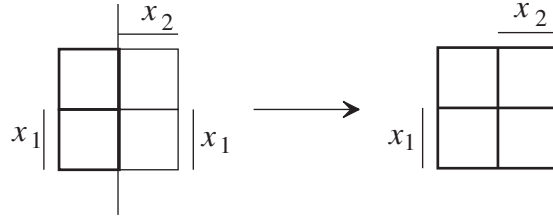


OBR. 37. Karnaughova mapa pre a) jednu premennú, b) $n + 1$ premenných

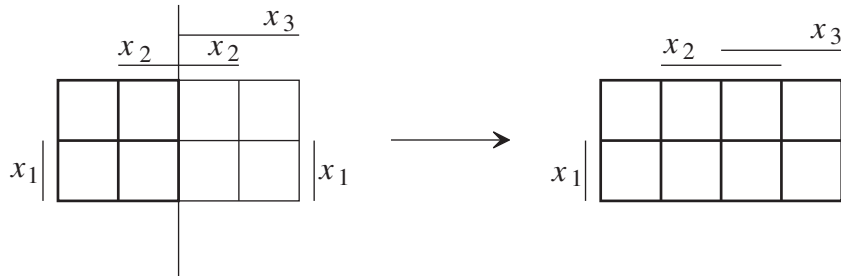
Nech M_n je Karnaughova mapa pre funkcie n premenných $x_1, \dots, x_n$. Mapa M_{n+1} sa skladá z mapy M_n a jej súmerne združeného obrazu M'_n podľa osi a (obr. 37b) resp. podľa osi b (obr. 37c). Vodorovná resp. zvislá kódovacia čiara pri M'_n označená premennou x_{n+1}

vyjadruje, že každému štvorčeku z M'_n je priradený bod $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbf{B}^{n+1}$, pre ktorý $x_{n+1} = 1$, a každému štvorčeku z M_n zas bod, pre ktorý $x_{n+1} = 0$. Kódovacie čiary pri M'_n , rovnobežné s osou, ktoré vznikli súmernosťou podľa tejto osi, sa nevykresľujú.

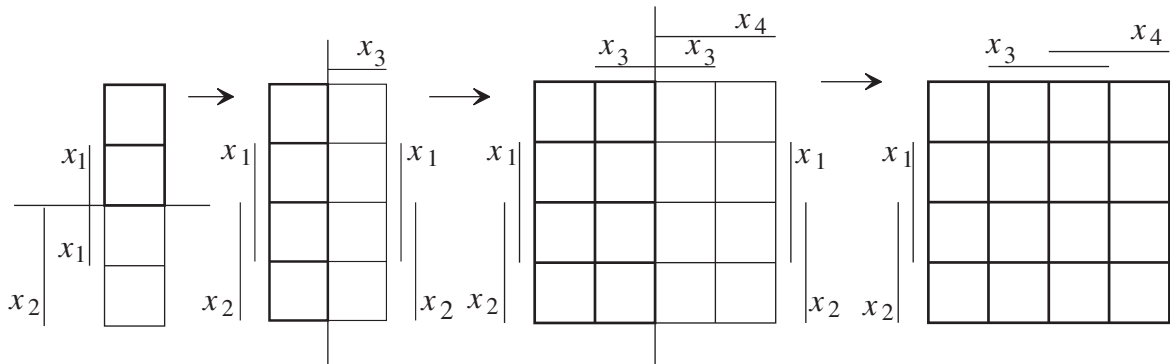
Na obr. 38, 39, 40, 41 a 42 je znázornený spôsob zostavenia Karnaughových máp pre 2, 3, 4, 5 a 6 premenných. Použitie Karnaughových máp pre viac ako 6 premenných je už problematické. Priradenie bodov z $\mathbf{B}^n$ jednotlivým štvorčekom Karnaughovej mapy pre $n = 4$ vidieť na obr. 43.



OBR. 38. Karnaughova mapa pre 2 premenné



OBR. 39. Karnaughova mapa pre 3 premenné

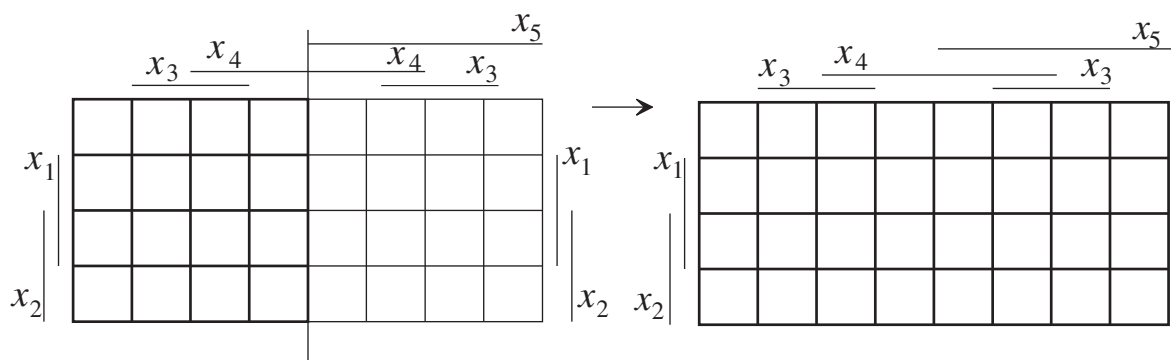


OBR. 40. Karnaughova mapa pre 4 premenné

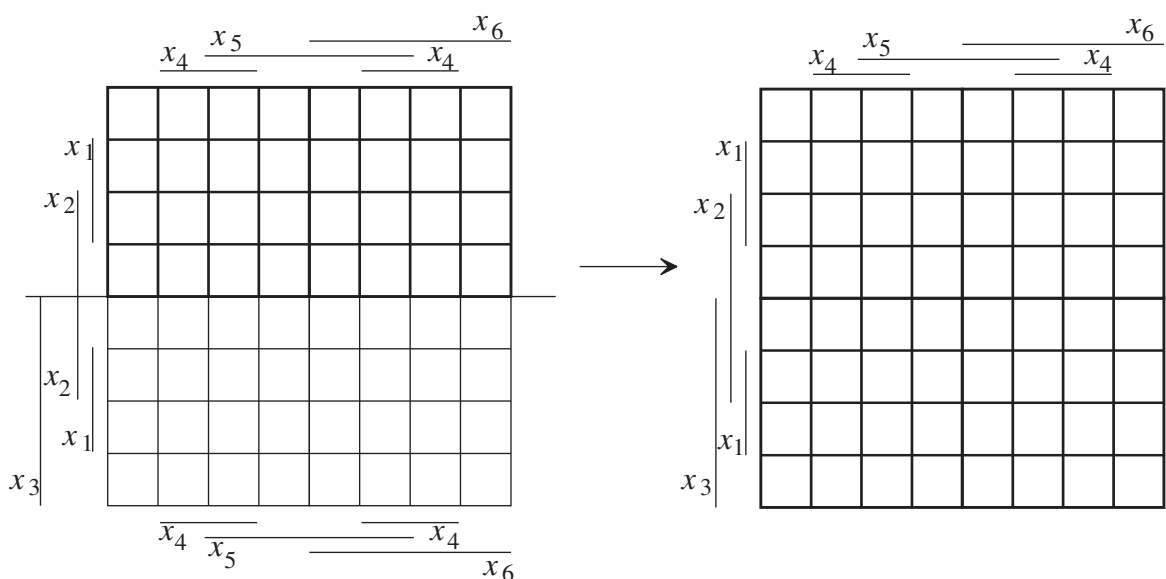
Definícia 2.26. Ak v Karnaughovej mape pre n premenných do každého štvorčeka, ktorý zodpovedá bodu $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n$, vpíšeme hodnotu funkcie $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ v tomto bode, t.j. $f(a_1, \dots, a_n)$, získame **Karnaughovu mapu booleovskej funkcie** f .

Príklad 2.39. Na obr. 44 je uvedená tabuľka a tiež Karnaughova mapa booleovskej funkcie f štyroch premenných. ■

Ukážeme si, ako je možné na Karnaughovej mape funkcie f znázorniť jej NDF. Aby sme to mohli urobiť, bude vhodné zaviesť nasledujúce pojmy.



OBR. 41. Karnaughova mapa pre 5 premenných



OBR. 42. Karnaughova mapa pre 6 premenných

		x_3		x_4	
		$\overline{x_3}$	x_3	$\overline{x_4}$	
x_1	x_2	(0,0,0,0)	(0,0,1,0)	(0,0,1,1)	(0,0,0,1)
	$\overline{x_2}$	(1,0,0,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,0,0,1)
	x_2	(1,1,0,0)	(1,1,1,0)	(1,1,1,1)	(1,1,0,1)
x_2	$\overline{x_2}$	(0,1,0,0)	(0,1,1,0)	(0,1,1,1)	(0,1,0,1)

OBR. 43. Body priradené k jednotlivým štvorčekom Karnaughovej mapy

Definícia 2.27. V normálnej disjunktívnej resp. konjunktívnej forme n premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$ budeme každý výskyt x_i alebo $\overline{x_i}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ nazývať **písmenom**. Počet písmen v súčinovom, resp. súčtovom člene budeme nazývať jeho **dĺžkou**.

Všimnime si teraz, aké sú množiny jednotkových bodov funkcií určených niektorým súčinovým členom. V tejto súvislosti budeme používať nasledujúce označenie: nech x je

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

		x_3	x_4
		1	0
x_1	1	1	1
	0	1	1
x_2	1	1	1

OBR. 44. Tabuľka a Karnaughova mapa funkcie f

premenná a $j \in \{0, 1, *\}$, potom

$$x^j = \begin{cases} x, & \text{ak } j = 1 \\ \bar{x}, & \text{ak } j = 0 \\ 1, & \text{ak } j = * \end{cases}.$$

Pri tomto označení ľubovoľný súčinový člen n premenných $x_1, \dots, x_n$ môžeme písať v tvare

$$x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}.$$

Elementárny súčinový člen $M(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$ (v tomto prípade $j_i \in \{0, 1\}$) má len jeden jednotkový bod, je to n -tica $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Ak v tomto elementárnom súčinovom člene nahradíme napríklad j_r hodnotou $*$, dostaneme súčinový člen $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ktorý vlastne vznikne z $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vynechaním písmena x_r alebo $\bar{x}_r$. Tento súčinový člen má dva jednotkové body, sú to n -tice $(j_1, \dots, j_{r-1}, 0, j_{r+1}, \dots, j_n)$ a $(j_1, \dots, j_{r-1}, 1, j_{r+1}, \dots, j_n)$. Množinu týchto dvoch n -tíc budeme označovať

$$(j_1, \dots, j_{r-1}, *, j_{r+1}, \dots, j_n).$$

Ak budeme v týchto úvahách pokračovať ďalej a vynecháme ďalšie písmeno v súčinovom člene $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dostaneme súčinový člen dĺžky $n - 2$, ktorý má 2^2 jednotkových bodov. Zrejme súčinový člen $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$ n premenných dĺžky $n - i$ má 2^i jednotkových bodov. Množinu týchto bodov budeme označovať symbolom $(j_1, j_2, \dots, j_n)$, v ktorom na miestach vynechaných písmen bude figurovať znak $*$.

Príklad 2.40. Súčinový člen $\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 x_6$ šiestich premenných $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ môžeme zapísať v tvare $x_1^0 x_3^1 x_4^0 x_6^1$. Tento súčinový člen má štvorprvkovú množinu jednotkových bodov

$$(0, *, 1, 0, *, 1) = \{(0, 0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 1, 1)\}.$$

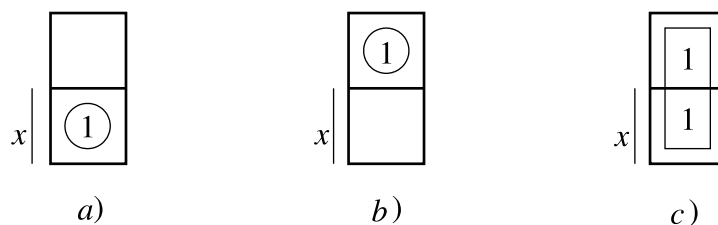
■

Definícia 2.28. Útvar pozostávajúci zo všetkých štvorčekov Karnaughovej mapy zodpovedajúcich jednotkovým bodom súčinového člena n premenných, ktorý má dĺžku k , nazývame 2^{n-k} -**tica jednotkových bodov**. Špeciálne pre $k = n$ ho nazývame **izolovaný bod**. Pre izolované body, dvojice, štvorice, osmice, ... budeme používať spoločný názov **konfigurácie jednotkových bodov**. Izolované body budeme na mape vyznačovať krúžkom, ostatné konfigurácie rámečkom.

Voľne budeme hovoriť, že **súčinový člen pokrýva konfiguráciu jednotkových bodov** tohto súčinového člena a tiež, že **súčinový člen pokrýva množinu svojich jednotkových bodov**.

Teraz ukážeme, ako vyzerajú konfigurácie v jednotlivých Karnaughových mapách.

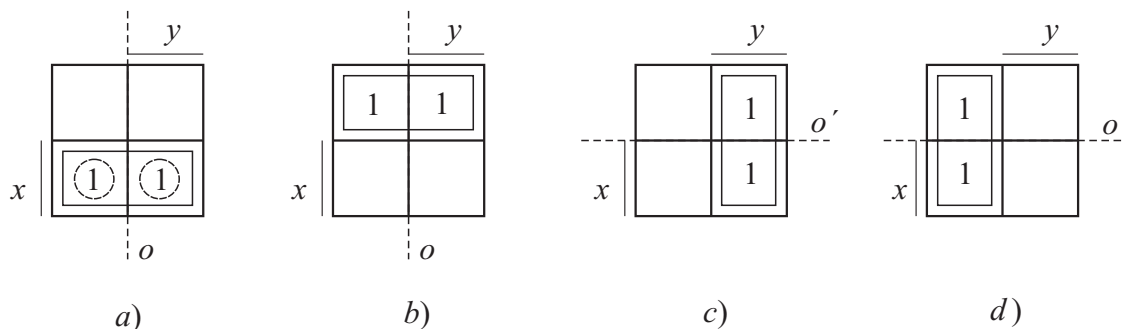
V prípade booleovských funkcií jednej premennej je situácia jednoduchá. Do úvahy prichádzajú iba tri súčinové členy: $x, \bar{x}, 1$. Prvý pokrýva jednoprvkovú množinu (1), druhý (0) a tretí pokrýva dvojprvkovú množinu $(*) = \{1, 0\}$. Konfigurácie zodpovedajúce týmto množinám jednotkových bodov sú na obr. 45 a, b, c.



OBR. 45. Konfigurácie jednotkových bodov

- a) Izolovaný bod pokrytý súčinovým členom x .
- b) Izolovaný bod pokrytý súčinovým členom $\bar{x}$.
- c) Dvojica pokrytá súčinovým členom 1.

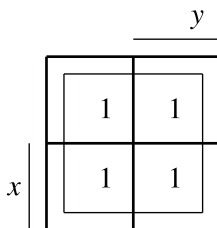
Pri funkciách dvoch premenných x, y už musíme uvažovať o deviatich súčinových členoch $xy, \bar{x}y, x\bar{y}, \bar{x}\bar{y}, x, \bar{x}, y, \bar{y}, 1$. Prvé štyri pokrývajú izolované body $(1, 1), (0, 1), (1, 0), (0, 0)$. Súčinový člen x pokrýva množinu jednotkových bodov $(1, *) = \{(1, 0), (1, 1)\}$. Zodpovedajúca dvojica jednotkových bodov je na obr. 46a. Táto dvojica tvorí celý riadok mapy dvoch premenných, v ktorom $x = 1$. Všimnime si ešte, že táto dvojica vznikne spojením dvoch izolovaných bodov (na obr. 46a sú vyznačené čiarkovaným krúžkom), ktoré sú súmerné podľa zvislej osi súmernosti o tejto mapy. Podobne súčinový člen $\bar{x}$ pokrýva dvojicu, ktorá v mape dvoch premenných tvorí riadok, v ktorom $x = 0$ (obr. 46b).



OBR. 46. Dvojice na Karnaughovej mape pre 2 premenné

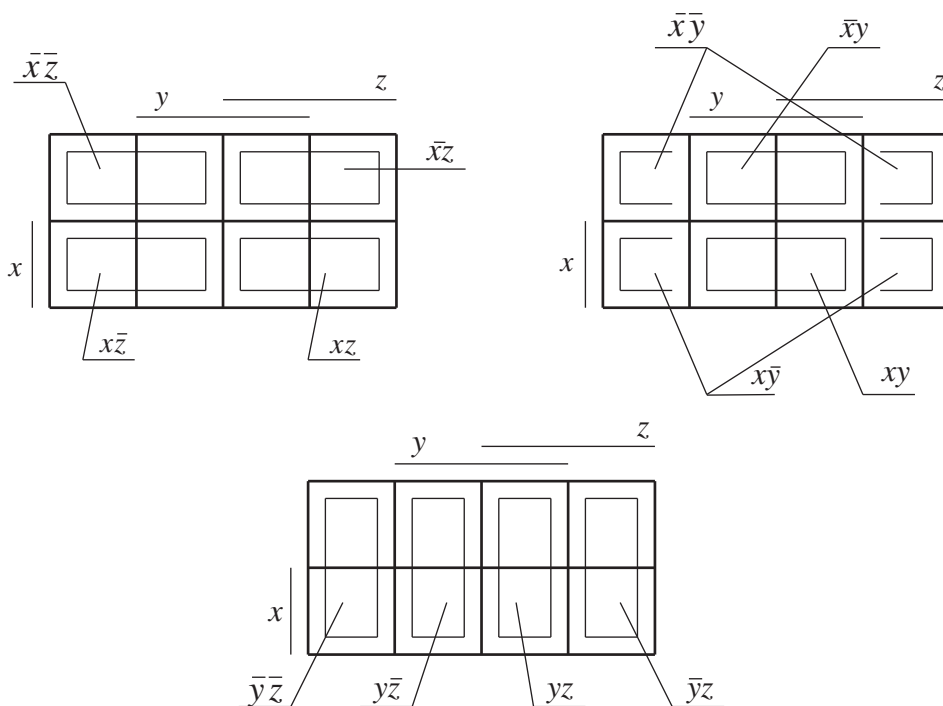
Konfigurácie jednotkových bodov pokryté súčinovými členmi y a $\bar{y}$ sú nakreslené na obr. 46c, d. Súčinový člen 1 pokrýva množinu $(*, *) = \{(1, 0), (1, 1), (0, 0), (0, 1)\}$. Zodpovedajúca štvorica v Karnaughovej mape dvoch premenných je tvorená všetkými jej

štvorčekmi (obr. 47). Všimnime si, že táto štvorica sa skladá z dvoch dvojíc, ktoré sú súmerné podľa jednej z osí súmernosti mapy, pokrytých súčinovými členmi x a $\bar{x}$, resp. y a $\bar{y}$.



OBR. 47. Štvorica na Karnaughovej mape 2 premenných

V prípade funkcií troch premenných x, y, z prichádza do úvahy 27 súčinových členov. Osem z nich sú elementárne súčinové členy, ktoré pokrývajú izolované body. Dvanásť súčinových členov má dĺžku 2. Dvojice, ktoré tieto členy pokrývajú sú na obr. 48. Pri každej dvojici je tam uvedený aj súčinový člen, ktorý túto dvojicu pokrýva.

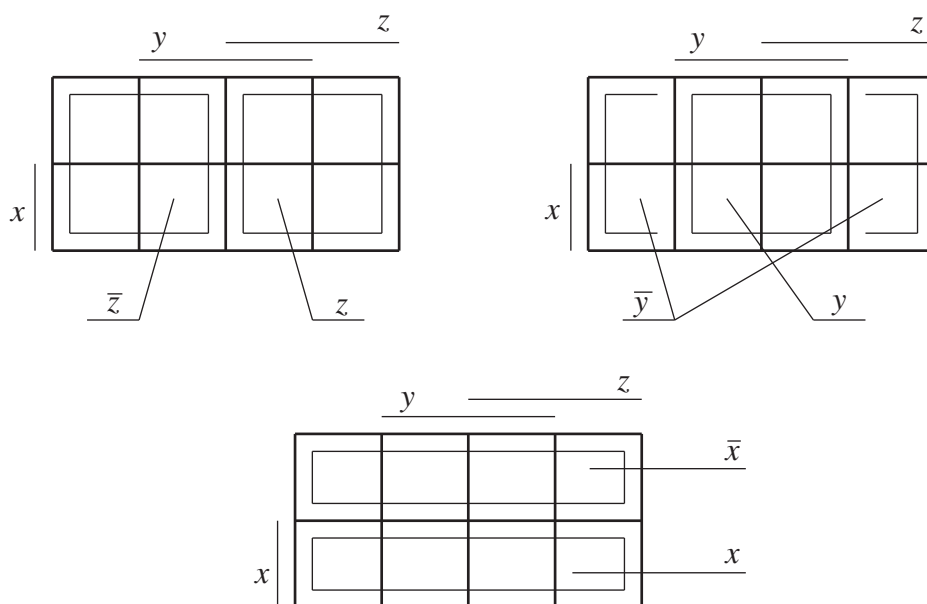


OBR. 48. Dvojice na Karnaughovej mape 3 premenných

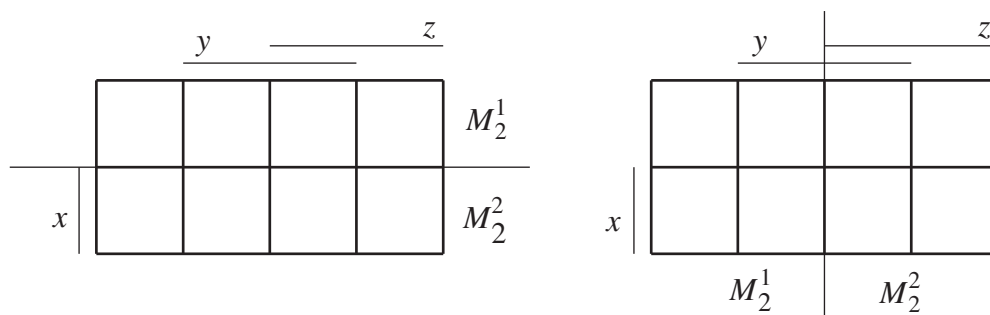
Štvorice pokryté šiestimi súčinovými členmi dĺžky 1 sú zobrazené na obr. 49. Súčinový člen 1 pokrýva osmicu, ktorá je tvorená všetkými štvorčekmi mapy.

Všimnime si aj tu zaujímavú vlastnosť: Karnaughova mapa M_3 je vodorovnou resp. zvislou osou súmernosti rozdelená na dve časti M_2^1 a M_2^2 (obr. 50), ktoré sú vlastne Karnaughovými mapami dvoch premenných. Potom každá 2^k -tica v M_3 je buď 2^k -ticou v jednej z máp M_2^1 , M_2^2 , alebo je spojením 2^{k-1} -tice v M_2^1 s jej osovo súmerným obrazom v M_2^2 .

Dá sa dokázať, že táto vlastnosť platí aj pre ostatné Karnaughove mapy, tak ako je to uvedené v nasledujúcej vete.



OBR. 49. Štvorice na Karnaughovej mape 3 premenných

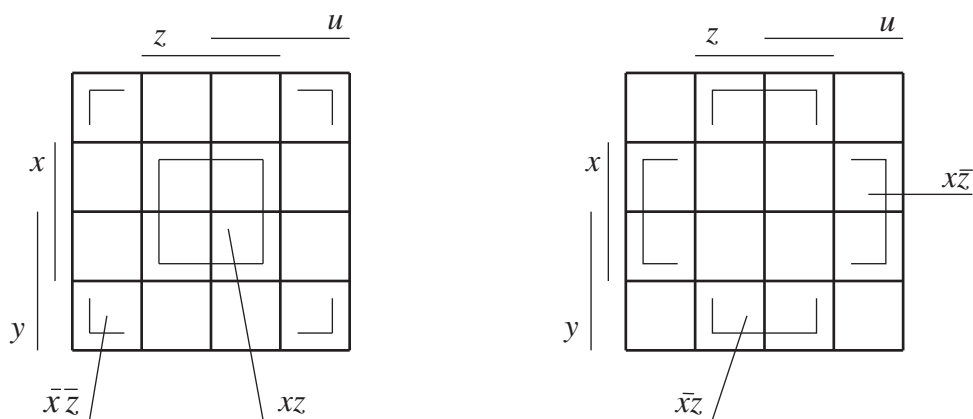
OBR. 50. Podmapy M_2^1 a M_2^2 na Karnaughovej mape M_3

Veta 2.16. (Konštrukcia 2^k -tíc) Nech M_n , $n \geq 2$ je Karnaughova mapa n premenných, ktorá je jej vodorovnou resp. zvislou osou súmernosti rozdelená na dve časti M_{n-1}^1 a M_{n-1}^2 (sú to Karnaughove mapy $n-1$ premenných). Potom každá 2^k -tica, $k \in \{1, \dots, n\}$ je buď 2^k -ticou v jednej z máp M_{n-1}^1 , M_{n-1}^2 , alebo je spojením 2^{k-1} -tice v M_{n-1}^1 s jej osovo súmerným obrazom v M_{n-1}^2 . $\square$

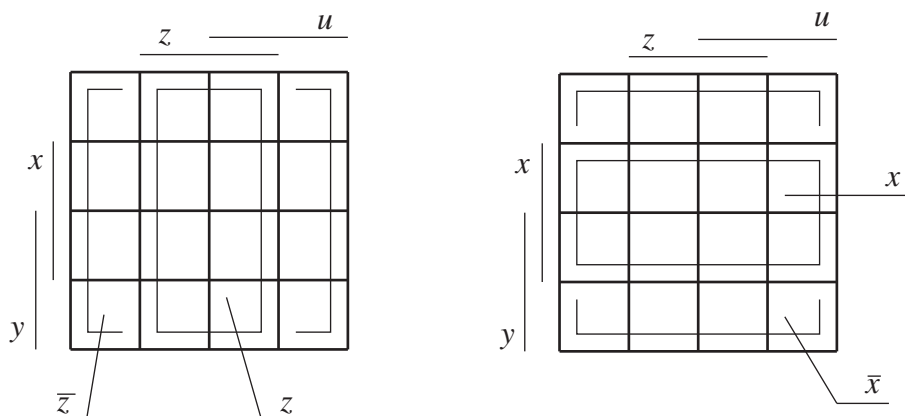
Súčinových členov štyroch premenných je 81. Z toho 16 má dĺžku 4, 32 má dĺžku 3, 24 má dĺžku 2 a 8 má dĺžku 1. Každá dvojica v Karnaughovej mape M_4 je dvojicou v M_3^1 alebo M_3^2 (berieme do úvahy obidve osi súmernosti). Na obr. 51 sú zobrazené práve tie štvorice, ktoré nie sú štvoricami ani v M_3^1 ani v M_3^2 . Podobne na obr. 52 sú zobrazené práve tie osmice, ktoré nie sú osmicami ani v jednej z M_3^1 , M_3^2 .

Pri zobrazovaní konfigurácií na Karnaughových mapách pre 5, resp. 6 premenných využívame predchádzajúcu vetu. Na obr. 53 a 54 sú znázornené niektoré konfigurácie na mapách M_5 a M_6 .

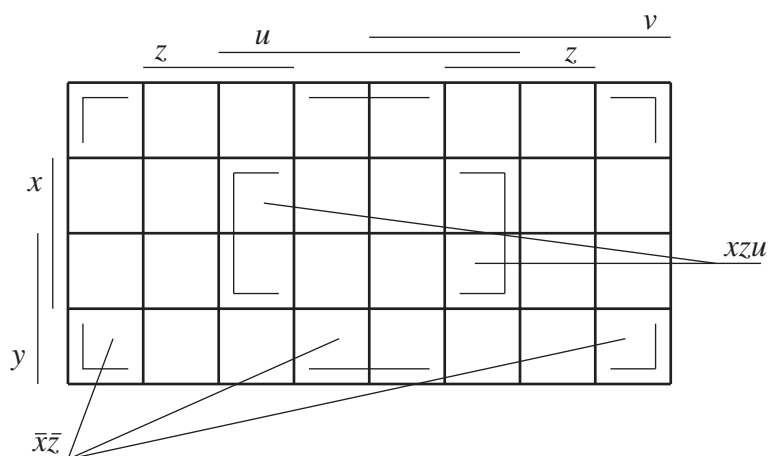
Definícia 2.29. Nech $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m S_k(x_1, \dots, x_n)$ je booleovská funkcia, pričom $\sum_{k=1}^m S_k(x_1, \dots, x_n)$ je NDF. Túto NDF budeme na Karnaughovej mape funkcie f znázorňovať tak, že na nej vyznačíme konfigurácie jednotkových bodov, ktoré sú pokryté súčinovými členmi $S_k(x_1, \dots, x_n)$ pre $k \in \{1, \dots, m\}$.



OBR. 51. Niektoré štvorice na Karnaughovej mape 4 premenných



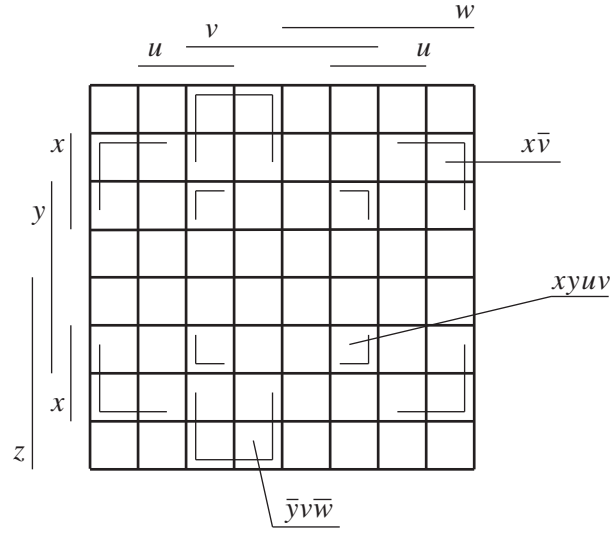
OBR. 52. Niektoré osmice na Karnaughovej mape 4 premenných



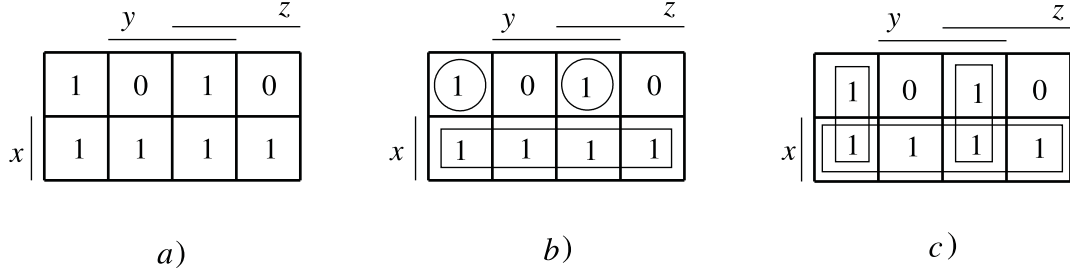
OBR. 53. Niektoré konfigurácie na Karnaughovej mape 5 premenných

Príklad 2.41. Nájdime dve rôzne NDF funkcie $f(x, y, z)$ určenej mapou na obr. 55a.

RIEŠENIE. Vyznačíme na mape tejto funkcie konfigurácie tak, aby každý jednotkový bod funkcie f patrila aspoň jednej konfigurácii. Tým je na mape vyznačená práve jedna NDF funkcie f . Na obr. 55b, c sú takto vyznačené konfigurácie, ktoré znázorňujú v poradí tieto NDF funkcie f : $\text{NDF}_1(f) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x$, $\text{NDF}_2(f) = \bar{y}\bar{z} + yz + x$. ■



OBR. 54. Niektoré konfigurácie na Karnaughovej mape 6 premenných



OBR. 55. Karnaughova mapa funkcie a dvoch jej NDF

Príklad 2.42. Napíšme NDF funkcie $f : \mathbf{B}^6 \rightarrow \mathbf{B}$, ktorá je znázornená na Karnaughovej mape na obr. 56.

RIEŠENIE. Jediný izolovaný bod je pokrytý súčinovým členom $xyz\bar{u}v\bar{w}$. Jedinú dvojicu pokrýva súčinový člen $\bar{x}y\bar{u}vw$. Štvorica v druhom stĺpci je pokrytá súčinovým členom $yu\bar{v}\bar{w}$. Štvorica rozložená v prvom a štvrtom riadku a v prvom a štvrtom stĺpci je pokrytá súčinovým členom $\bar{x}\bar{z}\bar{u}\bar{w}$. Jedinú osmicu pokrýva súčinový člen xuw a jediná šestnásticu pokrýva súčinový člen $\bar{y}\bar{v}$. Teda NDF funkcie f danej Karnaughovou mapou na obr. 56 je

$$\text{NDF}(f) = xyz\bar{u}v\bar{w} + \bar{x}y\bar{u}vw + yu\bar{v}\bar{w} + \bar{x}\bar{z}\bar{u}\bar{w} + xuw + \bar{y}\bar{v}.$$

■

Veta 2.17. Nech f je booleovská funkcia n premenných a nech

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m S_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

je NDF funkcie $\bar{f}$. Potom

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^m \tilde{S}_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

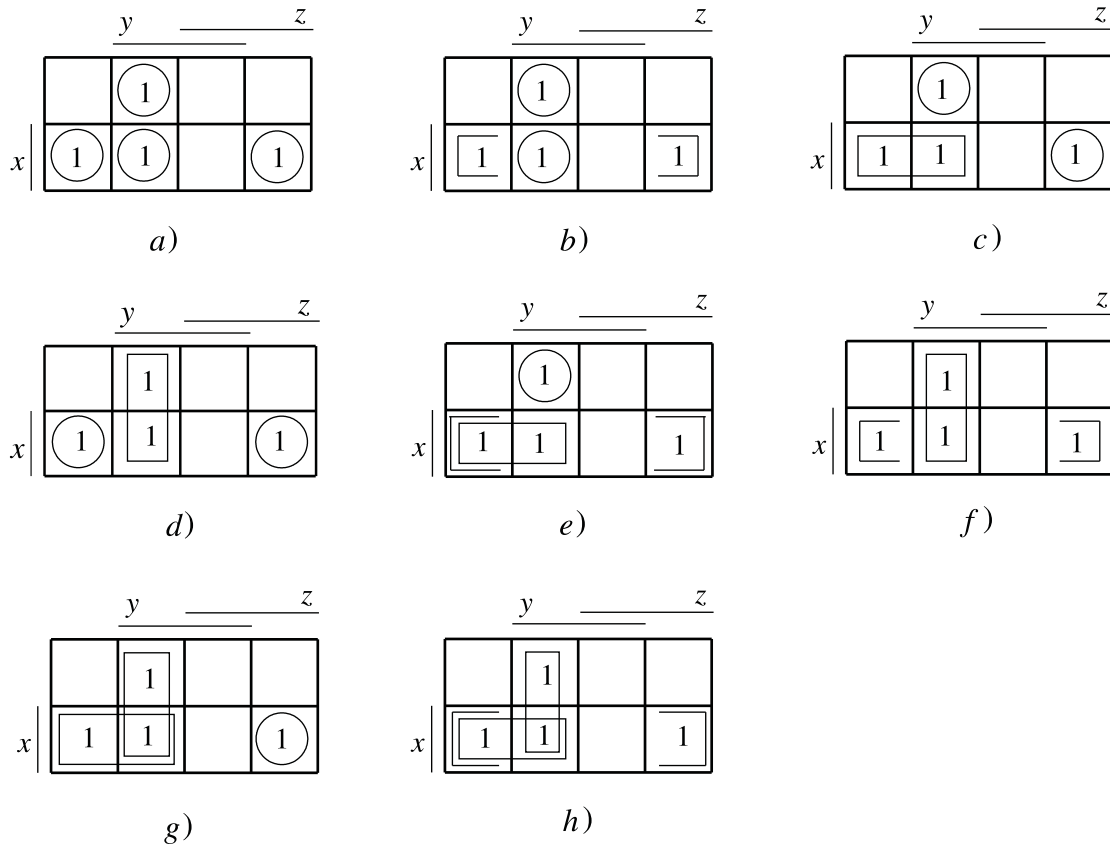
je NKF funkcie f , pričom ak

$$S_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 y_2 \dots y_n, \quad y_j \in \{x_j, \bar{x}_j, 1\}$$

Definícia 2.30. Normálnu disjunktívnu (konjunktívnu) formu booleovskej funkcie f , ktorá má spomedzi všetkých normálnych disjunktívnych (konjunktívnych) foriem funkcie f najmenší počet písmen, budeme nazývať **minimálna normálna disjunktívna (konjunktívna) forma booleovskej funkcie f** , skrátene MNDF (MNKF).

Príklad 2.44. Nájdime MNDF funkcie $f(x, y, z) = (x + y)\bar{z} + x\bar{y}$.

RIEŠENIE. Pomocou Karnaughovej mapy funkcie f vytvoríme všetky tie NDF tejto funkcie, ktoré majú túto vlastnosť: pre každé dva rôzne súčinové členy S_1, S_2 z tej istej NDF platí $J(S_1) \not\subset J(S_2)$ a $J(S_2) \not\subset J(S_1)$. Táto vlastnosť nám zabezpečí, že v NDF sa nevyskytnú mnohé nadbytočné členy. Ak by totiž platilo napr. $J(S_1) \subset J(S_2)$, tak v NDF môžeme S_1 vynechať a dostaneme opäť NDF funkcie f , ktorá však má menej písmen. Z takto vytvorených NDF vyberieme minimálnu. Na obr. 57a až h sú na Karnaughových mapách znázornené všetky NDF funkcie f majúce uvedenú vlastnosť. Napíšme jednotlivé



OBR. 57. NDF funkcie f z príkladu 2.44

NDF a vyhladáme z nich tú, ktorá má najmenší počet písmen:

- a) $f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + x\bar{y}z$, 12 písmen;
- b) $f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + x\bar{y}$, 8 písmen;
- c) $f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{z}$, 8 písmen;
- d) $f(x, y, z) = x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + y\bar{z}$, 8 písmen;
- e) $f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y} + x\bar{z}$, 7 písmen;
- f) $f(x, y, z) = y\bar{z} + x\bar{y}$, 4 písmen;
- g) $f(x, y, z) = y\bar{z} + x\bar{z} + x\bar{y}z$, 7 písmen;
- g) $f(x, y, z) = y\bar{z} + x\bar{y} + x\bar{z}$, 6 písmen.

Vidíme, že MNDF (f) = $y\bar{z} + x\bar{y}$. ■

Takýto postup vyhľadávania MNDF je dosť nepraktický a často nepoužiteľný. Preto budeme postupovať inak.

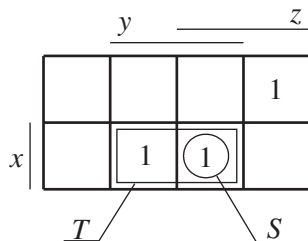
Definícia 2.31. Nech f, g sú dve booleovské funkcie n premenných. Budeme hovoriť, že funkcia f je **implikant funkcie** g , ak $J(f) \subset J(g)$. V súlade s touto terminológiou, ak je funkcia f daná B-výrazom $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a funkcia g B-výrazom $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, budeme hovoriť, že B-výraz $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **implikant B-výrazu** $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. V tomto prípade budeme tiež hovoriť, že B-výraz $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **implikant funkcie** g .

Z definície implikanta vyplýva, že každý súčinový člen z NDF funkcie f je implikantom funkcie f .

Definícia 2.32. Súčinový člen $S(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$, ktorý je implikantom booleovskej funkcie $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$, sa nazýva **prostý implikant** (**prvoimplikant**) **funkcie** f , ak po nahradení hociktorého písmena vyskytujúceho sa v S jednotkou, dostaneme súčinový člen, ktorý už nie je implikantom funkcie f .

Príklad 2.45. Nech $f(x, y, z) = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$. Je zrejmé, že $S(x, y, z) = xyz$ je implikant tejto funkcie. Budeme vyšetrovať, či je to aj prostý implikant.

RIEŠENIE. Súčinový člen xyz pokrýva izolovaný bod $(1, 1, 1)$. Ak v S nahradíme písmeno z jednotkou, dostaneme súčinový člen $T(x, y, z) = xy$. Ako vidieť aj z Karnaughovej mapy funkcie f (obr.58), pre množiny jednotkových bodov platí $J(S) \subset J(T) \subset J(f)$. Preto podľa definície súčinový člen T je implikant funkcie f a S nie je prostý implikant tejto funkcie. Funkciu f zrejme môžeme vyjadriť v tvare $f(x, y, z) = xy + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$. ■



OBR. 58. Implikanty T a S funkcie f z príkladu 2.45

Príklad 2.46. Zistíme, či súčinový člen xy je prostý implikant funkcie $f(x, y, z) = xy + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$.

RIEŠENIE. Otázka je, či môžeme z člena xy vynechať buď x alebo y a či pritom zvyšok zostane implikantom funkcie f . Odpoveď je jednoduchá, ak si uvedomíme, aké sú množiny jednotkových bodov funkcie f a súčinových členov $S(x, y, z) = y$, $T(x, y, z) = x$. Zrejme

$$\begin{aligned} J(S) &= (*, 1, *) = \{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \\ J(T) &= (1, *, *) = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \\ J(f) &= \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Vidíme, že $J(S) \not\subset J(f)$, $J(T) \not\subset J(f)$. To znamená, že S, T nie sú implikanty funkcie f , a preto súčinový člen xy je prostý implikant funkcie f . ■

Vyhľadávať prosté implikanty spôsobom uvedeným v predchádzajúcich dvoch príkladoch je nepraktické. Pritom prosté implikanty majú pri hľadaní MNDF funkcie dôležitú úlohu.

Veta 2.18. Nech $U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m S_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je MNDF funkcie $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$. Potom každý súčinový člen $S_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pre $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ je prostým implikantom funkcie f .

DÔKAZ. Pre každé $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{B}^n$ je $f(x) = U(x) = S_1(x) + S_2(x) + \dots + S_m(x)$. Nech pre $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ súčinový člen $S_i(x)$ obsahuje n_i písmen. Potom MNDF $U(x)$ obsahuje $k = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ písmen, čo je najmenší počet písmen zo všetkých NDF funkcie f . Predpokladajme teraz, že niektorý súčinový člen $S_i(x)$ nachádzajúci sa v MNDF $U(x)$ nie je prostým implikantom funkcie f . Teda v súčinovom člene $S_i(x)$ existuje také písmeno, že po jeho nahradení jednotkou dostaneme súčinový člen $T_i(x)$, ktorý je opäť implikantom funkcie f . To však znamená, že platí

$$J(S_i) \subset J(T_i) \subset J(f).$$

Z tejto vlastnosti vyplýva

$$J(S_i + T_i) = J(S_i) \cup J(T_i) = J(T_i),$$

$$J(T_i + f) = J(T_i) \cup J(f) = J(f),$$

a preto platí

$$S_i(x) + T_i(x) = T_i(x),$$

$$T_i(x) + f(x) = f(x).$$

Na základe týchto vlastností dostávame

$$\begin{aligned} f(x) &= T_i(x) + f(x) = T_i(x) + S_1(x) + \dots + S_{i-1}(x) + S_i(x) + S_{i+1}(x) + \dots + S_m(x) = \\ &= S_1(x) + \dots + S_{i-1}(x) + T_i(x) + S_{i+1}(x) + \dots + S_m(x). \end{aligned}$$

Získali sme NDF funkcie f , ktorá má

$$n_1 + \dots + n_{i-1} + (n_i - 1) + n_{i+1} + \dots + n_m = k - 1$$

písmen. To je spor s minimálnosťou čísla k . Preto každý súčinový člen v MNDF danej funkcie musí byť prostým implikantom. $\square$

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že pri hľadaní MNDF danej booleovskej funkcie môžeme postupovať takto:

1. Nájdeme všetky prosté implikanty danej funkcie.
2. Z nájdenných prostých implikantov zostavíme všetky NDF danej funkcie.
3. Spomedzi zostavených NDF vyberieme všetky MNDF.

Pri riešení tejto úlohy je možné použiť Quine - McCluskeyov algoritmus (je uvedený napr. v [1]), v ktorom sa vychádza z UNDF danej funkcie. My si ukážeme, ako je možné riešiť túto úlohu pomocou Karnaughových máp. Tu si treba uvedomiť, že *prostý implikant funkcie f je súčinový člen, ktorý pokrýva 2^k -ticu jednotkových bodov funkcie f , pričom táto 2^k -tica nie je časťou žiadnej 2^{k+1} -tice jednotkových bodov funkcie f .*

Príklad 2.47. Všetky prosté implikanty funkcie $f(x, y, z) = (x+y)\bar{z} + x\bar{y}$ sú vyznačené na Karnaughovej mape na obr. 57h. Všimnime si, že NDF $y\bar{z} + x\bar{y} + x\bar{z}$, ktorá obsahuje všetky prosté implikanty funkcie f , nie je v tomto prípade MNDF tejto funkcie. $\blacksquare$

Definícia 2.33. Normálna disjunktívna forma booleovskej funkcie f , ktorá je súčtom všetkých prostých implikantov tejto funkcie, sa nazýva **skrátená normálna disjunktívna forma funkcie f** , skrátene SNDF.

Je zrejmé, že SNDF vždy existuje a je až na poradie prostých implikantov jednoznačne určená. Ako sme videli v predošlom príklade, SNDF nemusí byť MNDF.

Definícia 2.34. Nech $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je NDF booleovskej funkcie $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$, pre ktorú platí:

1. Každý súčinový člen, ktorý sa nachádza v tejto NDF (s koeficientom rovnajúcim sa 1), je prostý implikant funkcie f .
2. Ak v danej NDF vynecháme hociktorý súčinový člen, dostaneme B-výraz, ktorý už neurčuje funkciu f .

V takomto prípade budeme hovoriť, že $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **iredundantná normálna disjunktívna forma funkcie f** , skrátene INDF.

Uvedomme si, že pre každý prostý implikant nachádzajúci sa v INDF, musí existovať jednotkový bod funkcie, ktorý je pokrytý len týmto jediným prostým implikantom spomedzi všetkých implikantov nachádzajúcich sa v INDF (v opačnom prípade by sme tento prostý implikant mohli z INDF vynechať). Z definície INDF a MNDF ďalej vyplýva, že MNDF danej funkcie je zároveň INDF tejto funkcie.

Nájsť INDF danej funkcie pomocou Karnaughovej mapy, znamená vybrať také konfigurácie jednotkových bodov funkcie f , že

1. *každý jednotkový bod funkcie sa musí nachádzať v aspoň jednej vybranej konfigurácii,*
2. *žiadna vybraná konfigurácia nie je časťou ľubovoľnej inej konfigurácie jednotkových bodov funkcie f ,*
3. *pre každú vybranú konfiguráciu existuje jednotkový bod funkcie, ktorý sa nachádza iba v tejto konfigurácii.*

MNDF funkcie f je jej INDF s najmenším počtom písmen.

Pri vyhľadávaní INDF danej funkcie, je vhodné v prvom rade uvažovať o prostých implikantoch, ktoré sa musia nachádzať v každej INDF tejto funkcie. Sú to takéto prosté implikanty:

Definícia 2.35. Prostý implikant $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkcie $f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ sa nazýva **nevyhnutný prostý implikant funkcie f** , ak existuje jednotkový bod funkcie f , ktorý je jednotkovým bodom jedine prostého implikanta $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spomedzi všetkých prostých implikantov tejto funkcie.

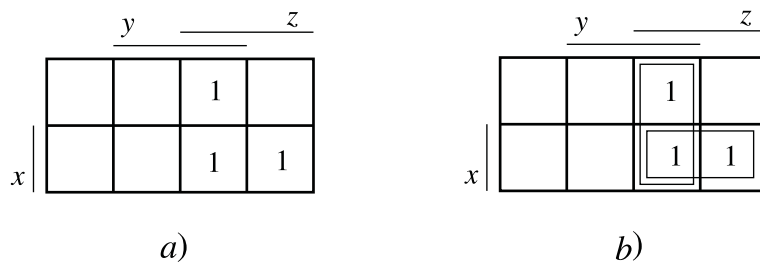
NDF, ktorá je súčtom všetkých nevyhnutných prostých implikantov funkcie f , nazývame **jadro funkcie f** .

Príklad 2.48. Nájdime jadro funkcie

$$(1) f(x, y, z) = \bar{x}yz + xyz + x\bar{y}z,$$

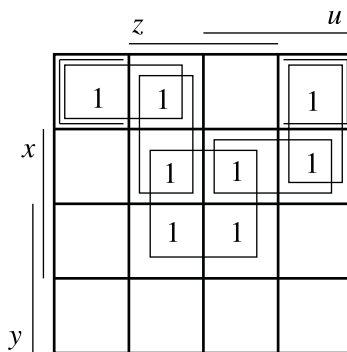
$$(2) f(x, y, z, u) = \bar{x}\bar{y}\bar{u} + \bar{y}z\bar{u} + x\bar{y}u + \bar{y}\bar{z}u + xyz.$$

RIEŠENIE. 1. Karnaughova mapa funkcie f je na obr. 59a. Jednotka v prvom riadku a treťom stĺpci sa nachádza v dvojici (na obr. 59b je v treťom stĺpci), ktorá nie je časťou žiadnej štvorice jednotkových bodov funkcie f . Táto dvojica je preto pokrytá prostým implikantom a je ním súčinový člen yz . Uvedený jednotkový bod sa nenachádza už v žiadnej inej konfigurácii pokrytej prostým implikantom, preto yz je nevyhnutný prostý implikant. Podobne jednotkový bod v druhom riadku a štvrtom stĺpci sa nachádza v jedinej konfigurácii, ktorá je pokrytá prostým implikantom. Je to dvojica v druhom riadku (obr. 59b), ktorá je pokrytá nevyhnutným prostým implikantom xz . B-výraz $U(x, y, z) = yz + xz$ je teda jadro funkcie f . Keďže vyznačené dvojice obsahujú všetky jednotkové body funkcie f , je $U(x, y, z)$ jedinou INDF tejto funkcie, a teda aj MNDF.



OBR. 59. a) Karnaughova mapa funkcie f
b) prosté implikanty funkcie f

2. Jednotkový bod v 1. riadku a 1. stĺpci Karnaughovej mapy funkcie f na obr. 60 sa nachádza v dvoch rôznych dvojiciach pokrytých prostými implikantmi $\bar{x}\bar{y}z$ a $\bar{x}\bar{y}\bar{u}$. Podobne každý jednotkový bod v 1. a 2. riadku je aspoň v dvoch konfiguráciách pokrytých prostými implikantmi. Až jednotkové body v treťom riadku sú v jedinej konfigurácii (je to štvorica) pokrytej prostým implikantom xz . Toto je teda jediný nevyhnutný prostý



OBR. 60. Prosté implikanty funkcie f

implikant. Jadrom funkcie f je preto B-výraz $V(x, y, z, u) = xz$. V tomto prípade jadro nie je NDF funkcie f , lebo množiny jednotkových bodov $J(V)$ a $J(f)$ sú rôzne. ■

Nevyhnutné prosté implikanty funkcie nemusia existovať. Preto jadro funkcie sa môže rovnať nule. Ďalej je zrejmé, že každá INDF (a teda aj MNDF) musí obsahovať jadro funkcie. Ďalšie dopĺňanie jadra na INDF robíme pomocou voľby jednotlivých alternatív výberu prostých implikantov, pričom vo všeobecnosti treba preskúmať všetky možné alternatívy.

Príklad 2.49. Nájdime MNDF funkcie $f(x, y, z, u) = \bar{x}\bar{y}\bar{u} + \bar{y}z\bar{u} + x\bar{y}u + \bar{y}\bar{z}u + xyz$ (funkcia z druhej časti predošlého príkladu).

RIEŠENIE. Na obr. 60 sú znázornené všetky prosté implikanty funkcie f . Odtiaľ vyplýva, že

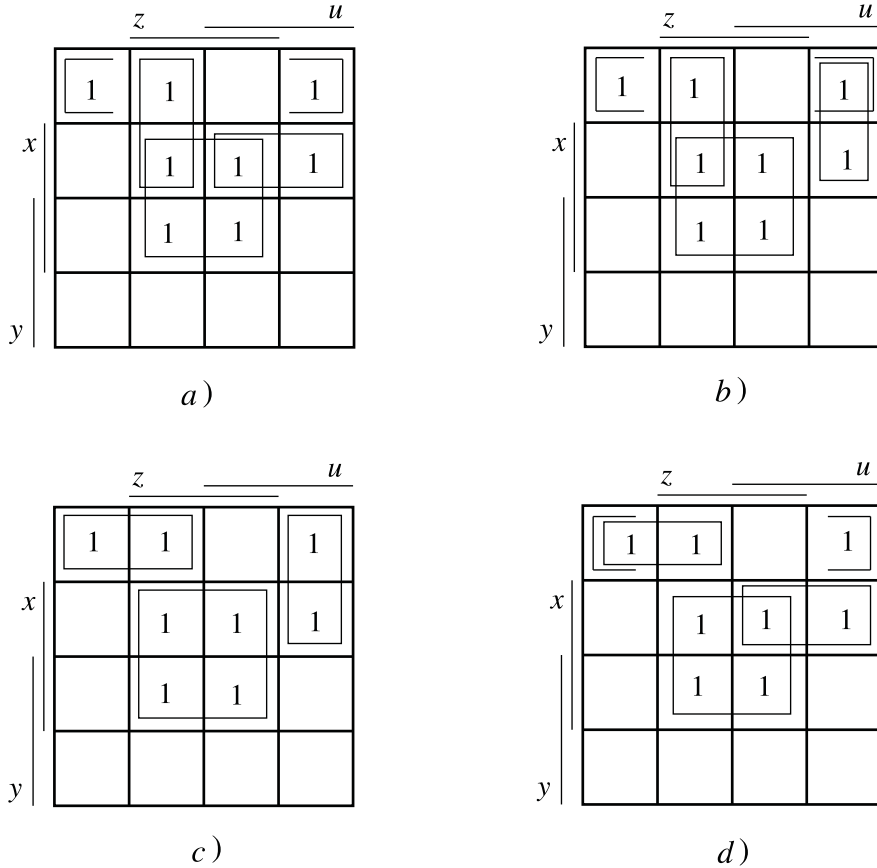
$$U(x, y, z, u) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{u} + \bar{y}z\bar{u} + x\bar{y}u + \bar{y}\bar{z}u + xz$$

je SNDF tejto funkcie. Nie je to však INDF, pretože napr. prostý implikant $x\bar{y}u$ pokrýva množinu jednotkových bodov, z ktorých každý sa nachádza aj v inej konfigurácii jednotkových bodov funkcie f . Už vieme, že štvorica je nevyhnutná, preto sa bude vyskytovať v každej Karnaughovej mape, na ktorej je vyznačená INDF funkcie f . Jednotkový bod v prvom riadku a prvom stĺpci mapy, t.j. $(0, 0, 0, 0)$, je pokrytý dvoma rôznymi prostými implikantmi.

1. Do INDF vyberme z nich najprv $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ a nevyberme $\bar{x}\bar{y}\bar{u}$ (obr. 61a, b). Potom jednotkový bod $(0, 0, 1, 0)$ (v prvom riadku a druhom stĺpci) musíme pokryť prostým implikantom $\bar{y}z\bar{u}$. Ostáva nám pokryť už len jednotkový bod $(1, 0, 0, 1)$ (druhý riadok, štvrtý stĺpec), čo môžeme urobiť prostým implikantom $x\bar{y}u$ (obr. 61a) alebo $\bar{y}\bar{z}u$ (obr. 61b). Dostávame tak dve INDF funkcie f :

$$\text{INDF}_1(f) = xz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{y}z\bar{u} + x\bar{y}u,$$

$$\text{INDF}_2(f) = xz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{y}z\bar{u} + \bar{y}\bar{z}u.$$



OBR. 61. INDF funkcie f

2. Vyberme teraz $\bar{x}\bar{y}\bar{u}$ a nevyberme $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ (obr. 61c). V takom prípade jednotkový bod $(0, 0, 0, 1)$ (prvý riadok, štvrtý stĺpec) môžeme pokryť iba prostým implikantom $\bar{y}\bar{z}u$. A keďže každý jednotkový bod je pokrytý niektorým vybraným prostým implikantom, získali sme ďalšiu INDF:

$$\text{INDF}_3(f) = xz + \bar{x}\bar{y}\bar{u} + \bar{y}\bar{z}u.$$

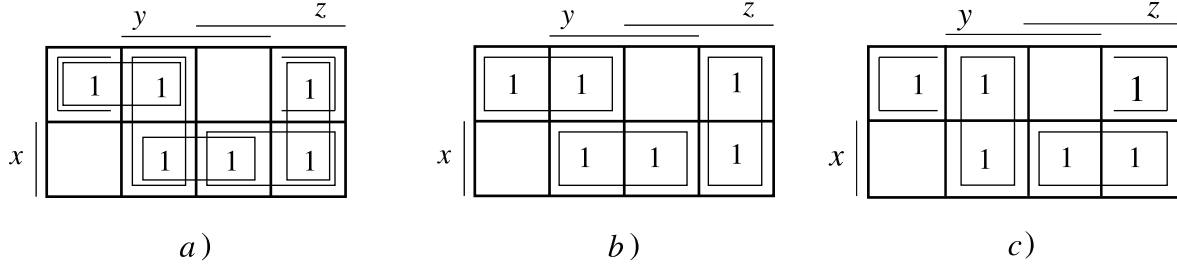
3. Do INDF vyberme teraz obidva prvoimplikanty $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ aj $\bar{x}\bar{y}\bar{u}$ (obr. 61d). Potrebujeme ešte pokryť jednotkový bod $(1, 0, 0, 1)$, čo je možné urobiť prvoimplikantom $\bar{y}\bar{z}u$ alebo $x\bar{y}u$. Ak by sme vybrali prvý z nich, stal by sa prostý implikant $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ nadbytočný, lebo jeho jednotkové body by boli pokryté inými vybranými prostými implikantmi ($\bar{x}\bar{y}\bar{u}, \bar{y}\bar{z}u$). Vyberieme teda $x\bar{y}u$ a dostávame štvrtú INDF:

$$\text{INDF}_4(f) = xz + \bar{x}\bar{y}\bar{u} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}u.$$

MNDF funkcie f je zrejme $\text{INDF}_3(f) = xz + \bar{x}\bar{y}\bar{u} + \bar{y}\bar{z}u$, čo sa dalo v tomto prípade odhadnúť z Karnaughovej mapy priamo, bez hľadania všetkých INDF. ■

Príklad 2.50. Nájdime MNDF funkcie $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{z} + y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + xz + xyz$.

RIEŠENIE. SNDF tejto funkcie je zobrazená na obr. 62a. Zároveň je tu vidieť, že jadro funkcie je nulové, lebo každý jednotkový bod sa nachádza v dvoch dvojiciach, ktoré sú pokryté prostými implikantmi. Preto, ak chceme nájsť INDF, musíme aspoň jednu dvojicu vynechať.



OBR. 62. SNDF a dve INDF funkcie f z príkladu 2.50

1. Vynechajme dvojicu pokrytú členom $\bar{x}\bar{y}$. Potom musíme vybrať dvojicu pokrytú členom $\bar{x}\bar{z}$ a $\bar{y}z$ (obr. 62b). Aby sme získali INDF, stačí už len k dvom vybraným dvojiciam pridať dvojicu pokrytú prostým implikantom xy alebo dve dvojice pokryté prvoimplikantmi $y\bar{z}$, xz . Nájdene INDF sú

$$\begin{aligned} \text{INDF}_1(f) &= \bar{x}\bar{z} + \bar{y}z + xy, \\ \text{INDF}_2(f) &= \bar{x}\bar{z} + \bar{y}z + y\bar{z} + xz. \end{aligned}$$

Keď na začiatku vynecháme prostý implikant xz získame opäť $\text{INDF}_1(f)$ a

$$\text{INDF}_3(f) = \bar{x}\bar{y} + y\bar{z} + xy + \bar{y}z.$$

Podobne, keď na začiatku vynecháme prostý implikant $y\bar{z}$, dostaneme opäť $\text{INDF}_1(f)$ a

$$\text{INDF}_4(f) = \bar{x}\bar{z} + xy + xz + \bar{x}\bar{y}.$$

2. Vynechajme dvojicu pokrytú členom $\bar{x}\bar{z}$. Potom musíme do Karnaughovej mapy zaradiť dvojice pokryté implikantmi $\bar{x}\bar{y}$ a $y\bar{z}$ (obr. 62c). Teraz už stačí pridať dvojicu pokrytú prostým implikantom xz a dostaneme

$$\text{INDF}_5(f) = \bar{x}\bar{y} + y\bar{z} + xz,$$

alebo dve dvojice pokryté prvoimplikantmi xy , $\bar{y}z$ a dostaneme $\text{INDF}_3(f)$.

Keď na začiatku vynecháme prostý implikant xy , dostaneme $\text{INDF}_5(f)$ a $\text{INDF}_2(f)$.

Podobne, keď na začiatku vynecháme prvoimplikant $\bar{y}z$, dostaneme $\text{INDF}_5(f)$ a $\text{INDF}_4(f)$.

Najmenší počet písmen (6) majú $\text{INDF}_1(f)$ a $\text{INDF}_5(f)$, sú to teda MNDF danej funkcie. ■

Na hľadanie minimálnej normálnej konjunktívnej formy by sa dala použiť podobná metóda ako na hľadanie MNDF. Urobíme to však inakšie. Využijeme vzťah medzi MNKF funkcie f a MNDF funkcie $\bar{f}$. Všimnime si najprv fakt: Ak

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 y_2 \dots y_n, \text{ kde } y_i \in \{x_i, \bar{x}_i, 1\},$$

je súčinový člen, tak jeho komplement

$$\overline{S(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n$$

je ekvivalentný s

$$\tilde{S}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n,$$

čo je súčtový člen tej istej dĺžky ako $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Nech f je booleovská funkcia n premenných a

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m S_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

je MNDF booleovskej funkcie $\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$. Počet písmen v MNDF nech je p . Pre funkciu f potom platí

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}} = \overline{\sum_{i=1}^m S_i(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \prod_{i=1}^m \tilde{S}_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Vzhľadom k tomu, že $\tilde{S}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sú súčtové členy, je B-výraz

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^m \tilde{S}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

NKF funkcie f . Navyše počet písmen v B-výraze $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je ten istý ako v B-výraze $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, teda p . Ukážeme teraz, že $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je MNKF funkcie f . Predpokladajme, že tomu tak nie je a že MNKF funkcie f je $\prod_{i=1}^r T_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Počet písmen v nej nech je q . Potom $q < p$ a

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{\prod_{i=1}^r T_i(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \sum_{i=1}^r \tilde{T}_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

pričom $\tilde{T}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n$, ak $T_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, $y_j \in \{x_j, \bar{x}_j, 0\}$. To však znamená, že $\sum_{i=1}^r \tilde{T}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je NDF funkcie s počtom písmen q ,

čo je v spore s tým, že MNDF funkcie $\bar{f}$ je $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s počtom písmen p . Tým sme dokázali tvrdenie:

Veta 2.19. Nech f je booleovská funkcia n premenných a

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m S_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

je MNDF funkcie $\bar{f}$. Potom

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^m \tilde{S}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

je MNKF funkcie f , pričom ak

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 y_2 \dots y_n, \quad y_j \in \{x_j, \bar{x}_j, 1\},$$

tak

$$\tilde{S}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n.$$

□

Príklad 2.51. Nájdime MNKF funkcie $g(x, y, z) = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$.

RIEŠENIE. Zostrojme najprv Karnaughove mapy funkcie g a $\bar{g}$ (obr. 63). Ak porovnáme Karnaughovu mapu funkcie $\bar{g}$ s Karnaughovou mapou na obr. 62a, vidíme, že funkcia $\bar{g}$ a funkcia f z predchádzajúceho príkladu sú rovnaké. Preto

$$U_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{z} + \bar{y}z + xy \text{ a } U_2(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} + y\bar{z} + xz$$

	y		z	
	0	0	1	0
x	1	0	0	0
a)				

	y		z	
	1	1	0	1
x	0	1	1	1
b)				

OBR. 63. Karnaughova mapa a) funkcie g , b) funkcie $\bar{g}$.

sú MNDF funkcie $\bar{g}$. Potom podľa predchádzajúcej vety sú B-výrazy

$$V_1(x, y, z) = (x + z)(y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y}) \text{ a } V_2(x, y, z) = (x + y)(\bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{z})$$

MNKF funkcie g . ■

