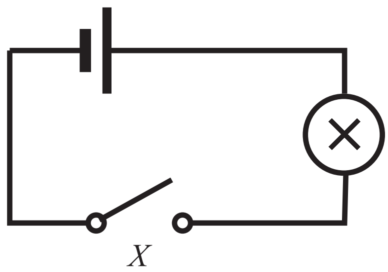
KAPITOLA 3

Konečné automaty

1. Definícia konečného automatu

Príklad 3.1. Uvažujme o obvode z obr. 1. Predpokladajme, že v tomto obvode je zaradený zdroj elektrického prúdu, žiarovka a tlačidlový kľúč X, ktorý pri stlačení obvod otvorí, ak bol predtým uzavretý, a naopak, pri stlačení obvod uzavrie, ak bol pred stlačením otvorený.



Obr. 1. Ilustrácia príkladu 3.1

Tento obvod ovládame teda prostredníctvom tlačidlového kľúča, ktorý môžeme považovať za vstup do zariadenia, pritom týmto vstupom je dávaný jediný riadiaci povel t – stlač tlačidlový kľúč.

Reakcia tohto obvodu na riadiaci povel sa prejaví na žiarovke, ktorá buď svieti, alebo nesvieti. Teda túto žiarovku môžeme pokladať za výstup uvedeného obvodu, pritom hodnoty tohto výstupu sú s – žiarovka svieti, n – žiarovka nesvieti. Je zrejmé, že výstup tohto zariadenia pri každom vstupnom povele t nebude rovnaký. Závisí to od toho, či bol obvod pred stlačením kľúča otvorený, alebo uzavretý. Teda má zmysel uvažovať o dvoch stavoch tohto zariadenia. Stav o – obvod je otvorený (žiarovka nesvieti), stav u – obvod je uzavretý (žiarovka svieti).

Je zrejmé, že po každom vstupe t sa mení stav. Ak bol obvod v stave o, po vstupe t sa stav zmení na u. Ak bol v stave u, po vstupe t sa stav zmení na o. Celú túto situáciu vidíme prehľadne v tabuľke 1, časť a).

	t
o	u
u	o

a)

	t
o	s
u	n

b)

	t	t
o	u	s
u	o	n

c)

o	n
u	s

d)

Tabuľka 1. Prechodová a výstupná funkcia z príkladu 3.1

O výstupe môžeme uvažovať dvoma spôsobmi. Buď uvažujeme o výstupe ako reakcii na vstup, a potom v závislosti od stavu pri každom vstupe môžeme priradiť nasledujúci výstup. Ak bol obvod uzavretý a stlačíme kľúč, obvod otvoríme a žiarovka nesvieti. Ak bol obvod otvorený a stlačíme kľúč, obvod uzavrieme a žiarovka bude svietiť. Túto celkovú situáciu sme opísali pomocou tabuľky 1, časť b). Tabuľky z časti a) a b) v tabuľke 1 zvykneme zapisovať spolu, tak ako sme to urobili v tabuľke 1, časť c).

V tomto príklade môžeme však o výstupe uvažovať aj ako o funkcii, ktorá závisí len od stavu zariadenia. Ak je obvod otvorený, žiarovka nesvieti a ak je obvod uzavretý, žiarovka svieti. Túto situáciu zapisujeme v tabuľke 1, časť d). ■

Príklad 3.2. Uvažujme o situácii, keď máme k dispozícii generátor signálov a, b, ktorý náhodným spôsobom v určených časových okamihoch generuje jeden z uvedených signálov. Teraz chceme opísať zariadenie, ktoré tieto signály číta a na tieto signály reaguje takto: Ak v čase t je vyslaný ten istý signál ako v čase $t-2$, vyšle signál 1, v opačnom prípade vyšle signál 0.

Riešenie. Túto situáciu môžeme ilustrovať takto:

Vstup čítacieho zariadenia: $\dots a\,a\,b\,b\,a\,b\,a\,b\,b\,b\,b\,a\,a\,a\,a\,a\,b\,a\,b\,b\,a\,b\dots$

Výstup čítacieho zariadenia: $.....\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\dots$

Je zrejmé, že pri zariadení, ktoré chceme opísať, má zmysel uvažovať o vstupe X, ktorý prijíma signály a, b a o výstupe Z, ktorým sa vysielajú signály 0 a 1 (pozri obr. 2).

Aby sme vedeli opísať činnosť čítacieho zariadenia v čase t, potrebujeme poznať jeho históriu v čase $t-2$. Za týchto okolností budeme vedieť, ako reaguje zariadenie v čase $t-2$

Obr. 2. Ilustrácia príkladu 3.2

a t. V čase $t+1$ však budeme musieť poznať, aká bola situácia v čase $t-1$. Potom budeme vedieť opísať činnosť čítacieho zariadenia v čase $t-2$, $t-1$, t, $t+1$. Ale je zrejmé, že teraz už budeme vedieť povedať, aký je výstup aj v čase $t+2$, a teda aj v čase $t+3$ atď. Slovom, aby sme vedeli opísať činnosť tohto zariadenia od istého časového okamihu, musíme poznať jeho históriu v predošlých dvoch taktoch. V dvoch taktoch, ktoré nasledujú za sebou, je na vstupe čítacieho zariadenia možný len výskyt týchto dvojíc: aa, ab, ba, bb. Týmto dvojiciam môžeme priradiť štyri stavy čítacieho zariadenia. Stav s_{ab} bude zodpovedať situácii, keď v čase $t-2$ bol na vstupe signál a a v čase $t-1$ signál b. Podobný význam budú mať aj stavy s_{aa}, s_{ba}, a s_{bb}. Teda napríklad, keď v čase t je zariadenie v stave s_{ab} a

Tabuľka 2. Ilustrácia príkladu 1.2

	a	b	a	b
s_{aa}	s_{aa}	s_{ab}	1	0
s_{ab}	s_{ba}	s_{bb}	1	0
s_{ba}	s_{aa}	s_{ab}	0	1
s_{bb}	s_{ba}	s_{bb}	0	1

na vstupe sa objaví signál a, zariadenie na výstupe generuje signál 1 a prechádza do stavu s_{ba}. Ak v stave s_{ab} vstúpi signál b, tak na výstupe sa objaví 0 a zariadenie prejde do stavu

s_{bb}. Celú túto situáciu opisujeme v tabuľke 2, kde v prvej časti opisujeme zmenu stavov a v druhej časti ukazujeme reakciu výstupu na jednotlivé vstupy pri daných stavoch. ■

V predošlých dvoch príkladoch sme sa zaoberali zariadeniami, ktorých opis je možné zhrnúť do jedného modelu, ktorý budeme nazývať konečný automat.

Definícia 3.1. Nech $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ a $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ sú konečné množiny. Nech $\delta : S \times X \to S$ a $\lambda : S \times X \to Z$ sú dané funkcie. Potom päticu $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ budeme nazývať ***konečný automat***.

Množinu X nazývame ***vstupná abeceda*** a jej prvky nazývame ***písmená*** vstupnej abecedy (vstupy). Množinu S nazývame ***množina stavov*** automatu A a jej prvky nazývame ***stavy*** automatu A. Množinu Z nazývame ***výstupná abeceda*** a jej prvky sú ***písmená*** výstupnej abecedy (výstupy). Funkciu $\delta : S \times X \to S$, pomocou ktorej je každému stavu S a vstupnému písmenu priradený (nový) stav, nazývame ***prechodová funkcia*** automatu A. Funkciu $\lambda : S \times X \to Z$, pomocou ktorej je každému stavu a vstupnému písmenu priradené výstupné písmeno, sa nazýva ***výstupná funkcia*** automatu A.

V príklade 3.1 je prechodová a výstupná funkcia daná pomocou tabuľky 1, časť c). Prechodová a výstupná funkcia z príkladu 3.2 sú dané v tabuľke 2.

Poznámka 3.1. V tejto učebnici sa budeme zaoberať iba konečnými automatmi. Preto slovo „konečný“ budeme v názve automatu vynechávať.

Ako sme videli v príklade 3.1, môžeme uvažovať o dvoch druhoch výstupných funkcií. V prvom prípade sme uvažovali o výstupnej funkcii, ktorej hodnoty závisia od stavu a vstupu. V druhom prípade sme uvažovali o funkcii, ktorej hodnoty závisia iba od stavu. To je aj dôvod, prečo sa robia rozdiely v definícii automatu. Automat z definície 3.1 sa presnejšie nazýva ***Mealyho automat***. Okrem Mealyho automatov sa budeme zaoberať aj tzv. Moorovými automatmi.

Definícia 3.2. ***Moorov automat*** je pätica $A = (S, X, Z, \delta, \mu)$, kde S, X, Z a δ sú zhodné s im zodpovedajúcimi objektami v definícii Mealyho automatu. Výstupná funkcia μ priraďuje stavu výstup, teda $\mu : S \to Z$.

Pri automatoch predpokladáme činnosť v diskrétnom čase. Teda uvažujeme o časových okamihoch (taktoch) $t_1, t_2, \ldots$, v ktorých sa vzhľadom na vstup a stav v danom okamihu generuje výstup (patriaci ešte k danému časovému okamihu) a nastavuje sa nový stav pre nasledujúci časový takt. Pretože pri práci automatu nie sú dôležité hodnoty t_i, ale iba ich poradie, budeme v budúcnosti uvažovať iba o číslach taktov 1, 2, 3, ... Pritom intervaly medzi jednotlivými taktami nemusia byť rovnaké. Pri tejto časovej interpretácii môžeme písať:

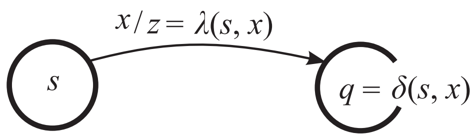
$$\begin{aligned} &\delta(s(t), x(t)) = s(t+1)\ , && \\ &\lambda(s(t), x(t)) = z(t) && \text{pri Mealyho automate,} \\ &\mu(s(t)) = z(t) && \text{pri Moorovom automate.} \end{aligned}$$

Pritom predpokladáme, že priradenie výstupu sa uskutočňuje počas jedného taktu (nie v jedinom časovom okamihu).

Z definície automatu vyplýva, že automat je úplne špecifikovaný pomocou tabuliek prechodovej a výstupnej funkcie. V týchto tabuľkách sa totiž nachádzajú aj množiny X, S, Z. Ku každému (konečnému) automatu je zvykom priradiť aj graf.

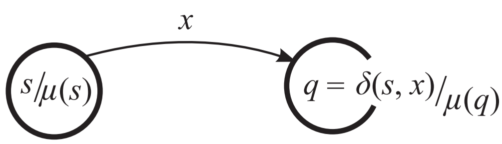
Definícia 3.3. Nech je daný automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$. ***Grafom automatu*** A budeme nazývať orientovaný graf $G = (V, H, f)$, ktorý je definovaný takto: Množina vrcholov $V = S$. Množina hrán H je zhodná s množinou „prechodov“ medzi stavmi, pričom prechod medzi stavmi s a q je definovaný práve vtedy, keď existuje písmeno $x \in X$ také, že $\delta(s, x) = q$. Potom vzťah incidencie je funkcia $f : H \to S \times S$, ktorá je definovaná takto: $f(h) = (s, q)$ práve vtedy, keď h je prechod medzi stavmi s a q (t.j. existuje $x \in X$ také, že $\delta(s, x) = q$).

Graf automatu budeme kresliť ako ohodnotený graf. Ak h je hrana (prechod) spájajúca vrcholy s a q, na základe podmienky $\delta(s, x) = q$ budeme k tejto hrane pripisovať označenie x a k tomuto označeniu ešte aj hodnotu výstupu $z = \lambda(s, x)$ (pozri obr. 3).



Obr. 3. Ilustrácia definície grafu automatu

V prípade Moorovho automatu definujeme graf automatu rovnako ako v prípade Mealyho automatu. Pri ohodnocovaní hrán však k hrane pripisujeme len hodnotu vstupu, ktorý spôsobuje príslušný prechod z jedného stavu do druhého. Výstup zapisujeme k jednotlivým stavom (vrcholom). Teda ak $\delta(s, x) = q$, potom dvojica vrcholov s, q bude spojená hranou tak, ako to vidno na obr. 4.



Obr. 4. Ilustrácia definície grafu Moorovho automatu

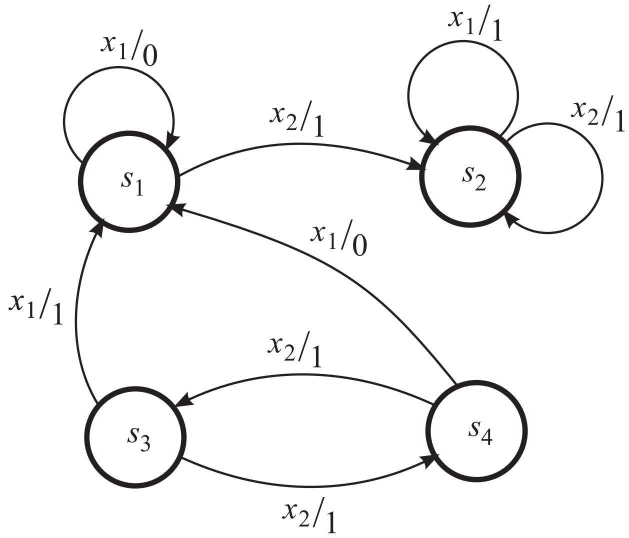
Príklad 3.3. Nakreslíme graf automatu A, ktorý je daný pomocou tabuľky 3.

Tabuľka 3. Tabuľka automatu z príkladu 3.3

	δ		λ	
	x_1	x_2	x_1	x_2
s_1	s_1	s_2	0	1
s_2	s_2	s_2	1	1
s_3	s_1	s_4	1	1
s_4	s_1	s_3	0	1

Riešenie. Je zrejmé, že ide o automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$, kde $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $X = \{x_1, x_2\}$, $Z = \{0, 1\}$. Funkcie δ a λ sú dané pomocou tabuľky 3.

Graf tohto automatu má štyri vrcholy s_1, s_2, s_3, s_4, pričom z každého vrchola musia vychádzať práve dve hrany, ktoré sú ohodnotené vstupmi x_1, a x_2. Graf tohto automatu je na obr. 5. ■



Obr. 5. Graf automatu z príkladu 3.3

Príklad 3.4. Nech Moorov automat A je daný pomocou tabuľky 4. Nakreslíme graf tohto automatu.

Riešenie. Graf bude mať tri vrcholy q_1, q_2, q_3, pritom z každého vrchola budú vychádzať práve tri hrany, ktoré budú ohodnotené vstupnými písmenami a, b, c (pozri

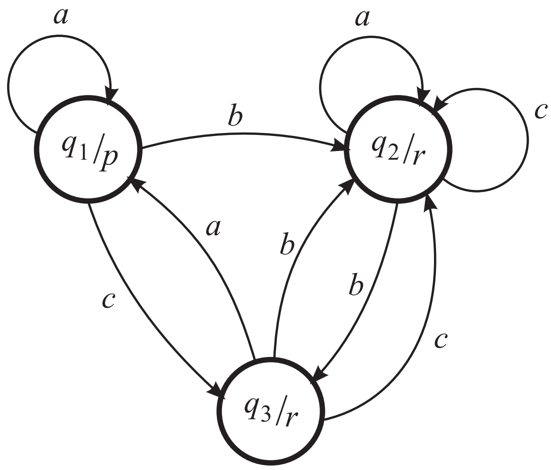
Tabuľka 4. Tabuľka automatu z príkladu 3.4

	δ			
	a	b	c	μ
q_1	q_1	q_2	q_3	p
q_2	q_2	q_3	q_2	r
q_3	q_1	q_2	q_2	r

obr. 6). ■

Uvažujme teraz o vstupnej abecede $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ automatu A a o tom, že daný automat pracuje v taktoch, ktoré sú priradené časovým okamihom očíslovaným v poradí $1, 2, 3, \ldots$. Predpokladajme, že v čase $t = 1$ bude na vstupe automatu napríklad písmeno x_7. Môžeme písať $x(1) = x_7$. Nech v čase $t = 2$ je na vstupe písmeno x_4 a v čase $t = 3$ je to opäť x_4. Potom môžeme písať $x(2) = x_4$ a $x(3) = x_4$. Teda počas taktov $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ bola na vstupe automatu postupnosť $x(1)x(2)x(3) = x_7x_4x_4$. Je zrejmé, že má zmysel uvažovať o tom, že počas týchto troch taktov sa na vstupe mohla objaviť ľubovoľná trojica prvkov množiny X (pričom je možné aj opakovanie prvkov v tejto trojici). Ďalej je zrejmé, že môžeme uvažovať o ľubovoľnej konečnej postupnosti taktov $t = 1$, $t = 2, \ldots, t = n$, počas ktorej sa na vstupe objaví konečná postupnosť vstupných písmen $x(1)x(2)\ldots x(n)$. Tieto postupnosti budeme v budúcnosti zapisovať v tvare $x(1)x(2)\ldots x(n) = x^1x^2\ldots x^n$. Napríklad postupnosť $x^1x^2x^3x^4x^5$ môže mať tvar $x_3x_4x_4x_1x_2$. Je to postupnosť vytvorená z piatich vstupných písmen.

Uvažujme o automate $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$, ktorý v čase $t = 1$ je v stave s^1 a na vstup je privedené vstupné písmeno x^1. Uvažujme o tom, že v nasledujúcich okamihoch

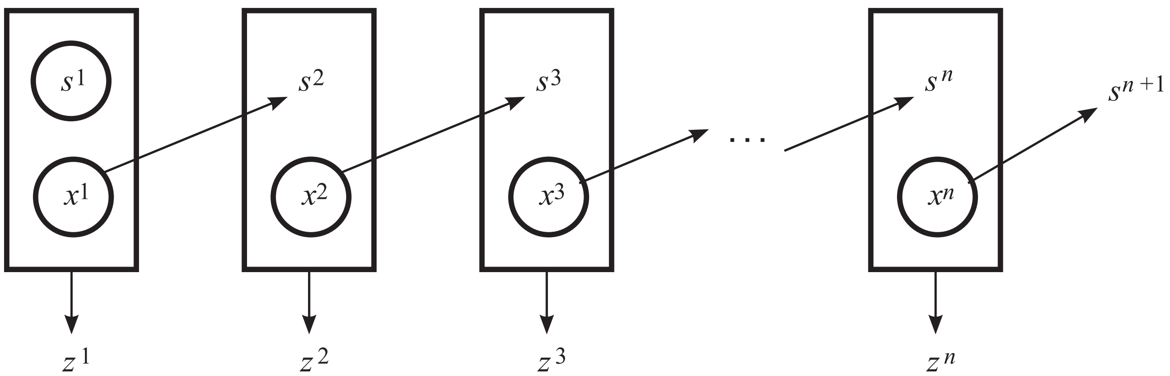


Obr. 6. Graf automatu z príkladu 3.4

postupne privedieme na vstup písmená $x^2, x^3, \dots, x^n$. Teda automat je na začiatku v stave s^1 a v nasledujúcich n taktoch privedieme na vstup vstupné slovo $x^1, x^2, \dots, x^n$ (pozri obr. 7, na ktorom sme dané hodnoty zakrúžkovali). Potom ako odozvu na stav s^1 a vstupné písmeno x^1 dostávame výstupné písmeno $z^1 = \lambda(s^1, x^1)$ a pomocou prechodovej funkcie nasledujúci stav $s^2 = \delta(s^1, x^1)$. Teraz pomocou stavu s^2 a vstupného písmena x^2 dostávame výstupné písmeno z^2 a nový stav s^3. Takto pokračujeme až po n-tý takt, keď dostávame $z^n = \lambda(s^n, x^n)$ a $s^{n+1} = \delta(s^n, x^n)$. Ako reakciu automatu na vstupné slovo $x^1,\ x^2,\ \dots, x^n$ pri začiatočnom stave s^1 dostávame:

1. Postupnosť $s^1, s^2, \dots, s^{n+1}$. Z týchto stavov nás zaujíma iba s^{n+1}, ktorý nám určuje, v akom stave začne automat pracovať, ak sa rozhodneme pokračovať so vstupnými povelmi.
2. Výstupné slovo $z^1, z^2, \dots, z^n$ vo výstupnej abecede Z. Toto slovo nás zaujíma celé, lebo je to vonkajšia reakcia automatu na vstupné slovo. Výstupné slovo nám predstavuje postupnosť riadiacich príkazov automatu, ktoré vydá ako reakciu na vstupné slovo $x^1, x^2, \dots, x^n$.

Má teda zmysel uvažovať o rozšírení definície prechodovej a výstupnej funkcie aj pre prípad, keď vstupné písmeno nahradíme celým slovom zloženým zo vstupných písmen.



Obr. 7. Ilustrácia definície rozšírenej prechodovej a výstupnej funkcie Mealyho automatu

Definícia 3.4. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je Mealyho automat. ***Rozšírenou prechodovou funkciou*** budeme nazývať funkciu $\widehat{\delta} : S \times X^+ \to S$, ktorá je definovaná takto:

a) $\widehat{\delta}(s,x) = \delta(s,x)$ pre každé $s \in S$ a každé $x \in X$.
b) $\widehat{\delta}(s,wx) = \delta(\widehat{\delta}(s,w),x)$ pre každé $s \in S$, $w \in X^+$ a $x \in X$.

Rozšírenou výstupnou funkciou budeme nazývať funkciu $\widehat{\lambda} : S \times X^+ \to Z^+$, ktorá je definovaná takto:

a) $\widehat{\lambda}(s,x) = \lambda(s,x)$ pre každé $s \in S$ a každé $x \in X$.
b) $\widehat{\lambda}(s,wx) = \widehat{\lambda}(s,w)\lambda(\widehat{\delta}(s,w),x)$ pre každé $s \in S$, $w \in X^+$ a $x \in X$.

Rozšírenú prechodovú a výstupnú funkciu sme definovali induktívnym spôsobom. V prvom kroku sme tieto funkcie definovali pre vstupné slová dĺžky 1. Potom za predpokladu, že tieto hodnoty poznáme pre slová dĺžky n, sme ich definovali pre slová dĺžky $n+1$. Napríklad

$$\widehat{\delta}(s^1,x^1x^2) = \delta(\widehat{\delta}(s^1,x^1),x^2) = \delta(\delta(s^1,x^1),x^2) = \delta(s^2,x^2) = s^3,$$

$$\widehat{\lambda}(s^1,x^1x^2) = \widehat{\lambda}(s^1,x^1)\lambda(\widehat{\delta}(s^1,x^1),x^2) = \lambda(s^1,x^1)\lambda(\delta(s^1,x^1),x^2) = z^1\lambda(s^2,x^2) = z^1z^2$$

(pozri obr. 7).

Z definície rozšírených funkcií tiež dostávame:

$$\begin{aligned}&\widehat{\delta}(s,x^1x^2\dots x^n) = \delta(\widehat{\delta}(s,x^1\dots x^{n-1}),x^n) = \delta(\delta(\widehat{\delta}(s,x^1\dots x^{n-2}),x^{n-1}),x^n) = \dots =\\&= \delta(\delta(\delta(\dots\delta(\delta(s,x^1),x^2)\dots),x^{n-2}),x^{n-1}),x^n) = \widehat{\delta}(\delta(s,x^1),x^2\dots x^n) =\\&= \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(s,x^1x^2),x^3\dots x^n) = \dots .\end{aligned}$$

čiže pre každé $s \in S$, $x \in X$, $w \in X^+$, je $\widehat{\delta}(s,xw) = \widehat{\delta}(\delta(s,x),w)$. Takýmto spôsobom sa dá dokázať, že dokonca pre každé $u,v \in X^+$ a každé $s \in S$ je $\widehat{\delta}(s,uv) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(s,u),v)$.

Podobne pre rozšírenú výstupnú funkciu dostávame:

$$\begin{aligned}&\widehat{\lambda}(s,x^1x^2\dots x^n) = \widehat{\lambda}(s,x^1\dots x^{n-1})\lambda(\widehat{\delta}(s,x^1\dots x^{n-1}),x^n) =\\&= \widehat{\lambda}(s,x^1\dots x^{n-2})\lambda(\widehat{\delta}(s,x^1\dots x^{n-2}),x^{n-1})\lambda(\widehat{\delta}(s,x^1\dots x^{n-1}),x^n) = \dots =\\&= \lambda(s,x^1)\lambda(\widehat{\delta}(s,x^1),x^2)\lambda(\widehat{\delta}(s,x^1x^2),x^3)\dots\lambda(\widehat{\delta}(s,x^1\dots x^{n-1}),x^n).\end{aligned}$$

Z toho už vyplýva, že pre každé $x \in X$ a každé $w \in X^+$ je

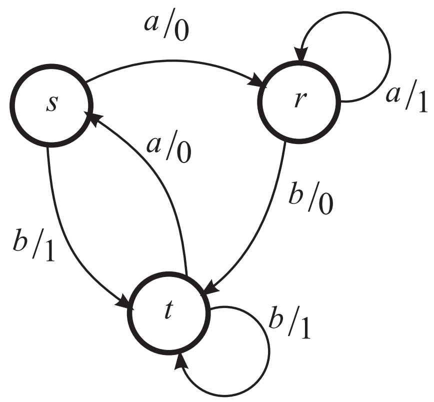
$$\widehat{\lambda}(s,xw) = \lambda(s,x)\widehat{\lambda}(\delta(s,x),w).$$

Pri hľadaní hodnôt rozšírenej prechodovej a výstupnej funkcie s výhodou využijeme graf automatu.

Príklad 3.5. Nech automat A je daný pomocou grafu na obr. 8. Uvažujme o vstupnom slove $w = abba$. Nájdeme $\widehat{\delta}(s,abba)$ a $\widehat{\lambda}(s,abba)$.

RIEŠENIE. $\widehat{\delta}(s,abba)$ je stav daného automatu, v ktorom sa bude nachádzať, keď v stave s postupne na vstup privedieme písmená a,b,b,a. Túto postupnosť, začnúc od stavu s, sledujeme na hranách grafu daného automatu. Zo stavu s pri vstupe a prechádzame do stavu r (t.j. $\delta(s,a) = r$), zo stavu r pri vstupe b do stavu t (t. j. $\delta(r,b) = t$), zo stavu t pri vstupe b do stavu t (t.j. $\delta(t,b) = t$) a zo stavu t pri vstupe a do stavu s (t.j. $\delta(t,a) = s$). Preto $\widehat{\delta}(s,abba) = s$.
Priamy výpočet vyzerá takto:

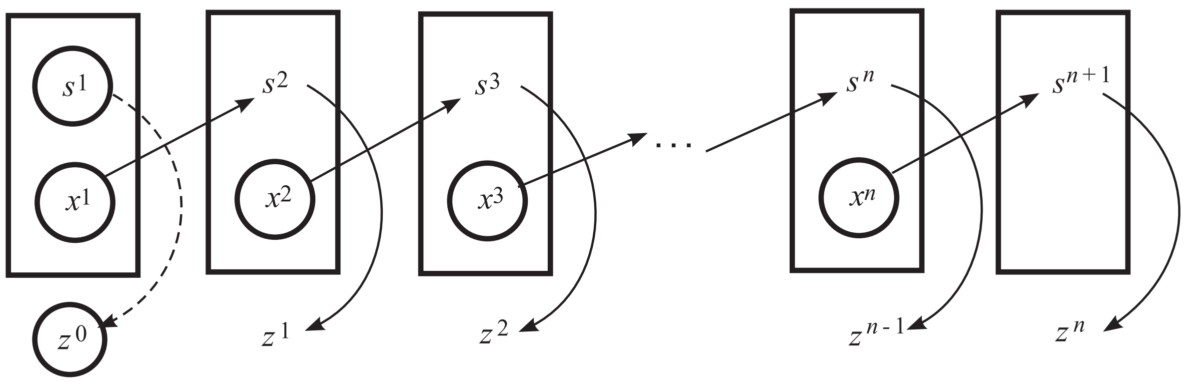
$$\begin{aligned}&\widehat{\delta}(s,abba) = \widehat{\delta}(\delta(s,a),bba) = \widehat{\delta}(r,bba) = \widehat{\delta}(\delta(r,b),ba) =\\&= \widehat{\delta}(t,ba) = \widehat{\delta}(\delta(t,b),a) = \delta(t,a) = s.\end{aligned}$$



OBR. 8. Graf automatu z príkladu 3.5

Zodpovedajúce výstupné signály sa nachádzali na hranách, po ktorých sme prechádzali zo stavu s do stavu r, zo stavu r do stavu t, zo stavu t do stavu t a zo stavu t do stavu s. Preto $\widehat{\lambda}(s, abba) = 0010$. ∎

Rozšírenie prechodovej funkcie pri Moorovom automate definujeme tak isto ako pri Mealyho automate. S rozšírením výstupnej funkcie je to pri Moorovom automate trochu zložitejšie. Uvažujme podobne ako v prípade Mealyho automatu o situácii, keď v stave s^1 na vstup automatu privedieme vstupné slovo $x^1x^2 \dots x^n$ (obr. 9). V tomto prípade prvý výstup $z^0 = \mu(s^1)$ nezávisí od vstupného písmena x^1. Reakcia výstupu na vstup x^1 sa prejaví až pri výstupnom písmene $z^1 = \mu(s^2) = \mu(\delta(s^1, x^1))$. Ďalej z^2 je reakciou na x^2, lebo $z^2 = \mu(s^3) = \mu(\delta(s^2, x^2))$ atď. Z týchto úvah sa nám ponúka táto definícia rozšírenej výstupnej funkcie Moorovho automatu.



OBR. 9. Ilustrácia definície rozšírenej výstupnej funkcie Moorovho automatu

Definícia 3.5. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \mu)$ je Moorov automat. ***Rozšírenou výstupnou funkciou Moorovho automatu*** budeme nazývať funkciu $\widehat{\mu} : S \times X^+ \to Z^+$, ktorá je definovaná takto:

a) $\widehat{\mu}(s, x) = \mu(\delta(s, x))$ pre každé $s \in S$ a každé $x \in X$.

b) $\widehat{\mu}(s, wx) = \widehat{\mu}(s, w)\mu(\widehat{\delta}(s, wx))$ pre každé $s \in S$, každé $x \in X$ a každé $w \in X^+$.

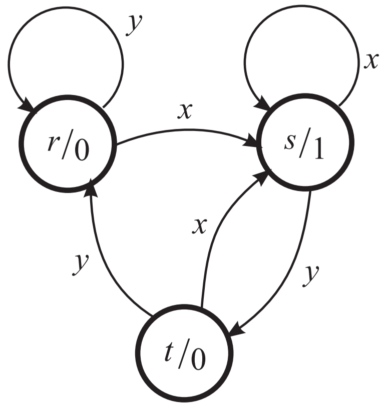
Z definície rozšírenej výstupnej funkcie Moorovho automatu vyplýva, že táto funkcia každému slovu $x^1x^2 \dots x^n$ dĺžky n opäť priradí slovo $z^1z^2 \dots z^n$ dĺžky n. Neberieme totiž do úvahy prvé výstupné písmeno z^0, ktoré závisí od stavu, a nie od prvého písmena v slove $x^1x^2 \dots x^n$.

Pre ľubovoľný stav $s \in S$ a ľubovoľné slovo $x^1x^2 \dots x^n \in X^+$ dostávame:

$$\widehat{\mu}(s, x^1x^2 \dots x^n) = \widehat{\mu}(s, x^1x^2 \dots x^{n-1})\mu(\widehat{\delta}(s, x^1x^2 \dots x^n)) =$$
$$= \widehat{\mu}(s, x^1x^2 \dots x^{n-2})\mu(\widehat{\delta}(s, x^1x^2 \dots x^{n-1}))\mu(\widehat{\delta}(s, x^1x^2 \dots x^n)) = \dots =$$
$$= \mu(\widehat{\delta}(s, x^1))\mu(\widehat{\delta}(s, x^1x^2)) \dots \mu(\widehat{\delta}(s, x^1x^2 \dots x^n)).$$

Opäť je výhodné hodnoty rozšírenej výstupnej funkcie Moorovho automatu získavať pomocou grafu automatu.

Príklad 3.6. Uvažujme o Moorovom automate, ktorý je daný grafom na obr. 10. Počítajme napríklad $\widehat{\mu}(r, xxyx)$.

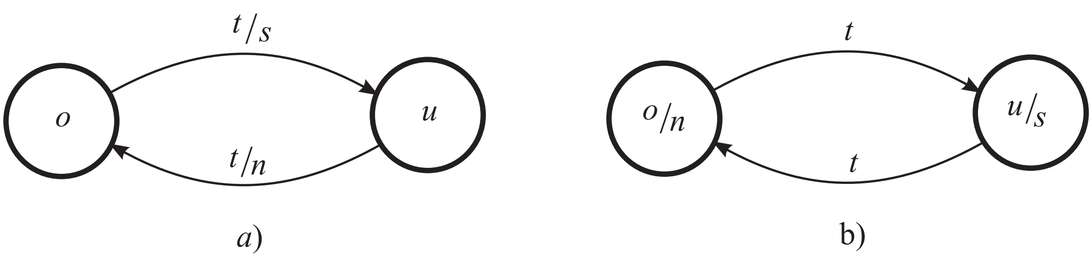


Obr. 10. Graf automatu z príkladu 3.6

Riešenie.
$\widehat{\mu}(r, xxyx) = \mu(\widehat{\delta}(r, x))\mu(\widehat{\delta}(r, xx))\mu(\widehat{\delta}(r, xxy))\mu(\widehat{\delta}(r, xxxyx)) = \mu(s)\mu(s)\mu(t)\mu(s) = 1101.$

Vidíme, že tento výsledok získame, keď v grafe automatu začneme v stave r sledovať hrany, ktoré sú postupne ohodnotené vstupnými písmenami x, x, y, x a tak isto postupne vypisujeme výstupné písmená, ktoré sú priradené stavom, do ktorých jednotlivé hrany na našom postupe vstupujú. ■

Vráťme sa ešte k príkladu 3.1. Teraz vidíme, že na zariadenie z tohto príkladu sme mohli nazerať buď ako na Mealyho automat, ktorý je daný pomocou tabuľky 1, časť c), alebo ako na Moorov automat, ktorého prechodová funkcia je v tabuľke 1, časť a) a výstupná funkcia je daná pomocou tabuľky 1, časť d). Graf uvedeného Mealyho automatu je na obr. 11, časť a), graf Moorovho automatu je na obr. 11, časť b). Vidíme, že tieto



Obr. 11. Grafy automatov z príkladu 3.1

grafy a aj samotné automaty sú do istej miery vysoko viazané tým, že majú spoločnú prechodovú funkciu.

Teraz budeme medzi Moorovými a Mealyho automatmi, ktoré majú podobné vlastnosti, definovať ekvivalenciu.

Definícia 3.6. Nech je daný Mealyho automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ a Moorov automat $\widetilde{A} = (S, X, Z, \delta, \mu)$ (tieto automaty majú rovnaké množiny vstupov, stavov, výstupov a prechodovú funkciu). Nech pre každé $x \in X$ a každé $s \in S$ je $\lambda(s, x) = \widehat{\mu}(s, x)$. Potom budeme hovoriť, že tieto automaty sú ***silno ekvivalentné***.

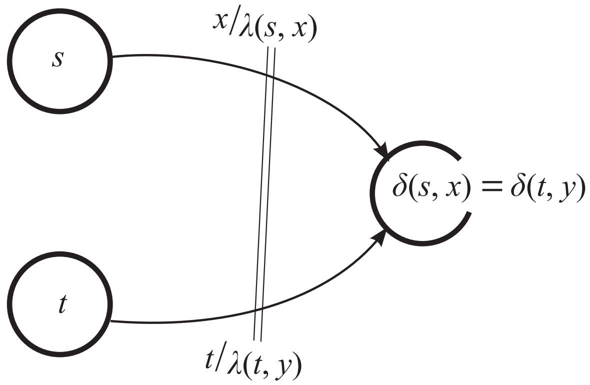
Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je Mealyho a $\widetilde{A} = (S, X, Z, \delta, \mu)$ je Moorov automat a tieto automaty sú silno ekvivalentné. Nech $w = x^1x^2 \dots x^n$ je ľubovoľné vstupné slovo a $s \in S$ je ľubovoľný stav. Potom

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(s, x^1x^2 \dots x^n) = \mu(\widehat{\delta}(s, x^1))\mu(\widehat{\delta}(s, x^1x^2)) \dots \mu(\widehat{\delta}(s, x^1x^2 \dots x^n)) = \\
&= \widehat{\mu}(s, x^1)\widehat{\mu}(\widehat{\delta}(s, x^1), x^2) \dots \widehat{\mu}(\widehat{\delta}(s, x^1x^2 \dots x^{n-1}), x^n) = \\
&= \lambda(s, x^1)\lambda(\widehat{\delta}(s, x^1), x^2) \dots \lambda(\widehat{\delta}(s, x^1x^2 \dots x^{n-1}), x^n) = \\
&= \widehat{\lambda}(s, x^1x^2 \dots x^n)
\end{aligned}$$

To znamená, ak A a $\widetilde{A}$ sú silno ekvivalentné automaty, pre každé $w \in X^+$ a pre každé $s \in S$ je $\widehat{\mu}(s, w) = \widehat{\lambda}(s, w)$.

Ďalej je zrejmé, ak $\widetilde{A} = (S, X, Z, \delta, \mu)$ je Moorov automat, potom k nemu existuje silno ekvivalentný Mealyho automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$. Stačí totiž definovať funkciu $\lambda : S \times X \to S$ pomocou podmienky $\lambda(s, x) = \widehat{\mu}(s, x)$ pre každé $s \in S$ a každé $x \in X$. Teda vidíme, že podmienka existencie silno ekvivalentného Mealyho automatu k danému Moorovmu automatu nekladie na tento Moorov automat žiadne ohraničenie.

Naopak, pre Mealyho automat je to dosť silná podmienka. V prípade, že A a $\widetilde{A}$ sú silno ekvivalentné automaty, z podmienky $\delta(s, x) = \delta(t, y)$ vyplýva $\mu(\delta(s, x)) = \mu(\delta(t, y))$, a teda aj $\widehat{\mu}(s, x) = \widehat{\mu}(t, y)$. Z toho už dostávame $\lambda(s, x) = \lambda(t, y)$. To znamená, že v Mealyho automate podmienka $\delta(s, x) = \delta(t, y)$ implikuje $\lambda(s, x) = \lambda(t, y)$ (pozri obr. 12). Z toho vyplýva: Ak k Mealyho automatu A existuje silno ekvivalentný Moorov automat $\widetilde{A}$, v grafe Mealyho automatu všetky hrany vstupujúce do toho istého stavu sú ohodnotené tým istým výstupným písmenom.



Obr. 12. Ilustrácia silnej ekvivalencie automatov

Ak, naopak, Mealyho automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ má tú istú vlastnosť, že všetky hrany vstupujúce do toho istého stavu sú ohodnotené tým istým výstupným písmenom, t.j. podmienka $\delta(s, x) = \delta(t, y)$ implikuje $\lambda(s, x) = \lambda(t, y)$, môžeme výstupnú funkciu $\mu : S \to Z$ silno ekvivalentného Moorovho automatu definovať takto:

a) Ak pre $s' \in S$ existuje $s \in S$ a $x \in X$ také, že $\delta(s,x) = s'$, definujeme $\mu(s') = \mu(\delta(s,x)) = \lambda(s,x)$. Z podmienky $\delta(s,x) = \delta(t,y)$ implikuje $\lambda(s,x) = \lambda(t,y)$ vyplýva, že funkcia μ je v bode s' dobre definovaná.
b) Ak pre $s' \in S$ neexistuje $s \in S$ a také $x \in X$, že $\delta(s,x) = s'$, (do stavu s' nevstupuje žiadna hrana grafu automatu), definujeme $\mu(s')$ ľubovoľne.

Z prvej podmienky vyplýva, že automaty $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ a $\widetilde{A} = (S, X, Z, \delta, \mu)$ sú silno ekvivalentné, lebo pre každé $s \in S$ a každé $x \in X$ je $\mu(\delta(s,x)) = \lambda(s,x)$ a to znamená, že $\widehat{\mu}(s,x) = \lambda(s,x)$.

Príklad 3.7. Nech Moorov automat je daný pomocou tabuľky 5, časť a). V časti b) tejto tabuľky je daný jediný možný silno ekvivalentný Mealyho automat k danému Moorovmu automatu. Túto tabuľku často píšeme tak, ako je to v tabuľke 5, časti c). Z tohto zápisu lepšie vidieť, že $\delta(s,x) = \delta(t,y)$ implikuje $\lambda(s,x) = \lambda(t,y)$, lebo každý stav vnútri tabuľky je lomený tým istým výstupným písmenom, nech sa nachádza na ktoromkoľvek mieste tabuľky. Tento príznak nám umožňuje aj rozhodnúť, kedy naopak k Mealyho automatu môžeme zostrojiť silno ekvivalentný Moorov automat. ■

Tabuľka 5. Tabuľky automatov z príkladu 3.7

	δ		μ
	a	b	μ
s_1	s_1	s_2	0
s_2	s_3	s_4	1
s_3	s_1	s_4	1
s_4	s_3	s_2	0

a)

	δ		λ	
	a	b	a	b
s_1	s_1	s_2	0	1
s_2	s_3	s_4	1	0
s_3	s_1	s_4	0	0
s_4	s_3	s_2	1	1

b)

	δ/λ	
	a	b
s_1	$s_1/0$	$s_2/1$
s_2	$s_3/1$	$s_4/0$
s_3	$s_1/0$	$s_4/0$
s_4	$s_3/1$	$s_2/1$

c)

2. Konečné akceptory

Nech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je ľubovoľná konečná množina. V teórii formálnych jazykov definujeme jazyk (v abecede X) ako ľubovoľnú podmnožinu voľnej pologrupy X^+.

Napríklad nech $X = \{a, b\}$. Potom jazykmi v abecede X sú napríklad tieto množiny. $L_1 = \emptyset$, $L_2 = \{a, ab, aba\}$, $L_3 = \{wa; w \in X^+\}$ = množina všetkých slov v abecede X, ktoré končia písmenom a a majú dĺžku aspoň dva, $L_4 = \{a^n b^n; n = 1, 2, \ldots\}$. Vidíme, že môžeme vymenovať nekonečne veľa takýchto jazykov, Jedným zo spôsobov, ako sa vo voľnej pologrupe dajú jazyky špecifikovať, je ich akceptovanie pomocou konečného akceptora.

Konečný akceptor je možné definovať ako Moorov automat, ktorý oproti všeobecne definovaným Moorovým automatom sa vyznačuje istými špecifickými črtami.

(1) V konečnom akceptore je vyznačený jeden stav - začiatočný stav, v ktorom automat vždy začína svoju činnosť (každý automat s vyznačeným začiatočným stavom sa nazýva iniciálny automat).
(2) Výstupná abeceda $Z = \{0, 1\}$. Pritom sa dohodneme, že 1 použijeme ako indikátor akceptovania a 0 ako indikátor neakceptovania slova $w \in X^+$ akceptorom. To znamená, že ak v začiatočnom stave privedieme na vstup akceptora slovo $w \in X^+$, potom v prípade, že automat skončí svoju činnosť v stave s, pre ktorý

je $\mu(s) = 1$, akceptor slovo w akceptuje, ak $\mu(s) = 0$, akceptor slovo w neakceptuje.

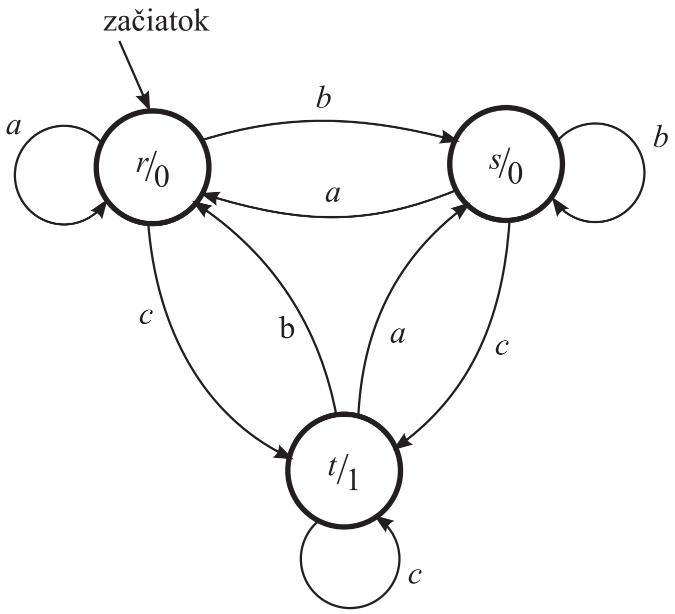
Teraz už môžeme vysloviť definíciu konečného akceptora.

Definícia 3.7. ***Konečný akceptor*** je Moorov automat $A = (S, X, Z, \delta, \mu, s_0)$, kde $s_0 \in S$ je začiatočný stav a $Z = \{0, 1\}$.

Budeme hovoriť, že ***akceptor*** A ***akceptuje slovo*** $w \in X^+$, ak slovo $\widehat{\mu}(s_0, w)$ končí jednotkou. To znamená, že $\mu(\widehat{\delta}(s_0, w)) = 1$. Akceptor A slovo $w \in X^+$ neakceptuje práve vtedy, keď $\mu(\widehat{\delta}(s_0, w)) = 0$.

Jazyk $L(A)$ ***akceptovaný akceptorom*** A je množina všetkých slov z pologrupy X^+, ktoré daný akceptor akceptuje. Teda $L(A) = \{w \in X^+;\ \mu(\widehat{\delta}(s_0, w)) = 1\}$.

Príklad 3.8. Pokúsime sa opísať jazyk, ktorý akceptuje akceptor na obr. 13.



OBR. 13. Konečný akceptor z príkladu 3.8

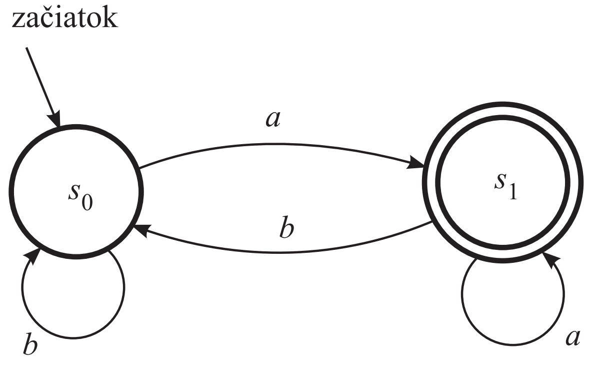
RIEŠENIE. Z grafu je zrejmé, že $X = \{a, b, c\}$. Ak chceme rozhodnúť o akceptovaní hociktorého slova $w \in X^+$, musíme rozhodnúť o hodnote $\mu(\widehat{\delta}(r, w))$. Vidíme, že $\mu(\widehat{\delta}(r, w)) = 1$ práve vtedy, keď $\widehat{\delta}(r, w) = t$. Jedine v stave t je totiž $\mu(t) = 1$. Vidíme, že do stavu t vstupujú len tie hrany, ktoré sú ohodnotené vstupným písmenom c. A pretože hrany ohodnotené vstupným písmenom c nevstupujú do iného vrchola, je zrejmé, že $\mu(\widehat{\delta}(r, w)) = 1$ práve vtedy, keď slovo w končí písmenom c. Preto $L(A) = \{wc;\ w \in X^+\} \cup \{c\}$. ■

Poznámka 3.2. Pri štúdiu konečných akceptorov je zvykom stav s, v ktorom je $\mu(s) = 1$, vyhlásiť za finálny stav. Preto má zmysel uvažovať o množine $F \subset S$, kde $F = \{s \in S;\ \mu(s) = 1\}$. Stavy z množiny F sa v grafe konečného akceptora vyznačujú dvojitým kruhom. V takomto prípade už nemusíme definovať výstupnú funkciu $\mu : S \to Z$ a pripisovať hodnoty výstupnej funkcie k stavu.

Pri takomto prístupe je konečný akceptor pätica $A = (S, X, \delta, s_0, F)$, kde význam prvých štyroch zložiek zostáva nezmenený z pôvodnej definície a $F \subset S$. Množinu F nazývame ***množina finálnych stavov***.

Potom jazyk akceptovaný akceptorom A je množina $L(A) = \{w \in X^+;\ \widehat{\delta}(s_0, w) \in F\}$.

Príklad 3.9. Opíšeme jazyk L(A), ktorý akceptuje akceptor daný grafom na obr. 14.



OBR. 14. Graf akceptora z príkladu 3.9

RIEŠENIE. Z grafu vyplýva, že $X = \{a, b\}$ a $F = \{s_1\}$. Teda $w \in X^+$ bude akceptované práve vtedy, keď $\widehat{\delta}(s_0, w) = s_1$. Z grafu je zrejmé, že $\widehat{\delta}(s_0, w) = s_1$, práve vtedy, keď slovo w končí písmenom a. Preto $L(A) = \{a\} \cup \{wa;\ x \in X^+\}$. ■

Príklad 3.10. Uvažujme o abecede $X = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Slová zapísané v tejto abecede budeme pokladať za čísla vyjadrené v desiatkovej sústave. V X^+ sa budú vyskytovať aj slová, ktoré začínajú 0. Napríklad 008 je iné slovo ako 08, a to je iné slovo, ako je 8. Ale v desiatkovej sústave budú tieto slová reprezentovať to isté číslo.
Teraz zostrojíme akceptor, ktorý bude akceptovať práve tie slová (čísla), ktoré sú deliteľné troma.

RIEŠENIE. Vieme, že číslo je deliteľné troma práve vtedy, keď súčet jeho cifier je deliteľný troma, resp. súčet cifier po delení troma dáva zvyšok 0. Preto má zmysel uvažovať o troch stavoch:

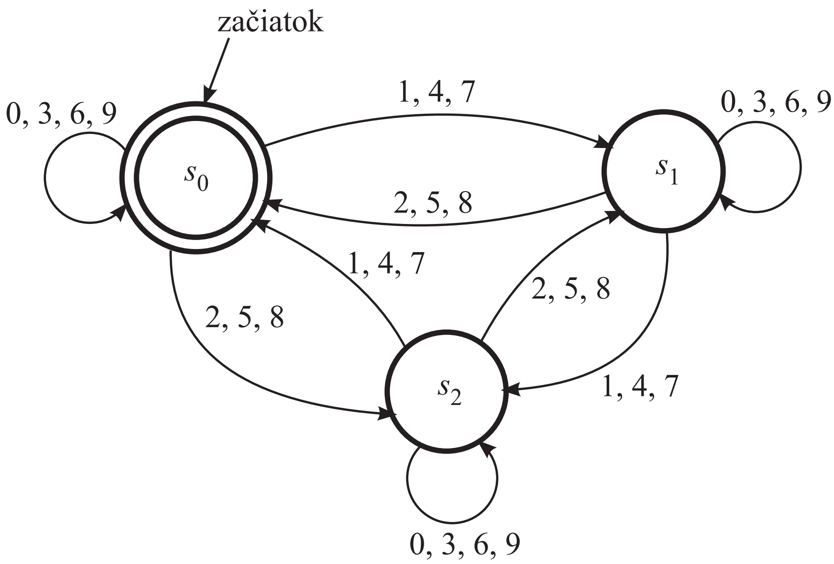
- s_0 zodpovedá situácii, keď súčet cifier po delení troma dáva zvyšok 0.
- s_1 zodpovedá situácii, keď súčet cifier po delení troma dáva zvyšok 1.
- s_2 zodpovedá situácii, keď súčet cifier po delení troma dáva zvyšok 2.

Pretože na začiatku môžeme pokladať súčet cifier za nulový, bude s_0 začiatočný stav. Slovo w bude akceptované iba vtedy, keď zvyšok po delení súčtu cifier číslom tri je nulový. Preto s_0 bude aj jediný finálny stav. Teda $F = s_0$. Graf hľadaného akceptora je na obr. 15. V tomto grafe sme pre prehľadnosť kreslili vždy iba jednu hranu, ktorá spája dva vrcholy, pritom sme k nej pripísali všetky vstupné písmená (číslice), ku ktorým patria príslušné hrany. ■

Príklad 3.11. V tomto príklade dokážeme, že neexistuje konečný akceptor, ktorý v abecede $Z = \{a, b\}$ akceptuje jazyk $L = \{a^n b^n;\ n = 1, 2, \ldots\} = \{ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$.

RIEŠENIE. Predpokladáme, že existuje akceptor $A = (S, X, \delta, s_0, F)$, ktorý akceptuje jazyk L. To znamená, že $\delta(s_0, w) \in F$ práve vtedy, keď existuje prirodzené číslo n také, že $w = a^n b^n$. Vo zvyšných prípadoch $\delta(s_0, w) \notin F$.

Nech množina stavov akceptora má m prvkov. Uvažujme o slove $w = a^i = aa \ldots a$, kde $i > m$. Potom $\delta(s_0, a) = \delta(s_0, a^1) = s^{(1)}$, $\widehat{\delta}(s_0, aa) = \widehat{\delta}(s_0, a^2) = \delta(s^{(1)}, a) = s^{(2)}$, $\widehat{\delta}(s_0, aaa) = \widehat{\delta}(s_0, a^3) = \delta(s^{(2)}, a) = s^{(3)}$, $\ldots$, $\widehat{\delta}(s_0, a^i) = s^{(i)}$. Pretože rôznych stavov je iba m a $i > m$, medzi stavmi $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(i)}$ musia existovať aspoň dva rovnaké



OBR. 15. Graf akceptora z príkladu 3.10

stavy. Teda existujú prirodzené čísla q, r, také, že $s^{(q)} = s^{(r)}$ a $q \neq r$. Pre jednoduchosť predpokladajme, že $r < q$. Potom platí $\widehat{\delta}(s_0, a^r b^r) \in F$ a $\widehat{\delta}(s_0, a^q b^r) \notin F$. Ale

$$\widehat{\delta}(s_0, a^r b^r) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(s_0, a^r), b^r) = \widehat{\delta}(s^{(r)}, b^r) = \widehat{\delta}(s^{(q)}, b^r) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(s_0, a^q), b^r) = \widehat{\delta}(s_0, a^q b^r).$$

To už dáva požadovaný spor. To znamená, že akceptor, ktorý by akceptoval jazyk L, neexistuje. ∎

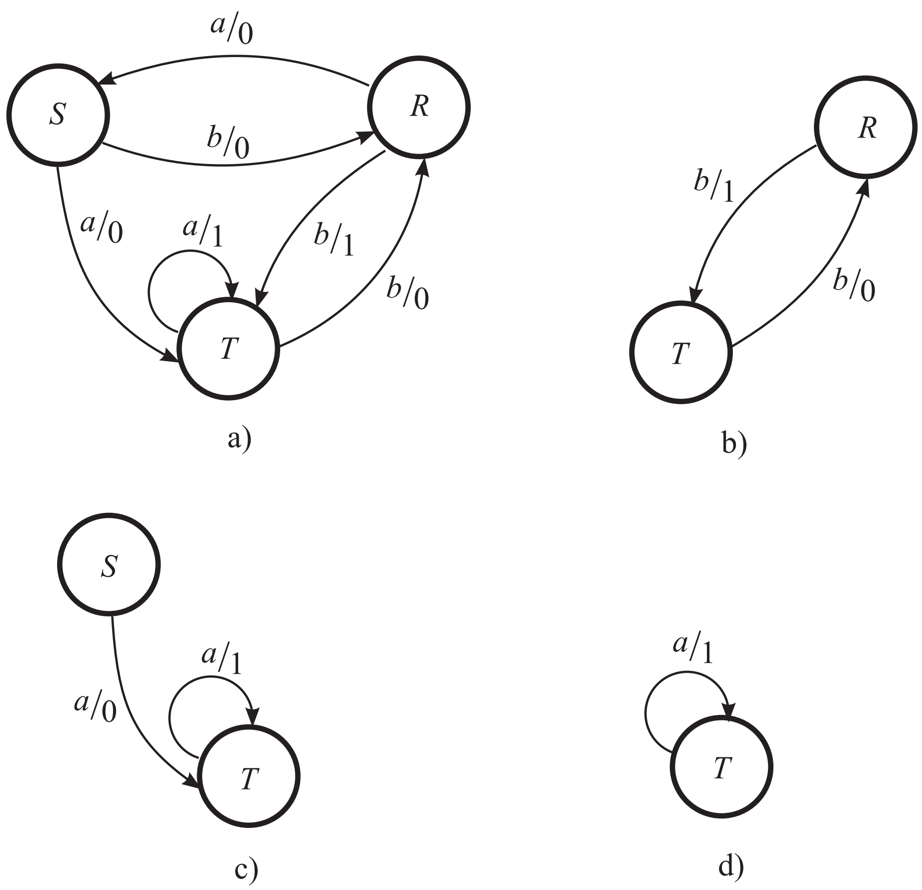
3. Základné pojmy v teórii konečných automatov

V nasledujúcich častiach sa budeme v prevažnej miere zaoberať iba Mealyho automatmi. Pretože ku každému Moorovmu automatu existuje silno ekvivalentný Mealyho automat, môžeme prostredníctvom tejto ekvivalencie preniesť znalosti z oblasti Mealyho automatov do oblasti Moorových automatov.

Definícia 3.8. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat. Nech $A' = (S', X', Z', \delta', \lambda')$ je taký automat, že $S' \subset S$, $X' \subset X$, $Z' \subset Z$ a pre funkcie $\delta' : S' \times X' \to S'$ a $\lambda' : S' \times X' \to Z'$ platí: pre každé $x \in X'$ a každé $s \in S'$ je $\delta'(s, x) = \delta(s, x) \in S'$ a $\lambda'(s, x) = \lambda(s, x) \in Z'$. Potom automat A' nazývame ***podautomat automatu*** A.

Príklad 3.12. Uvažujme o automate, ktorý je daný grafom na obr. 16, časť a). Je zrejmé, že jeden z jeho podautomatov je aj daný automat. Každý podautomat, rôzny od daného automatu, budeme nazývať ***vlastný podautomat***. Ak vstupná abeceda obsahuje viac ako jedno písmeno, vlastný podautomat môžeme získať tak, že aspoň jedno písmeno zo vstupnej abecedy vynecháme. V našom príklade môžeme získať dva vlastné podautomaty tým, že vynecháme buď vstupné písmeno a, alebo vstupné písmeno b. Na grafe sa to prejaví vynechaním hrán, ktoré sú ohodnotené príslušným vynechaným písmenom.

Ak v tomto príklade chceme získať podautomat, ktorý má menej stavov ako pôvodný automat, môžeme uvažovať len o vynechaní stavu, do ktorého nevchádzajú hrany ohodnotené všetkými vstupnými písmenami. V našom príklade z toho dôvodu nemôžeme vynechať stav T. V prípade, že vynecháme stav R, musíme vynechať aj vstupné písmeno b, lebo do stavu R vchádzajú hrany ohodnotené týmto písmenom. Graf tohto podautomatu je na obr. 16, časť c). Podobne ak chceme vynechať stav S, musíme vynechať vstupné písmeno a. Graf príslušného podautomatu je na obr. 16, časť b). Je zrejmé, že automat, ktorý je na obr. 16, časť c), má vlastný podautomat, ktorý získame vynechaním stavu S. Graf tohto podautomatu (ktorý je podautomatom aj pôvodného automatu) je na obr. 16, časť d). ■



Obr. 16. Graf automatu z príkladu 3.12

Teraz ukážeme príklad automatu, ktorý nemá vlastný podautomat. Z predošlého príkladu je zrejmé, že vstupná abeceda takéhoto automatu musí obsahovať jediné písmeno.

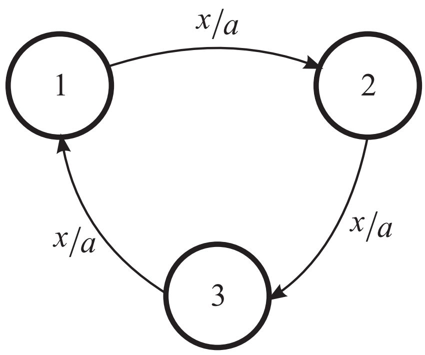
Príklad 3.13. Na obr. 17 je graf automatu, ktorý neobsahuje vlastný podautomat. Tento výsledok je dosť zrejmý, lebo vstupné písmeno je jediné, preto ho vynechať nemôžeme. Podobne je to aj s výstupným písmenom. Žiadny zo stavov vynechať nemôžeme, lebo do každého stavu vstupuje hrana ohodnotená (jediným) vstupným písmenom, ktoré nemôžeme vynechať. ■

Ako sme si už mohli všimnúť, pojem podautomat, úzko súvisí s pojmom podgraf grafu. Teraz sa budeme zaoberať pojmami, ktoré súvisia s pojmom súvislý i silno súvislý orientovaný graf.

Definícia 3.9. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat. Budeme hovoriť, že ***stav*** $s \in S$ ***je dosiahnuteľný zo stavu*** $t \in S$, ak buď $s = t$, alebo existuje $w \in X^+$ také, že $s = \widehat{\delta}(t, w)$.

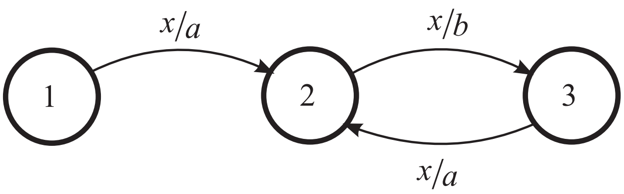
Automat A sa nazýva ***súvislý automat*** ak existuje stav $s \in S$, z ktorého je každý stav automatu dosiahnuteľný.

Automat A sa nazýva ***silno súvislý***, ak z každého stavu tohto automatu je každý iný stav dosiahnuteľný.



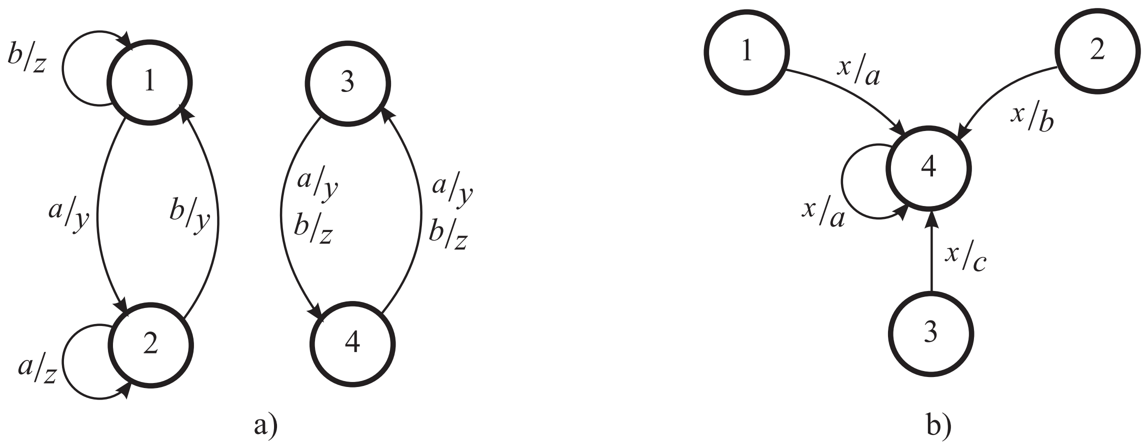
Obr. 17. Graf automatu z príkladu 3.13

Príklad 3.14. Na obr. 18 je graf súvislého automatu, ktorý nie je silno súvislý (stav 1 nie je dosiahnuteľný zo stavu rôzneho od stavu 1).



Obr. 18. Graf súvislého automatu

Na obr. 19, časť a), b) uvádzame grafy automatov, ktoré nie sú súvislé. Všimnime si, že automat, ktorého graf je v časti b), nie je súvislý aj napriek tomu, že jeho graf sa skladá iba z jednej časti.

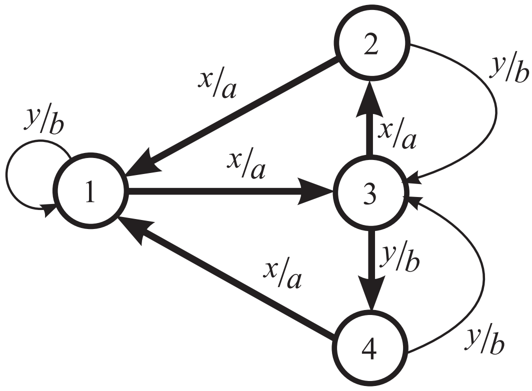


Obr. 19. Príklady grafov, ktoré nie sú súvislé

Na obr. 20 uvádzame graf silno súvislého automatu (silnejšie sú vyznačené hrany, ktoré ukazujú možnosť dosiahnuť každý stav z hociktorého iného stavu). ■

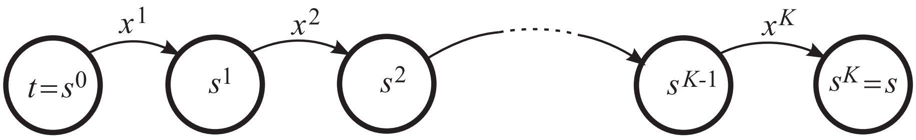
Veta 3.1. Nech je automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$, ktorého množina stavov má n prvkov. Ak stav s je dosiahnuteľný zo stavu t, pričom $s \neq t$, potom existuje slovo $w \in X^+$ dĺžky menšej ako n ($|w| \leq n - 1$), ktoré toto dosiahnutie sprostredkuje ($\widehat{\delta}(t, w) = s$).

Dôkaz. Nech $s \in S$, $s \neq t$. Nech existuje $w \in X^+$ také, že $\widehat{\delta}(t, w) = s$. To znamená, že množina $M = \{w \in X^+; \widehat{\delta}(t, w) = s\}$ nie je prázdna. Nech $K = min\{|w|;\ w \in M\}$ (je to dĺžka najkratšieho slova, ktoré sprostredkuje dosiahnuteľnosť stavu s zo stavu t).



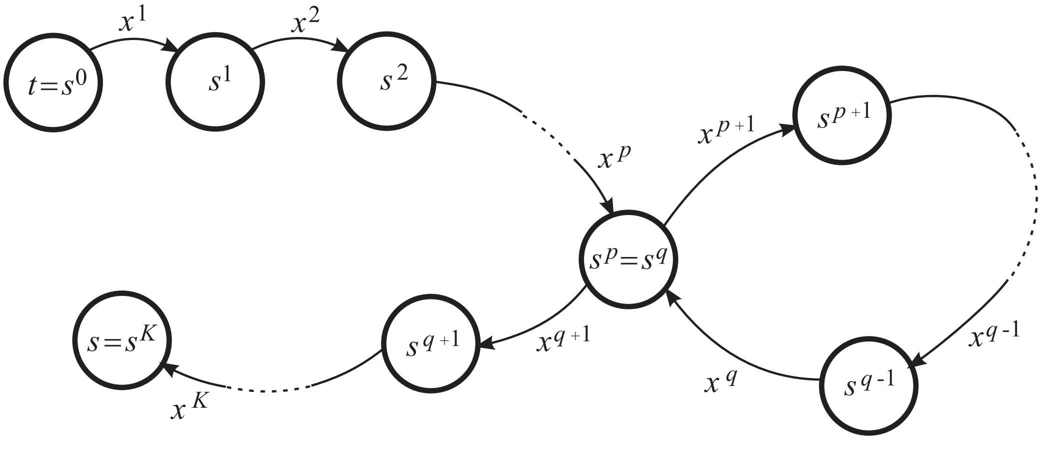
Obr. 20. Graf silno súvislého automatu

Predpokladajme, že $K \geq n$. Nech $w_0 \in M$ je také, že $|w_0| = K$ (w_0 je najkratšie možné slovo, ktoré sprostredkuje dosiahnuteľnosť stavu s zo stavu t). Nech $w_0 = x^1 \dots x^K$. Túto situáciu znázorňujeme na obr. 21.



Obr. 21. Ilustrácia dôkazu vety 3.1

V tejto schéme sa nachádza $K+1$ stavov, pričom $K \geq n$. Keďže počet rôznych stavov je n, musia sa v postupnosti $t = s^0, s^1, s^2, \dots, s^{K-1}, s^K = s$ nachádzať aspoň dva stavy, ktoré sa navzájom rovnajú. Preto musia existovať dve prirodzené čísla p, q také, že $s^p = s^q$. Pritom bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $p < q$. Teda v grafe daného automatu musia existovať hrany spájajúce stavy t a s tak, ako je to znázornené na obr. 22.



Obr. 22. Ilustrácia dôkazu vety 3.1

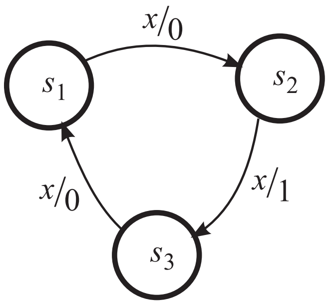
Ak $\widehat{\delta}(t, w) = s$ a $s^p = s^q$ potom

$$
\begin{aligned}
s &= \widehat{\delta}(t, w) = \widehat{\delta}(t, x^1x^2 \dots x^p \dots x^q \dots x^K) = \\
&= \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(t, x^1x^2 \dots x^q), x^{q+1} \dots x^K) = \widehat{\delta}(s^q, x^{q+1} \dots x^K) = \widehat{\delta}(s^p, x^{q+1} \dots x^K) = \\
&= \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(t, x^1x^2 \dots x^p), x^{q+1} \dots x^K) = \widehat{\delta}(t, x^1x^2 \dots x^p x^{q+1} \dots x^K).
\end{aligned}
$$

Z toho vidíme, že na dosiahnutie stavu s zo stavu t stačí slovo $x^1x^2 \dots x^p x^{q+1} \dots x^K$, ktoré má dĺžku $K - (q - p) < K$. To je spor s predpokladom, že K je najmenšia možná dĺžka slova pomocou ktorého je možné dosiahnuť stav s zo stavu t. Preto musí byť $K < n$. □

Na nasledujúcom (veľmi jednoduchom) príklade ukážeme, že odhad urobený v predošlej vete sa už nedá zlepšiť.

Príklad 3.15. Uvažujme o automate, ktorý je daný pomocou grafu na obr. 23. Tento automat je silno súvislý a obsahuje 3 stavy, teda $n = 3$. Vidíme, že na dosiahnutie stavu s_3, zo stavu s_1, treba slovo xx ($\widehat{\delta}(s_1, xx) = s_3$). Toto slovo má dĺžku $2 = n - 1$. ■



Obr. 23. Graf automatu z príkladu 3.15

4. Neúplne špecifikované (nedeterministické) automaty

Problematiku neúplne špecifikovaných automatov uvedieme na príklade.

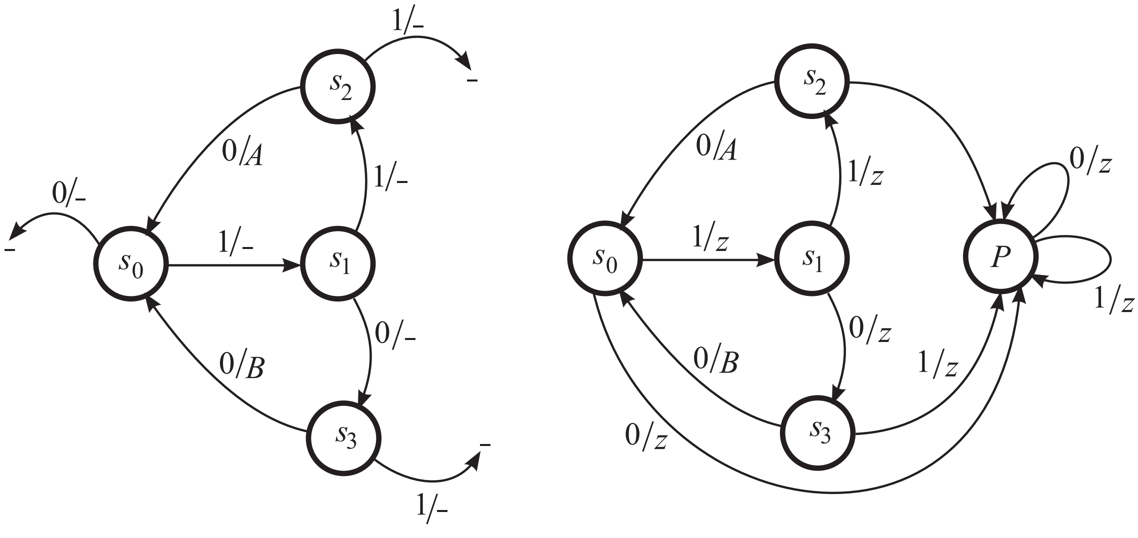
Príklad 3.16. v informačnom kanáli prenášame dva symboly A a B, ktoré sú zakódované znakmi 1 a 0. Aby sme zvýšili bezpečnosť dekódovania, pridávame k týmto kódovacím znakom ešte dva znaky 0 a 1 tak, aby 1 značila začiatok prenášanej trojice a 0 koniec prenášanej trojice. Potom A je zakódované trojicou 110 a B trojicou 100.

Na výstupe tieto trojice dekódujeme pomocou blokového dekódera a jedine trojici 110 pri dekódovaní priradíme znak A a jedine trojici 100 priradíme znak B. Vo zvyšných prípadoch ide o chybný prenos.

Teraz opíšeme toto dekódovacie zariadenie ako iniciálny automat.

Riešenie. Trojicu začneme dekódovať v začiatočnom stave s_0. Ak sa v tomto stave na vstupe dekódera objaví 0, vieme, že ide o chybný prenos. Vtedy môžeme buď dekódovanie trojice prerušiť tak, že v stave s_0 pri vstupe 0 nebudeme definovať ďalšiu činnosť, alebo hneď na začiatku definujeme stav P = pasca, do ktorého budú viesť hrany ohodnotené vstupným písmenom, keď budeme vedieť, že ide o chybný prenos. V takom prípade sa už zo stavu P pri nijakom vstupnom písmene nedostaneme.

Ak v stave s_0 sa na vstupe dekódera objaví písmeno 1, je možný bezchybný prenos, čo vyznačíme prechodom do nového stavu s_1. Výstup nás v tomto prípade ešte nezaujíma. Preto ho nemusíme definovať. V stave s_1 pri vstupe 1 je predpoklad, že bol vyslaný signál A. To zachytíme definovaním nového stavu s_2. Ak v stave s_1, je na vstupe 0, je predpoklad, že bol vyslaný signál B. To bude zaznamenané stavom s_3. V oboch prípadoch výstup ešte nie je zaujímavý. Prenos signálu A alebo B bude potvrdený, ak v stave s_2 alebo s_3 na vstupe objaví 0. V opačnom prípade pôjde o chybný prenos. Na obr. 24, časť a) graficky znázorňujeme proces dekódovania v prípade, že pri chybnom prenose zastavíme činnosť dekódera. V obr. 24, časť b) sme graf z obr. 24, časti a) doplnili na graf automatu tým, že v prípade chybného prenosu budú hrany smerovať do pomocného stavu P, z ktorého sa už nedostaneme.



a) b)

Obr. 24. Graf dekódera z príkladu 3.16

Okrem prípadu, keď tretí znak v trojici na vstupe dekódera sa rovná 0, výstup nás v tomto príklade nezaujíma. Pri prvom prístupe ho nešpecifikujeme. Pri druhom prístupe pridáme pomocné výstupné písmeno z.

Aj pri prvom prístupe sme činnosť dekódera opísali podobne ako v prípade automatu, len prechodová a výstupná funkcia neboli definované v každom bode. V tomto prípade to boli iba parciálne funkcie. ■

Definícia 3.10. ***Neúplne špecifikovaným*** (nedeterministickým) ***automatom*** nazývame päticu $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$, kde S, X, Z sú konečné množiny stavov, vstupov, výstupov a $\delta : S \times X \to S$ a $\lambda : S \times X \to Z$ sú parciálne funkcie (nie sú definované pre každú dvojicu $(s, x) \in S \times X$). Funkcie δ a λ nazývame ***prechodová a výstupná funkcia neúplne špecifikovaného automatu***.

Pri prvom prístupe sme na opis dekódera z príkladu 3.16 už vlastne použili neúplne špecifikovaný automat. Jeho tabuľku uvádzame v tabuľke 6, časť a).

Tabuľka 6. Tabuľky automatu z príkladu 3.16

	δ		λ	
	0	1	0	1
s_0	-	s_1	-	-
s_1	s_3	s_2	-	-
s_2	s_0	-	A	-
s_3	s_0	-	B	-

a)

	δ		λ	
	0	1	0	1
s_0	-	s_1	-	-
s_1	s_3	s_2	-	-
s_2	s_0	-	A	-
s_3	s_0	-	B	-
-	-	-	-	-

b)

	δ		λ	
	0	1	0	1
s_0	P	s_1	z	z
s_1	s_3	s_2	z	z
s_2	s_0	P	A	z
s_3	s_0	P	B	z
P	P	P	z	z

c)

V neúplne špecifikovaných automatoch pri nedefinovaných stavoch a výstupoch sa prakticky vyskytujú len dve možnosti. Buď je prechod zakázaný pomocou technických prostriedkov pri fyzikálnej realizácii, alebo v týchto prípadoch stav alebo výstup nie sú zaujímavé a môžeme ich ľubovoľne dodefinovať.

V každom prípade môžeme o neúplne špecifikovaných automatoch uvažovať ako o konečnom automate, keď znak „-“ prijmeme za nový stav a aj nový výstupový symbol. V takom prípade hovoríme o ***rozšírenom automate***. Opis dekódera z príkladu 3.16 ako rozšíreného automatu uvádzame v tabuľke 6, časť b). Všimnime si, že tento prístup zodpovedá nášmu druhému prístupu k opisu dekódera v príklade 3.16 ako ku konečnému automatu, ktorý vznikol z nekompletne špecifikovaného automatu pomocou doplnenia množiny stavov stavom P a množiny výstupných písmen pomocným znakom z. Tento opis dekódera uvádzame v tabuľke 6, časť c).

Ak uvažujeme o neúplne špecifikovanom automate ako o automate, v ktorom môžeme nešpecifikované stavy a výstupy ľubovoľne doplniť, potom sa veľa problémov z teórie automatov dá pomocou neúplne špecifikovaných automatov značne zjednodušiť. Tento prístup k neúplne špecifikovaným automatom budeme dôsledne zachovávať. Neúplne špecifikovaný automat bude iba kostra konečného automatu, ktorej konštrukcia vyplynie zo zadania úlohy. Túto kostru vždy doplníme na konečný automat. Preto ak budeme používať pojmy, ktoré definujeme pre konečné automaty, pri práci s neúplne špecifikovanými automatmi budeme mať vždy na mysli výsledný automat, na ktorý tento neúplne špecifikovaný automat doplníme.

Sme si vedomí toho, že tento prístup je značným (a nie vždy vhodným) zjednodušením problematiky neúplne špecifikovaných automatov. Pri neúplne špecifikovaných automatoch je zložitý postup pri redukcii automatu.

5. Ekvivalencia automatov

V tejto časti sa budeme zaoberať automatmi, ktoré ako reakciu na rovnaké vstupné slovo sú schopné generovať rovnakú výstupnú postupnosť. Preto budeme uvažovať o automatoch, ktoré majú spoločné vstupné a aj výstupné abecedy.

Definícia 3.11. Nech $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$. Budeme hovoriť, že ***stavy*** $s \in S$ a $t \in T$ ***sú ekvivalentné***, ak pre každé vstupné slovo $w \in X^+$ je $\widehat{\lambda}_A(s, w) = \widehat{\lambda}_B(t, w)$.

V prípade, že s a t sú ekvivalentné stavy, budeme písať $s \sim t$.

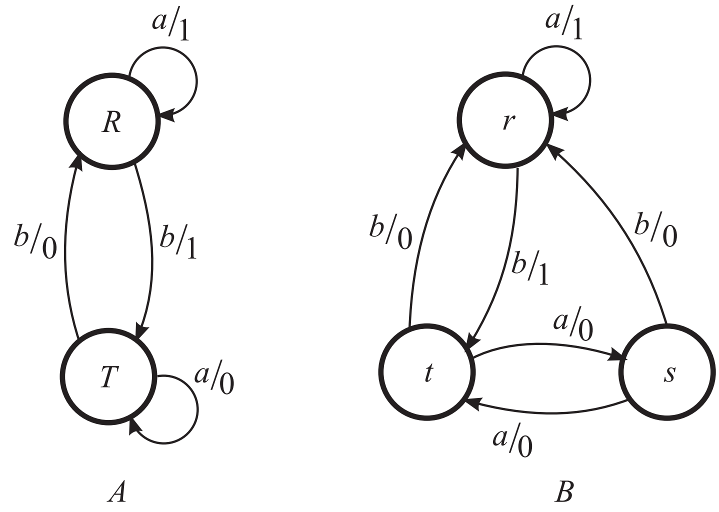
Príklad 3.17. Nech $A = \{\{R, T\}, \{a, b\}, \{0, 1\}, \delta_A, \lambda_A\}$ a $B = \{\{r, s, t\}, \{a, b\}, \{0, 1\}, \delta_B, \lambda_B\}$ sú automaty, ktorých grafy uvádzame na obr. 25.

Uvažujme o stavoch R a t. Z grafov automatov vidíme, že $\lambda_A(R, a) = 1 \neq 0 = \lambda_B(t, a)$. Preto je zrejmé, že R a t nie sú ekvivalentné stavy (píšeme $R \not\sim t$).

Teraz sa pokúsime dokázať, že R a r sú ekvivalentné.

Riešenie. Uvažujme o výstupných postupnostiach $\widehat{\lambda}_A(R, w)$ a $\widehat{\lambda}_B(r, w)$ pri ľubovoľnom $w \in X^+$. Ak vstupné slovo w začína postupnosťou vstupných znakov a, potom obe výstupné postupnosti začínajú postupnosťou jednotiek a oba automaty zostávajú v pôvodných stavoch. Po prvom vstupnom písmene b zmenia oba automaty stav a výstup sa ešte stále rovná jednej. Pri ďalších znakoch b oba automaty menia stav z T na R, resp. z t na r a výstup z 1 na 0. Pri nasledujúcom a, ak sú v stave R, resp. r, sa situácia opakuje. Ak sú v stave T, resp. t, prvý ostane v stave T a druhý automat strieda stavy t a s. V oboch prípadoch sú však výstupy stále rovnaké a rovnajú sa 0. Nasledujúci znak b spôsobí prechod do stavu R v prvom automate a do stavu r v druhom automate. Pri tomto prechode sa výstup v oboch prípadoch rovná 0. Potom sa už situácia opakuje.

Tak sme dosť zložitým a neprehľadným spôsobom dokázali, že pre každé $w \in X^+$ je $\widehat{\lambda}_A(R, w) = \widehat{\lambda}_B(r, w)$ a teda $r \sim R$.



Obr. 25. Grafy automatov z príkladu 3.17

Uvedený dôkaz ekvivalencie stavov bol dosť neprehľadný a bol založený na náhode. V nasledujúcej časti opíšeme algoritmus, pomocou ktorého sa dajú systematicky vyhľadávať ekvivalentné stavy. ■

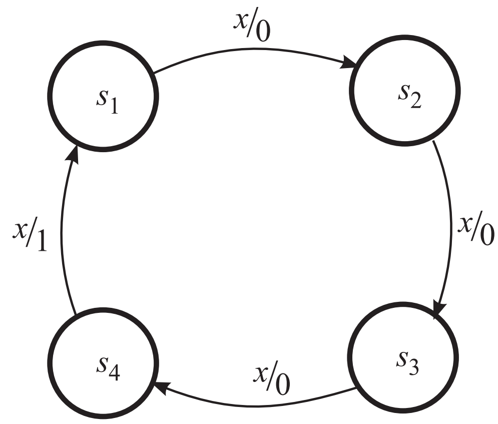
Poznámka 3.3. O ekvivalencii dvoch stavov má zmysel hovoriť aj v tom prípade, keď automat A je zhodný s automatom B. V prípade, že s a t sú stavy toho istého automatu a $s \sim t$, budeme písať sEt.

Všimnime si, že takto definovaná relácia E na množine stavov S automatu A je naozaj relácia ekvivalencie (je zrejmé, že je reflexívna, symetrická a tranzitívna). Táto ekvivalencia indukuje rozklad na množine stavov S. Tento rozklad budeme značiť rovnako ako ekvivalenciu, ktorá ho indukuje, teda znakom E.

Pri fyzikálnej realizácii automatov uvidíme, že zložitosť (a teda aj cena) fyzikálnej realizácie automatu závisí od počtu jeho stavov. Pretože dva ekvivalentné stavy na vstupné slovo reagujú rovnakou výstupnou postupnosťou riadiacich signálov, nie je ekonomické pracovať s automatmi, ktoré majú veľa ekvivalentných stavov.

Definícia 3.12. Automat A nazývame ***redukovaný automat***, ak ľubovoľné dva jeho rôzne stavy nie sú ekvivalentné.

Príklad 3.18. Ukážeme, že automat daný grafom na obr. 26 je redukovaný.



Obr. 26. Graf automatu z príkladu 3.18

Riešenie. V danom automate existuje jediné vstupné slovo dĺžky 1. Je to $w = x$. Pre toto slovo dostávame $\lambda(s_1, x) = \lambda(s_2, x) = \lambda(s_3, x) = 0 \neq 1 = \lambda(s_4, x)$, teda $s_4 \not\sim s_1, s_2, s_3$. Pre slovo dĺžky dva dostávame: $\widehat{\lambda}(s_1, xx) = \widehat{\lambda}(s_2, xx) = 00 \neq 01 = \widehat{\lambda}(s_3, xx)$, čiže $s_3 \not\sim s_1, s_2$. Ďalej $\widehat{\lambda}(s_1, xxx) = 000$ a $\widehat{\lambda}(s_2, xxx) = 001$. Preto aj $s_1 \not\sim s_2$. Z toho už vyplýva, že automat je redukovaný. ■

Definícia 3.13. Nech $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$ sú automaty. Nech ku každému stavu $s \in S$ existuje stav $t \in T$, ktorý je s ním ekvivalentný. Nech aj naopak pre každé $t \in T$ existuje $s \in S$ také, že $t \sim s$. Potom budeme hovoriť, že ***automaty*** A a B ***sú ekvivalentné***.

Z definície ekvivalencie automatov A a B vyplýva, že tieto automaty sú ekvivalentné práve vtedy, keď existujú funkcie $f_1 : S \to T$ a $f_2 : T \to S$ také, že pre každé $s \in S$ a každé $t \in T$ je $s \sim f_1(s)$ a $t \sim f_2(t)$.

Teraz chceme ku každému automatu A priradiť redukovaný automat A_R, ktorý bude ekvivalentný s automatom A. Pri plnení tohto cieľa nám v značnej miere pomôže táto úvaha.

Nech $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A) = B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$ sú ekvivalentné automaty (budeme písať $A \sim B$). Na množine S je definovaná ekvivalencie E_A pomocou podmienky rE_As práve vtedy, keď pre každé $w \in X^+$ je $\widehat{\lambda}_A(r, w) = \widehat{\lambda}_A(s, w)$. Podobne na množine stavov T je definovaná ekvivalencia E_B. Tieto ekvivalencie indukujú na množinách S a T rozklady na triedy ekvivalencie $E_A = \{A_1, \ldots, A_m\}$ a $E_B = \{B_1, \ldots, B_n\}$.

Pretože $A \sim B$, musí ku každému $s \in S$ existovať $t \in T$ s vlastnosťou $s \sim t$. Predpokladajme, že pre dva prvky $r, s \in S$ je $r \sim t$ a $s \sim t$ $(t \in T)$. Potom pre každé $w \in X^+$ platí: $\widehat{\lambda}_A(r, w) = \widehat{\lambda}_B(t, w) = \widehat{\lambda}_A(s, w)$. Z toho už vyplýva, že rE_As, a teda r, s ležia v tej istej triede ekvivalencie E_A.

Naopak. nech rE_As a $r \sim t$. Potom z podmienky $\widehat{\lambda}_A(s, w) = \widehat{\lambda}_A(r, w) = \widehat{\lambda}_B(t, w)$ vyplýva, že $s \sim t$.

Tým sme dokázali, že pre každé $t \in T$ existuje taká trieda A_i ekvivalencie E_A, že pre každé $s \in A_i$ je $s \sim t$, teda $A_i = \{s \in S; s \sim t\}$ Ale k prvku t existuje aj trieda B_j ekvivalencie E_B, v ktorej sa tento prvok nachádza. Potom pre každé $u \in B_j$ a každé $s \in A_i$ dostávame uE_Bt a $t \sim s$. Z toho dostávame $u \sim s$.

To znamená, že pre každú triedu A_i ekvivalencie E_A existuje (práve) jedna trieda B_j ekvivalencie E_B, taká že pre každé $s \in A_i$ a každé $t \in B_j$ je $s \sim t$. Je zrejmé, že platí aj opačné tvrdenie. To znamená, že medzi rozkladmi $E_A = \{A_1, \ldots, A_m\}$ a $E_B = \{B_1, \ldots, B_n\}$ existuje bijekcia $f : E_A \to E_B$. Preto $m = n$ a bez ujmy na všeobecnosti môžeme označiť $f(A_i) = B_i$. (Prečíslujeme triedy ekvivalencie E_B tak, aby $f(A_1) = B_1$, $f(A_2) = B_2, \ldots, f(A_n) = B_n$.) Toto označenie budeme používať aj neskoršie.

Pri definícii redukovaného automatu patriaceho k danému automatu využijeme vetu týkajúcu sa postupností výstupných písmen, t.j. slov vo voľnej pologrupe Z^+. Tu chceme poznamenať, že slová v každej voľnej pologrupe sú konečné postupnosti písmen a pre takéto dve postupnosti platí rovnosť práve vtedy, keď tieto postupnosti majú rovnaký počet prvkov a prvky na prvých, druhých, tretích, … miestach uvedených postupností sa navzájom rovnajú. Z toho vyplýva, ak X^+ je ľubovoľná voľná pologrupa a $u = x^1 \ldots x^m$, $v = y^1 \ldots y^m$ sú dve slová z tejto pologrupy, potom $u = v$ práve vtedy, keď $m = n$ a $x^i = y^i$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$.

V nasledujúcich častiach budeme pre ľubovoľný automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ označovať znakom E (ak bude treba odlíšiť od iného automatu E_A) ekvivalenciu na množine stavov S, ktorá je daná podmienkou: aEt práve vtedy, keď pre každé $w \in X^+$ je $\widehat{\lambda}(s, w) = \widehat{\lambda}(t, w)$.

Veta 3.2. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat a sEt. Potom $\delta(s, x)E\delta(t, x)$ pre každé $x \in X$.

DÔKAZ. Nech $w \in X^+$ je ľubovoľné slovo. Nech sEt. Chceme dokázať, že pre každé $x \in X$ je $\widehat{\lambda}(\delta(s, x), w) = \widehat{\lambda}(\delta(t, x), w)$.

Nech $x \in X$ je ľubovoľné vstupné písmeno. Potom xw je slovo z X^+. Pretože sEt, musí byť $\widehat{\lambda}(s, xw) = \widehat{\lambda}(t, xw)$. Z toho dostávame $\lambda(s, x)\widehat{\lambda}(\delta(s, x), w) = \lambda(t, x)\widehat{\lambda}(\delta(t, x), w)$. Pretože ide o rovnosť dvoch slov zo Z^+, musí byť $\lambda(s, x) = \lambda(t, x)$ a $\widehat{\lambda}(\delta(s, x), w) = \widehat{\lambda}(\delta(t, x), w)$. Pretože $w \in X^+$ bolo ľubovoľné slovo, z poslednej rovnosti vyplýva, že $\delta(s, x)E\delta(t, x)$ pre ľubovoľné $w \in X^+$. □

Z vety 3.2 dostávame takýto výsledok. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat a $E = \{A_1, \ldots, A_n\}$ je rozklad na množine jeho stavov, ktorý je indukovaný ekvivalenciou E. Ak $s, t \in A_i$, pre každé $x \in X$ existuje $j \in \{1, \ldots, n\}$ také, že $\delta(s, x), \delta(t, x) \in A_j$. Ak označíme $\delta(A_i, x) = \{\delta(s, x); s \in A_i\}$, z predošlej vety vyplýva, že pre každé A_i a každé $x \in X$ existuje také A_j, že $\delta(A_i, x) \subset A_j$.

Definícia 3.14. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat. Nech $A_R = (S_R, X, Z, \delta_R, \lambda_R)$ je taký automat, že $S_R = E = \{A_1, \ldots, A_n\}$ a funkcie $\delta_R : S_R \times X \to S_R$, $\lambda_R : S_R \times X \to Z$ sú definované takto:

- $\delta_R(A_i, x) = A_j$ práve vtedy, keď $\delta(A_i, x) \subset A_j$,
- $\lambda_R(A_i, x) = \lambda(s, x)$ pre ľubovoľné $s \in A_i$.

Potom automat A_R nazývame ***redukovaný automat*** (z) ***automatu*** A.

Napriek tomu, že v názve automatu A_R sa nachádza slovo „redukovaný“, redukovanosť tohto automatu budeme musieť ešte len dokázať.

Je zrejmé, že výstupné funkcie λ_R automatu A_R je dobre definovaná, lebo pre každé $s, t \in A_i$ podmienka sEt implikuje $\widehat{\lambda}(s, w) = \widehat{\lambda}(t, w)$ a táto rovnosť musí platiť aj pre $w = x \in X$.

Ďalej nech $w = x^1 \ldots x^n \in X^+$ je ľubovoľné slovo. Potom

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_R(A_i, w) &= \widehat{\lambda}_R(A_i, x^1 \ldots x^n) = \\ &= \lambda_R(A_i, x^1)\lambda_R(\delta_R(A_i, x^1), x^2)\lambda_R(\delta_R(\delta_R(A_i, x^1), x^2), x^3) \cdots = \\ &= \lambda(s, x^1)\lambda(\delta(s, x^1), x^2)\lambda(\delta(\delta(s, x^1), x^2), x^3) \cdots = \\ &= \lambda(s, x^1)\lambda(\delta(s, x^1), x^2)\lambda(\widehat{\delta}(s, x^1x^2), x^3) \cdots = \\ &= \widehat{\lambda}(s, x^1 \ldots x^n) = \widehat{\lambda}(s, w) \end{aligned}$$

pre každé $s \in A_i$.

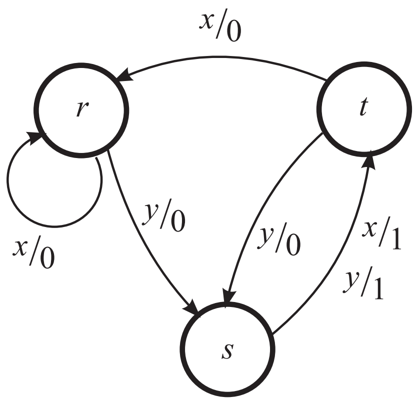
Z toho vyplýva, že pre každé $s \in S$ existuje $A_i \in S_R$ (práve to A_i, pre ktoré je $s \in A_i$) také že, $s \sim A_i$. Je zrejmé, že aj pre každé $A_i \in S_R$ existuje $s \in S$ také, že $A_i \sim s$ (túto vlastnosť má každé $s \in A_i$). Preto A a A_R sú ekvivalentné automaty.

Teraz ukážeme, že automat A_R je naozaj redukovaný automat. Ak $i \neq j$ a $s \in A_i$,$t \in A_j$ potom $s\not{E}t$. Preto existuje $w \in X^+$ také, že $\widehat{\lambda}(s, w) \neq \widehat{\lambda}(t, w)$. Ale $\widehat{\lambda}(s, w) = \widehat{\lambda}_R(A_i, w)$ a $\widehat{\lambda}(t, w) = \widehat{\lambda}_R(A_j, w)$. Preto $\widehat{\lambda}_R(A_i, w) \neq \widehat{\lambda}_R(A_j, w)$. Podmienka $i \neq j$ implikuje $A_i \not\sim A_j$, čiže A_R je redukovaný automat.

Tieto výsledky zhrnieme v tejto vete.

Veta 3.3. Nech A je automat. Automat A_R je redukovaný a platí $A \sim A_R$. □

Príklad 3.19. Nech automat A je daný pomocou grafu na obr. 27. Nájdeme redukovaný automat A_R tohto automatu.



Obr. 27. Graf automatu z príkladu 3.19

Riešenie. Aby sme túto úlohu rozriešili, potrebujeme nájsť triedy ekvivalencie. Priamo z grafu daného automatu dostávame $\lambda(r,x)=\lambda(t,x)=0\neq 1=\lambda(s,x)$. Preto $r\not E s$. V jednej triede ekvivalencie E ešte môžu byť stavy r,t. Pre tieto stavy dostávame:

$$\lambda(r,x)=0,\ \lambda(t,x)=0,\ \lambda(r,y)=0,\ \lambda(t,y)=0$$

$$\delta(r,x)=r,\ \delta(t,x)=r,\ \delta(r,y)=s,\ \delta(t,y)=s$$

Z toho vyplýva, že pre každé $w=x^1x^2\dots x^n\in X^+$ platí:

Ak $x^1=x$, tak $\widehat{\lambda}(r,w)=0\widehat{\lambda}(r,x^2\dots x^n)=\widehat{\lambda}(t,w)$.

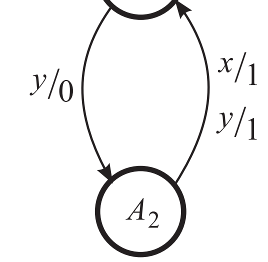
Ak $x^1=y$, tak $\widehat{\lambda}(r,w)=0\widehat{\lambda}(s,x^2\dots x^n)=\widehat{\lambda}(t,w)$.

Pretože už inej možnosti niet, je $r\sim t$. Preto $E=\{\{r,t\},\{s\}\}=\{\overline{r,t},\overline{s}\}=\{A_1,A_2\}$. Preto $A_R=(\{A_1,A_2\},\{x,y\},\{0,1\},\delta_R,\lambda_R)$ je automat, ktorý je daný pomocou tab. 7. Jeho graf vidíme na obr. 28. ■

Tabuľka 7. Tabuľka redukovaného automatu z príkladu 3.19

	x	y
A_1	$A_1/0$	$A_2/0$
A_2	$A_1/1$	$A_1/1$

Teraz už vidíme, že k danému automatu A vieme nájsť redukovaný automat A_R, ak dokážeme nájsť triedy ekvivalencie E. Zatiaľ sa ukazuje, že proces hľadania tried ekvivalencie E nie je finitný. Musíme totiž dokázať, že pre nekonečne veľa slov $w\in X^+$



Obr. 28. Graf redukovaného automatu z príkladu 3.19

platí istá rovnosť. Nie je to, pravdaže, až také komplikované, ako to vyzerá. Aby sme sa o tom presvedčili, budeme definovať nasledujúce označenie.

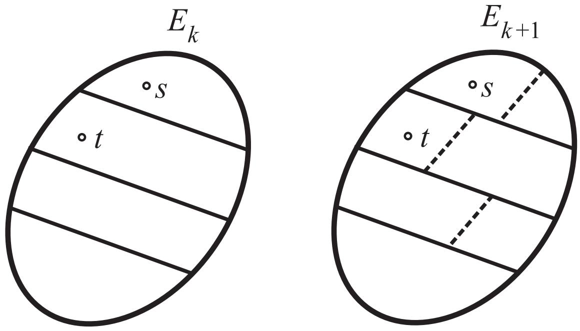
Definícia 3.15. Nech je daný automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$. Budeme hovoriť, že dva ***stavy*** $s, t \in S$ ***sú k-ekvivalentné***, ak pre každé slovo $w = x^1 \dots x^k \in X^+$, dĺžky k platí:

$$\widehat{\lambda}(s, x^1 \dots x^k) = \widehat{\lambda}(t, x^1 \dots x^k).$$

V takomto prípade budeme písať sE_kt.

Pomocou definície 3.15 sme na množine stavov S pre každé $k = 1, 2, \dots$ definovali reláciu E_k. Je dosť zrejmé, že každá z týchto relácií je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Preto je to ekvivalencia. Teda na množine S máme postupnosť ekvivalencií $E_1, E_2, \dots$ a ešte aj ekvivalenciu E. Aký je medzi týmito ekvivalenciami vzťah, to ukážeme v nasledujúcich vetách.

Veta 3.4. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat. Potom $E_{k+1} \subset E_k$. To znamená, že podmienka $sE_{k+1}t$ implikuje sE_kt pre $k = 1, 2, \dots$.



Obr. 29. Ilustrácia dôkazu vety 3.4

Dôkaz. Predpokladajme, že $s\not{E}_kt$. Teda existuje slovo $w \in X^+$ dĺžky k také, že $\widehat{\lambda}(s, w) \neq \widehat{\lambda}(t, w)$. Nech $x \in X$ je ľubovoľné vstupné písmeno. Potom wx je slovo dĺžky $k + 1$ a

$$\widehat{\lambda}(s, wx) = \widehat{\lambda}(s, w)\lambda(\widehat{\delta}(s, w), x) \neq \widehat{\lambda}(t, w)\lambda(\widehat{\delta}(t, w), x) = \widehat{\lambda}(t, wx).$$

Z toho vyplýva, že $s\not{E}_{k+1}t$, takže sE_kt je nutnou podmienkou $sE_{k+1}t$. Tým je veta 3.4 dokázaná. $\square$

Z vety 3.4 vyplýva, že každá trieda ekvivalencie E_{k+1} leží v nejakej triede ekvivalencie E_k. V takomto prípade hovoríme, že príslušný rozklad E_{k+1} je zjemnením rozkladu E_k (pozri obr. 29).

Pre postupnosť $E_1, E_2, \dots$ sme dostali nekonečný počet inklúzií, ktoré môžeme vyjadriť takto: $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$. Je mysliteľné, že v tejto postupnosti sa dve ekvivalencie rovnajú, teda že tieto inklúzie majú nasledujúci tvar: $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_{k-1} = E_k \supset E_{k+1} \supset \dots$. Dokážeme vetu, z ktorej vyplýva, že v takomto prípade už všetky ďalšie inklúzie, počnúc prvou rovnosťou, môžeme nahradiť rovnosťami.

Veta 3.5. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat sE_kt. Potom pre každé $x \in X$ je $\delta(s, x)E_{k-1}\delta(t, x)$.

Dôkaz. Nech $w \in X^+$ je slovo dĺžky $k - 1$ a $x \in X$ je ľubovoľné písmeno. Potom xw je slovo dĺžky k. Nech sE_kt. Potom $\widehat{\lambda}(s, xw) = \widehat{\lambda}(t, xw)$. Z toho už dostávame

$$\lambda(s, x)\widehat{\lambda}(\delta(s, x), w) = \lambda(t, x)\widehat{\lambda}(\delta(t, x), w).$$

Pretože ide o rovnosť dvoch slov vo výstupnej abecede, musí byť $\lambda(s,x) = \lambda(t,x)$ a $\widehat{\lambda}(\delta(s,x),w) = \widehat{\lambda}(\delta(t,x),w)$. Z poslednej rovnosti už dostávame $\delta(s,x)E_{k-1}\delta(t,x)$ pre každé $x \in X$. □

Teraz už môžeme vysloviť a dokázať vopred ohlásenú vetu.

Veta 3.6. Nech $A = (S,X,Z,\delta,\lambda)$ je automat. Nech $k \geq 2$ a $E_{k-1} = E_k$, potom $E_k = E_{k+1}$.

DÔKAZ. Z vety 3.4 vyplýva, že za predpokladu $E_{k-1} = E_k$ stačí dokázať $E_k \subset E_{k+1}$. Potom z inklúzie $E_k \supset E_{k+1}$, ktorú nám dáva veta 3.4, už dostávame požadovanú rovnosť.

Nech $k \geq 2$ a $E_{k-1} = E_k$. Nech sE_kt. Potom z vety 3.5 vyplýva, že $\delta(s,x)E_{k-1}\delta(t,x)$ pre každé $x \in X$. Z rovnosti $E_{k-1} = E_k$ teraz dostávame, že $\delta(s,x)E_k\delta(t,x)$ pre každé $x \in X$. Nech $w \in X^+$ je ľubovoľné slovo dĺžky $k+1$. Toto slovo si môžeme napísať v tvare $w = xv$, kde $x \in X$ a v je slovo dĺžky k. Potom

$$\widehat{\lambda}(s,w) = \widehat{\lambda}(s,xv) = \lambda(s,x)\widehat{\lambda}(\delta(s,x),v).$$

Pretože je sE_kt, je aj sE_1t. Z toho vyplýva, že $\lambda(s,x) = \lambda(t,x)$. Z podmienky $\delta(s,x)E_k\delta(t,x)$ dostávame $\widehat{\lambda}(\delta(s,x),v) = \widehat{\lambda}(\delta(t,x),v)$. Preto

$$\widehat{\lambda}(s,w) = \lambda(s,x)\widehat{\lambda}(\delta(s,x),v) = \lambda(t,x)\widehat{\lambda}(\delta(t,x),v) = \widehat{\lambda}(t,xv) = \widehat{\lambda}(t,w).$$

Teda $sE_{k+1}t$. Tým je veta 3.6 dokázaná. □

Ak $E_{k-1} = E_k$ potom $E_k = E_{k+1}$. Z tejto rovnosti ďalej vyplýva, že $E_{k+1} = E_{k+2}$ atď.

Nech $E_{k-1} = E_k$, potom

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_{k-1} = E_k = E_{k+1} = E_{k+2} = \ldots.$$

Ak je teraz $sE_{k-1}t$, stavy s,t dávajú rovnaké výstupné postupnosti na slová dĺžky $1,2,\ldots,k-1,k,k+1,k+2,\ldots$. Tieto dva stavy dávajú rovnaké výstupné slovo pre ľubovoľné slovo $w \in X^+$. Preto v tomto prípade je $E_{k-1} = E_k = E_{k+1} = E$.

Teraz sa nám núkajú dve otázky:

1. Musí existovať také k, aby $E_{k-1} = E_k$?
2. Ak také k existuje, pre ako veľké k platí $E_{k-1} = E_k$?

Pokúsime sa dať odpoveď na tieto otázky. Nech $A = (S,X,Z,\delta,\lambda)$ je automat, ktorého množina stavov $S = \{s_1,\ldots,s_n\}$ má n prvkov. Vieme, že platí $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots \supset E_n \supset \ldots$. Nech $E_1 \neq E_2$. Nech rozklad E_1 pozostáva z najhrubšieho možného delenia množiny stavov, ktoré pozostáva z jedinej triedy. Potom rozklad E_2 musí pozostávať aspoň z dvoch tried. Ak by všetky rozklady až po rozklad E_n boli navzájom rôzne, rozklad E_n musí pozostávať aspoň z n tried, čo už musia byť jednoprvkové triedy. Pretože rozklad E_n už nie je možné zjemňovať, nutne musí platiť $E_n = E_{n+1} = E_{n+2} = \ldots$. Ukážeme, že ešte aj tento odhad ide o trochu zlepšiť.

Predpokladajme, že E_1 pozostáva len z jednej triedy. Teda pre každé $s,t \in S$ a každé $x \in X$ je $\lambda(s,x) = \lambda(t,x)$. Uvažujme teraz o ľubovoľnom slove xy, ktoré má dĺžku 2. Pre každé $s,t \in S$ je

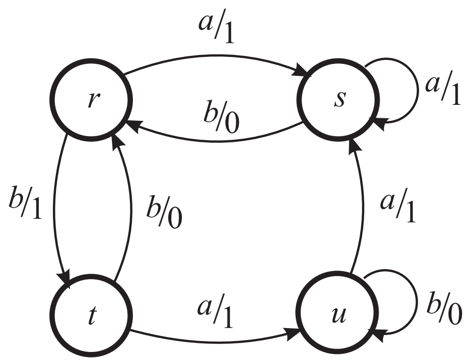
$$\widehat{\lambda}(s,xy) = \lambda(s,x)\lambda(\delta(s,x),y) = \lambda(t,x)\lambda(\delta(t,x),y) = \widehat{\lambda}(t,xy).$$

To znamená, že aj rozklad E_2 má iba jednu triedu, a tak, $E_1 = E_2 = E$. Z toho dostávame: Buď E_1 pozostáva iba z jednej triedy, a $E_1 = E$, alebo E_1 má aspoň dve triedy. Pre ekvivalenciu E_2 teraz dostávame: Buď $E_2 = E_1$, alebo E_2 má aspoň tri triedy. Podobne pre ekvivalenciu E_3 dostávame: Buď $E_3 = E_2$, alebo E_3 má aspoň štyri triedy. Tak postupujeme až po ekvivalenciu E_n, pre ktorú máme: Buď $E_n = E_{n-1}$, alebo E_n má aspoň

$n+1$ tried. Pretože S má iba n stavov, nie je posledná možnosť reálna. Preto v každom automate, ktorý má n stavov, musí byť $E_{n-1} = E_n$. Tým sme dokázali nasledujúcu vetu.

Veta 3.7. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat, ktorého množina stavov má n prvkov. Potom sEt práve vtedy, keď pre každé vstupné slovo $w \in X^+$, ktoré má dĺžku $n-1$, je $\widehat{\lambda}(s, w) = \widehat{\lambda}(t, w)$. □

Príklad 3.20. Opíšeme ekvivalenciu E v automate, ktorý je daný grafom na obr. 30.



OBR. 30. Graf automatu z príkladu 3.20

RIEŠENIE. Daný automat má štyri stavy. Preto v tomto príklade je $E = E_3$. Aby sme našli triedy ekvivalencie E_3, potrebujeme mať prehľad o všetkých výstupných slovách, ktoré sú reakciami na vstupné slová dĺžky 3. V tabuľke 8 uvádzame hodnoty $\widehat{\lambda}(q, w)$ pre každý stav $q \in \{r, s, t, u\}$ a pre slová w dĺžky 3.

TABUĽKA 8. Tabuľka výstupných slov dĺžky 3 z príkladu 3.20

	aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*bba*	*bab*	*abb*	*bbb*
r	111	110	101	111	101	110	101	101
s	111	110	101	011	011	010	101	010
t	111	110	101	011	011	010	100	010
u	111	110	101	011	001	010	101	000

Zo stĺpca patriaceho k slovu *baa* vyplýva, že $r\not{E}s, r\not{E}t, r\not{E}u$. Zo stĺpca patriaceho k slovu *bba* vyplýva, že $s\not{E}u$, $t\not{E}u$. Stĺpec patriaci slovu *abb* implikuje $s\not{E}t$, takže $E = \{\overline{r}, \overline{s}, \overline{t}, \overline{u}\}$. To znamená, že daný automat je redukovaný a je zhodný so svojím automatom A_R. ■

Postup uvedený v príklade 3.20 by bol „trochu“ zdĺhavý už napríklad v prípade, keď množina stavov má 10 prvkov a vstupná abeceda tri písmená. V takomto prípade počet slov, ktoré majú dĺžku 9 je $3^9 = 19683$. To je počet stĺpcov v tabuľke, ktorá má 10 riadkov, čiže by bolo treba uvažovať o 196830 výstupných slovách.

Pri postupnom generovaní ekvivalencií E_k s výhodou využívame túto vetu, ktorá má veľký praktický význam pri riešení príkladov.

Veta 3.8. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat. Potom pre ľubovoľné $s, t \in S$ a každé $x \in X$ platí:

$$sE_{k+1}t \text{ práve vtedy, keď } sE_kt \text{ a súčasne } \delta(s, x)E_k\delta(t, x).$$

DÔKAZ.

a) Z vety 3.4 a 3.5 vyplýva, že predpoklad $sE_{k+1}t$ implikuje sE_kt a $\delta(s,x)E_k\delta(t,x)$ pre každé $x \in X$

b) Nech sE_kt a súčasne $\delta(s,x)E_k\delta(t,x)$ pre každé $x \in X$. Pretože $E_1 \supset E_k$, je za tohto predpokladu sE_1t a súčasne $\delta(s,x)E_k\delta(t,x)$. Nech $w \in X^+$ ľubovoľné vstupné slovo dĺžky $k+1$. Toto slovo si môžeme napísať v tvare $w = xv$ kde $x \in X$ a $v \in X^+$ je slovo dĺžky k. Preto

$$\widehat{\lambda}(s,w) = \widehat{\lambda}(s,xv) = \lambda(s,x)\widehat{\lambda}(\delta(s,x),v) = \lambda(t,x)\widehat{\lambda}(\delta(t,x),v) = \widehat{\lambda}(t,xv) = \widehat{\lambda}(t,w).$$

Teda $sE_{k+}t$. Tým je veta 3.8 dokázaná. □

Príklad 3.21. Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat, ktorý je daný pomocou tab. 9. Nájdeme redukovaný automat A_R tohto automatu.

TABUĽKA 9. Tabuľka automatu z príkladu 3.21

	δ		λ	
	x	y	x	y
1	2	1	0	1
2	1	3	0	0
3	3	4	0	1
4	4	4	0	1
5	2	2	0	0

RIEŠENIE. Najprv nájdeme triedy ekvivalencie E. Triedy ekvivalencie E_1 môžeme popísať priamo z tabuľky daného automatu.

Vidíme, že $\lambda(1,x) = \lambda(3,x) = \lambda(4,x) = 0$, $\lambda(2,x) = \lambda(5,x) = 0$, $\lambda(1,y) = \lambda(3,y) = $ $= \lambda(4,y) = 1$, $\lambda(2,y) = \lambda(5,y) = 0$. Preto $E_1 = \{\overline{1,3,4}, \overline{2,5}\}$.

Teraz opíšeme triedy ekvivalencie E_2. Využijeme podmienku $E_1 \supset E_2$. Preto musíme rozhodnúť len o týchto otázkach: 1) $1E_23$? 2) $1E_24$? 3) $3E_24$? 4) $2E_25$? Začneme prvou otázkou. Aby sme na túto otázku dali odpoveď, stačí vyšetriť, či: $\delta(1,x)E_1\delta(3,x)$ a súčasne $\delta(1,y)E_1\delta(3,y)$. Nemusíme totiž zisťovať, či $1E_13$, lebo všetky dvojice sme vybrali tak, aby práve túto podmienku spĺňali. Z tabuľky daného automatu máme: $\delta(1,x) = 2$ a $\delta(3,x) = 3$. $2\not{E}_13$ preto $1\not{E}_23$. Ďalej už budeme písať stručnejšie.

$1E_24$? Máme: $\delta(1,x) = 2$, $\delta(4,x) = 4$, $2\not{E}_14$, preto $1\not{E}_24$.
$3E_24$? Máme: $\delta(3,x) = 3$, $\delta(4,x) = 4$, $3E_14$, $\delta(3,y) = 4$, $\delta(4,y) = 4$, $4E_14$, preto $3E_24$.
$2E_25$? Máme: $\delta(2,x) = 1$, $\delta(5,x) = 2$, $1\not{E}_12$, preto $2\not{E}_25$.

Teda $E_2 = \{\overline{1}, \overline{3,4}, \overline{2}, \overline{5}\}$.

Aby sme našli triedy ekvivalencie E_3, stačí rozhodnúť iba o tom, či $3E_34$. Máme $\delta(3,x) = 3$, $\delta(4,x) = 4$, $3E_24$, $\delta(3,y) = 4$, $\delta(4,y) = 4$, $4E_24$, preto $3E_34$. Z toho vyplýva, že $E_3 = \{\overline{1}, \overline{3,4}, \overline{2}, \overline{5}\} = E_2 = E$. Označme triedy ekvivalencie E takto: $A_1 = \overline{1}$, $A_2 = \overline{2}$, $A_3 = \overline{3,4}$, $A_4 = \overline{5}$. Potom $A_R = (\{A_1, A_2, A_3, A_4\}, \{x,y\}, \{0,1\}, \delta_R, \lambda_R)$, pričom tabuľka prechodovej funkcie δ_R a výstupnej funkcie λ_R je v tabuľke 10. ■

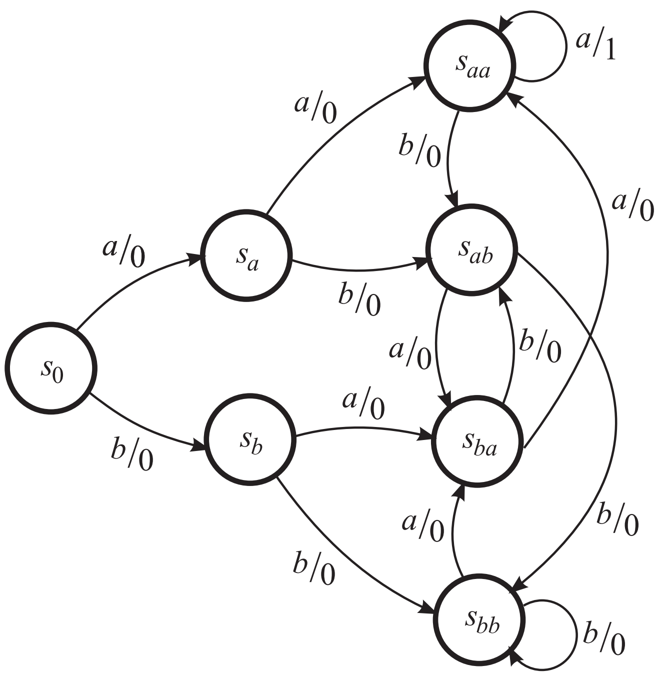
Príklad 3.22. Uvažujme o generátore postupnosti signálov, v ktorej sa vyskytujú iba dva signály a, b. Táto postupnosť prichádza na vstup počítadla, ktoré na výstupe reaguje hodnotou 1, ak sa na vstupe objavia tri signály a idúce za sebou. Vo zvyšných prípadoch je

TABUĽKA 10. Tabuľka redukovaného automatu z príkladu 3.21

	x	y	x	y
A_1	A_2	A_1	0	1
A_2	A_1	A_3	0	0
A_3	A_3	A_3	0	1
A_4	A_2	A_2	0	0

výstup 0 (ide o tzv. počítadlo blokov dĺžky 3). Teraz opíšeme toto počítadlo ako automat a k tomuto automatu nájdeme redukovaný automat.

RIEŠENIE. Počítadlo budeme opisovať ako iniciálny automat so začiatočným stavom s_0. Stav s_a bude zodpovedať situácii, keď v stave s_0 sa na vstupe objavil signál a. Podobne stav s_b bude zodpovedať situácii, keď v stave s_0 sa na vstupe objavil signál b. Ďalej definujeme štyri stavy s_{aa},s_{ab}, s_{ba}, s_{bb}, pričom prvé dva zodpovedajú situácii, keď v stave s_a na vstup počítadla príde a, resp. b. Druhé dva stavy zodpovedajú situácii, keď v stave s_b na vstup počítadla príde a, resp. b. Ďalšia činnosť automatu je už zrejmá. Napríklad $\delta(s_{ab}, a) = s_{ba}$, $\delta(s_{ab}, b) = s_{bb}$. Je zrejmé, že $\lambda(s_{aa}, a) = 1$ a vo zvyšných prípadoch sa hodnoty výstupnej funkcie rovnajú 0. Graf tohto automatu uvádzame na obr. 31. Hodnoty prechodovej a výstupnej funkcie sú v tabuľke 11.



OBR. 31. Graf automatu z príkladu 3.22

Teraz nájdeme redukovaný automat automatu z tabuľky 11. Priamo z tabuľky čítame $E_1 = \{\overline{s_0, s_a, s_b, s_{ab}, s_{ba}, s_{bb}}, \overline{s_{aa}}\}$.

Aby sme získali triedy ekvivalencie E_2, postupne budeme testovať jednotlivé možnosti.

$s_0 E_2 s_a$? $\delta(s_0, a) = s_a$, $\delta(s_a, a) = s_{aa}$, $s_a \cancel{E_1} s_{aa}$, preto $s_0 \cancel{E_2} s_a$.

$s_0 E_2 s_b$? $\delta(s_0, a) = s_a$, $\delta(s_b, a) = s_{ba}$, $s_a E_1 s_{ba}$, $\delta(s_0, b) = s_b$, $\delta(s_b, b) = s_{bb}$, $s_b E_1 s_{bb}$, preto $s_0 E_2 s_b$.

$s_0E_2s_{ab}$? $\delta(s_0,a)=s_a$, $\delta(s_{ab},a)=s_{ba}$, $s_aE_1s_{ba}$, $\delta(s_0,b)=s_b$, $\delta(s_{ab},b)=s_{bb}$, $s_bE_1s_{bb}$, preto $s_0E_2s_{ab}$.

$s_0E_2s_{ba}$? $\delta(s_0,a)=s_a$, $\delta(s_{ba},a)=s_{aa}$, $s_a\not{E}_1s_{aa}$, preto $s_0\not{E}_2s_{ba}$.

$s_0E_2s_{bb}$? $\delta(s_0,a)=s_a$, $\delta(s_{bb},a)=s_{ba}$, $s_aE_1s_{ba}$, $\delta(s_0,b)=s_b$, $\delta(s_{bb},b)=s_{bb}$, $s_bE_1s_{bb}$, preto $s_0E_2s_{bb}$.

V jednej triede ekvivalencie E_2 ešte môžu byť stavy s_a, s_{ba}.

$s_aE_2s_{ba}$? $\delta(s_a,a)=s_{aa}$, $\delta(s_{ba},a)=s_{aa}$, $s_{aa}E_1s_{aa}$, $\delta(s_a,b)=s_{ab}$, $\delta(s_{ba},b)=s_{ab}$, $s_{ab}E_1s_{ab}$, preto $s_aE_2s_{ba}$.

Z doterajších výsledkov vyplýva, že $E_2=\{\overline{s_0,s_b,s_{ab},s_{bb}},\overline{s_a,s_{ba}},\overline{s_{aa}}\}$.

Tabuľka 11. Tabuľka automatu z príkladu 3.22

	a	b	a	b
s_0	s_a	s_b	0	0
s_a	s_{aa}	s_{ab}	0	0
s_b	s_{ba}	s_{bb}	0	0
s_{aa}	s_{aa}	s_{ab}	1	0
s_{ab}	s_{ba}	s_{bb}	0	0
s_{ba}	s_{aa}	s_{ab}	0	0
s_{bb}	s_{ba}	s_{bb}	0	0

Teraz budeme hľadať triedy ekvivalencie E_3.

$s_0E_3s_b$? $\delta(s_0,a)=s_a$, $\delta(s_b,a)=s_{ba}$, $s_aE_2s_{ba}$, $\delta(s_0,b)=s_b$, $\delta(s_b,b)=s_{bb}$, $s_bE_2s_{bb}$, preto $s_0E_3s_b$.

$s_0E_3s_{ab}$? $\delta(s_0,a)=s_a$, $\delta(s_{ab},a)=s_{ba}$, $s_aE_2s_{ba}$, $\delta(s_0,b)=s_b$, $\delta(s_{ab},b)=s_{bb}$, $s_bE_2s_{bb}$, preto $s_0E_3s_{ab}$.

$s_0E_3s_{bb}$? $\delta(s_0,a)=s_a$, $\delta(s_{bb},a)=s_{ba}$, $s_aE_2s_{ba}$, $\delta(s_0,b)=s_b$, $\delta(s_{bb},b)=s_{bb}$, $s_bE_2s_{bb}$, preto $s_0E_3s_{bb}$.

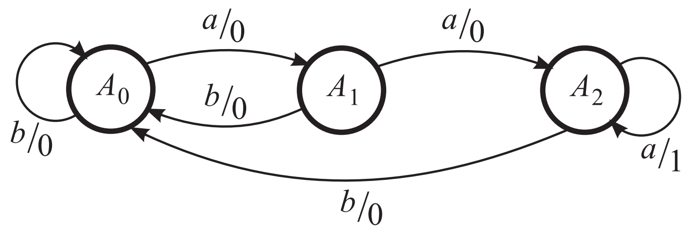
$s_aE_3s_{ba}$? $\delta(s_a,a)=s_{aa}$, $\delta(s_{ba},a)=s_{aa}$, $s_{aa}E_2s_{aa}$, $\delta(s_a,b)=s_{ab}$, $\delta(s_{ba},b)=s_{ab}$, $s_{ab}E_2s_{ab}$, preto $s_aE_3s_{ba}$.

Z tohto testu vyplýva, že $E_3=E_2=\{\overline{s_0,s_b,s_{ab},s_{bb}},\overline{s_a,s_{ba}},\overline{s_{aa}}\}=E$.
Označme $\overline{s_0,s_b,s_{ab},s_{bb}}=A_0$, $\overline{s_a,s_{ba}}=A_1$, $\overline{s_{aa}}=A_2$, potom
$A_R=(\{A_0,A_1,A_2\},\{a,b\},\{0,1\},\delta_R,\lambda_R)$. Hodnoty funkcií δ_R a λ_R uvádzame v tabuľke 12. Graf automatu A_R je nakreslený na obr. 32. Tento automat je tiež iniciálny automat so začiatočným stavom A_0. ■

Tabuľka 12. Tabuľka redukovaného automatu z príkladu 3.22

	a	b	a	b
A_0	A_1	A_0	0	0
A_1	A_2	A_0	0	0
A_2	A_2	A_0	1	0

Poznámka 3.4. Ak máme rozhodnúť o tom, či dva automaty sú ekvivalentné, môžeme uvažovať takto. Nech $A=(S,X,Z,\delta_A,\lambda_A)$ a $B=(T,X,Z,\delta_B,\lambda_B)$. Túto dvojicu



OBR. 32. Graf redukovaného automatu z príkladu 3.22

automatov môžeme považovať za jeden automat $A \cup B = (S \cup T, X, Z, \delta, \lambda)$, kde $\delta : (S \cup T) \times X \to S \cup T$ a $\lambda : (S \cup T) \times X \to Z$ sú definované tak, že

$$\begin{aligned}
&\delta(s,x) = \delta_A(s,x), \text{ ak } s \in S,\\
&\delta(t,x) = \delta_B(t,x), \text{ ak } t \in T,\\
&\lambda(s,x) = \lambda_A(s,x), \text{ ak } s \in S,\\
&\lambda(t,x) = \lambda_B(t,x), \text{ ak } t \in T.
\end{aligned}$$

Potom v automate $A \cup B$ môžeme vyhľadať triedy ekvivalencie E. Ak v každej triede ekvivalencie sa nachádzajú aj prvky množiny S a aj prvky množiny T, automaty A a B sú ekvivalentné. Ak existuje trieda, v ktorej sú len prvky z jednej z uvedených množín, dané automaty nie sú ekvivalentné.

Príklad 3.23. Nech automat A je daný tabuľkou 13, časť a) a B je automat, ktorý je daný tabuľkou 13, časť b). Automat $A \cup B$ uvádzame v tabuľke 14.

TABUĽKA 13. Automaty z príkladu 3.23

	x	x
s_1	s_2	0
s_2	s_2	0
s_3	s_1	1
s_4	s_4	1

a)

	x	x
q_1	q_1	0
q_2	q_1	1
q_3	q_3	1
q_4	q_3	1

b)

TABUĽKA 14. Automat z príkladu 3.23

	x	x
s_1	s_2	0
s_2	s_2	0
s_3	s_1	1
s_4	s_4	1
q_1	q_1	0
q_2	q_1	1
q_3	q_3	1
q_4	q_3	1

Pre ekvivalencie E_k dostávame:

$$E_1 = \{\overline{s_1, s_2, q_1}, \overline{s_3, s_4, q_2, q_3, q_4}\}, E_2 = \{\overline{s_1, s_2, q_1}, \overline{s_3, q_2}, \overline{s_4, q_3, q_4}\} = E_3 = E.$$

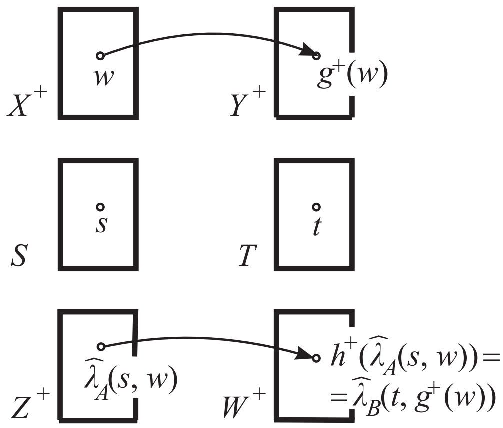
Pretože v každej triede ekvivalencie E sa nachádzajú stavy aj automatu A a aj automatu B, dané automaty sú ekvivalentné.

Poznámka 3.5. Definovať ekvivalenciu stavov a automatov je možné aj vo všeobecnejšom prípade. Najprv uvažujme takto: Nech $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ sú dve abecedy s rovnakým počtom písmen. Nech $g : X \to Y$ je bijekcia. Uvažujme o zobrazení $g^+ : X^+ \to Y^+$, ktoré je definované predpisom: Pre každé $w = x^1 \ldots x^n$ je

$$g^+(w) = g^+(x^1 \ldots x^k) = g(x^1)g(x^2) \ldots g(x^k).$$

Nie je ťažké dokázať, že zobrazenie g^+ je tiež bijekcia.

Majme teraz dva automaty $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, Y, W, \delta_B, \lambda_B)$. Nech existujú bijekcie $g : X \to Y$ a $h : Z \to W$. Spolu s týmito bijekciami sú dané aj bijekcie $g^+ : X^+ \to Y^+$ a $h^+ : X^+ \to Y^+$, Potom budeme hovoriť, že stavy $s \in S$ a $t \in T$ sú ekvivalentné, ak pre každé $w \in X^+$ je $h^+(\widehat{\lambda}_A(s, w)) = \widehat{\lambda}_B(t, g^+(w))$ (pozri obr. 33). Túto definíciu ekvivalencie stavov môžeme využiť aj na zovšeobecnenie definície ekvivalencie automatov.



Obr. 33. Ilustrácia poznámky 3.5

6. Izomorfizmus automatov

V praxi sa často stretávame s prípadom, keď jeden automat vznikne z druhého preznačením (zakódovaním) stavov. V takom prípade budeme hovoriť, že tieto automaty sú izomorfné. Presnejšie sformulujeme tento pojem v tejto definícii.

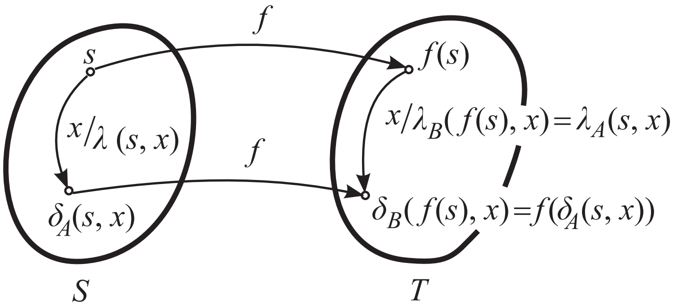
Definícia 3.16. Nech $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$ sú automaty. Nech existuje bijekcia $f : S \to T$ taká, že:

a) pre každé $s \in S$ a každé $x \in X$ sa $f(\delta_A(s, x)) = \delta_B(f(s), x)$,
b) pre každé $s \in S$ a každé $x \in X$ sa $\lambda_A(s, x) = \lambda_B(f(s), x)$.

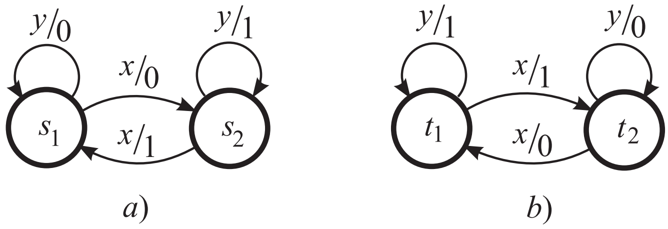
Potom budeme hovoriť, že ***automaty*** A a B sú ***izomorfné*** (pozri obr. 34).

Príklad 3.24. Nech automat A je daný grafom na obr. 35, časť a) a B je automat, ktorý je daný grafom, na obr. 35 časť b). Ukážeme, že tieto automaty sú izomorfné.

Riešenie. Množina stavov automatu A je $S = \{s_1, s_2\}$. Množina stavov automatu B



Obr. 34. Ilustrácia definície 3.16



Obr. 35. Ilustrácia automatov z príkladu 3.24

je $T = \{t_1, t_2\}$. Je zrejmé, že funkcia $f : S \to T$, ktorá je daná funkčnými hodnotami $f(s_1) = t_2$ a $f(s_2) = t_1$ je bijekcia. Ďalej dostávame:

$$
\begin{aligned}
&f(\delta_A(s_1, x)) = f(s_2) = t_1 = \delta_B(t_2, x) = \delta_B(f(s_1), x),\\
&f(\delta_A(s_1, y)) = f(s_1) = t_2 = \delta_B(t_2, y) = \delta_B(f(s_1), y),\\
&f(\delta_A(s_2, x)) = f(s_1) = t_2 = \delta_B(t_1, x) = \delta_B(f(s_2), x),\\
&f(\delta_A(s_2, y)) = f(s_2) = t_1 = \delta_B(t_1, y) = \delta_B(f(s_2), y),\\
&\lambda_A(s_1, x) = 0 = \lambda_B(t_2, x) = \lambda_B(f(s_1), x),\\
&\lambda_A(s_1, y) = 0 = \lambda_B(t_2, y) = \lambda_B(f(s_1), y),\\
&\lambda_A(s_2, x) = 1 = \lambda_B(t_1, x) = \lambda_B(f(s_2), x),\\
&\lambda_A(s_2, y) = 1 = \lambda_B(t_1, y) = \lambda_B(f(s_2), y).
\end{aligned}
$$

Z uvedených rovností vyplýva, že dané automaty sú izomorfné. Vidíme, že formálne overenie izomorfizmu je aj v tých najjednoduchších prípadoch dosť zdĺhavé. Preto izomorfizmus overujeme viac-menej vizuálnym spôsobom, keď z grafu dokážeme určiť bijekciu f, ktorá spĺňa podmienky izomorfizmu. ■

Keďže izomorfné automaty vykazujú vysoký stupeň príbuznosti, dá sa čakať, že tieto automaty budú aj ekvivalentné. Dôkaz tejto vety nie je až tak zrejmý.

Veta 3.9. Dva izomorfné automaty sú ekvivalentné.

Dôkaz. Nech $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$ sú izomorfné automaty, pričom $f : S \to \mathrm{T}$ je bijekcia, pomocou ktorej je tento izomorfizmus definovaný. Teraz dokážeme, že pre každé $s \in S$ sú stavy s a $f(s)$ ekvivalentné. Tým bude dokázaná ekvivalencia automatov A a B. Dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na dĺžku slova $w \in X^+$. Na zjednodušenie použijeme označenie $sE_kf(s)$ na označenie skutočnosti, že stavy s a $f(s)$ dávajú rovnaké výstupné slovo na každé vstupné slovo dĺžky k.

1. Priamo z definície izomorfizmu vyplýva, že pre každé $s \in S$ je $sE_1f(s)$, lebo pre každé $x \in X$ platí: $\lambda_A(s, x) = \lambda_B(f(s), x)$.

2. Predpokladajme, že pre každé $s \in S$ je $sE_k f(s)$. Dokážeme, že za tohto predpokladu je aj $sE_{k+1} f(s)$. Nech $w \in X^+$ je ľubovoľné slovo dĺžky $k+1$. Preto ho môžeme napísať v tvare $w = xv$, kde $x \in X$ a v je slovo dĺžky k. Potom

$$\widehat{\lambda}_A(s, w) = \widehat{\lambda}_A(s, xv) = \lambda_A(s, x)\widehat{\lambda}_A(\delta_A(s, x), v).$$

Stavy $\delta_A(s, x)$ a $f(\delta_A(s, x))$ sú podľa indukčného predpokladu „E_k-ekvivalentné“. Preto pre slovo v, ktoré má dĺžku k, platí:

$$\widehat{\lambda}_A(\delta_A(s, x), v) = \widehat{\lambda}_B(f(\delta_A(s, x)), v).$$

Teraz už máme:

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_A(s, w) &= \lambda_A(s, x)\widehat{\lambda}_A(\delta_A(s, x), v) = \lambda_B(f(s), x)\widehat{\lambda}_B(f(\delta_A(s, x)), v) = \\ &= \lambda_B(f(s), x)\widehat{\lambda}_B(\delta_B(f(s), x), v) = \widehat{\lambda}_B(f(s), xv) = \widehat{\lambda}_B(f(s), w).\end{aligned}$$

Tým sme dokázali, že pre každé $k = 1, 2, \ldots$ a pre každé $s \in S$ je $sE_k f(s)$. Z toho už vyplýva, že pre každé $s \in S$ je stav s ekvivalentný so stavom $f(s)$. Tým je veta 3.9 dokázaná. □

Teraz sformulujeme hlavnú vetu tejto časti, ktorá ukazuje vzťah izomorfizmu a ekvivalencie automatov.

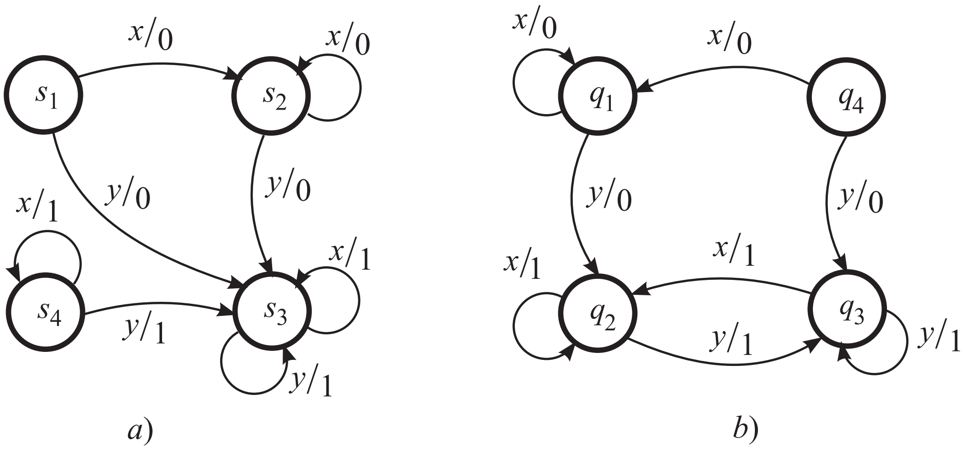
Veta 3.10. Dva konečné automaty $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$ sú ekvivalentné práve vtedy, keď ich redukované automaty A_R a B_R sú izomorfné.

DÔKAZ.
1. Nech automaty $A_R = (S_R, X, Z, \delta_{A_R}, \lambda_{A_R})$ a $B_R = (T_R, X, Z, \delta_{B_R}, \lambda_{B_R})$ sú izomorfné. Množina stavov S_R automatu A_R je množina tried ekvivalencie E_A na množine stavov S. Nech $S_R = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Pretože automaty A_R a B_R sú izomorfné, musí existovať bijekcia, $f : S_R \to T_R$, pomocou ktorej je tento izomorfizmus definovaný. Z toho vyplýva, že $T_R = \{f(A_1), \ldots, f(A_n)\}$ je rozklad množiny T. Preto pre každé $t \in T$ existuje $f(A_i)$ také, že $t \in f(A_i)$. To znamená, že pre každé $s \in A_i$ a pre každé $t \in f(A_i)$ platí $s \sim A_i \sim f(A_i) \sim t$. Z toho už vyplýva, že automaty A a B sú ekvivalentné.

2. Nech automaty $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$ sú ekvivalentné. Nech $S_R = \{A_1, \ldots, A_n\}$ je rozklad množiny S, ktorý je indukovaný ekvivalenciou E_A a $T_R = \{B_1, \ldots, B_n\}$ je rozklad množiny T, ktorý je indukovaný ekvivalenciou E_B. Vieme, že tieto rozklady musia mať rovnaký počet tried a že existuje bijekcia $f : S_R \to T_R$, pomocou ktorej je každej triede A_i, priradená trieda $f(A_i)$ navzájom ekvivalentných stavov. Triedy v množine T_R očíslujeme tak, aby $f(A_i) = B_i$. pre $i = 1, 2, \ldots$. Potom v automatoch $A_R = (S_R, X, Z, \delta_{A_R}, \lambda_{A_R})$ a $B_R = (T_R, X, Z, \delta_{B_R}, \lambda_{B_R})$ sú stavy A_i a B_i ekvivalentné, a pretože automaty A_R a B_R sú redukované, sú to jediné možné dvojice ekvivalentných stavov. Z vety 3.2 teraz dostávame, že aj stavy $\delta_{A_R}(A_i, x)$ a $\delta_{B_R}(B_i, x)$ sú ekvivalentné pre každé $x \in X$. Z toho už vyplýva, že, $f(\delta_{A_R}(A_i, x)) = \delta_{B_R}(B_i, x) = \delta_{B_R}(f(A_i), x)$. Tým je dokázaná prvá rovnosť izomorfizmu automatov A_R a B_R. Druhá rovnosť je už jednoduchá. Pretože stavy A_i a $f(A_i)$ sú ekvivalentné, pre každé $x \in X$ musí platiť rovnosť $\lambda_{A_R}(A_i, x) = \lambda_{B_R}(f(A_i), x)$ Teda bijekcia $f : S_R \to T_R$ definuje izomorfizmus medzi automatmi A_R a B_R. Tým je veta 3.10 dokázaná. □

Príklad 3.25. Nech $A = (\{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{x, y\}, \{0, 1\}, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{x, y\}, \{0, 1\}, \delta_B, \lambda_B)$ sú automaty, ktoré sú dané grafmi na obr. 36 časť a), b). Ukážeme, že tieto automaty sú ekvivalentné ale nie izomorfné.

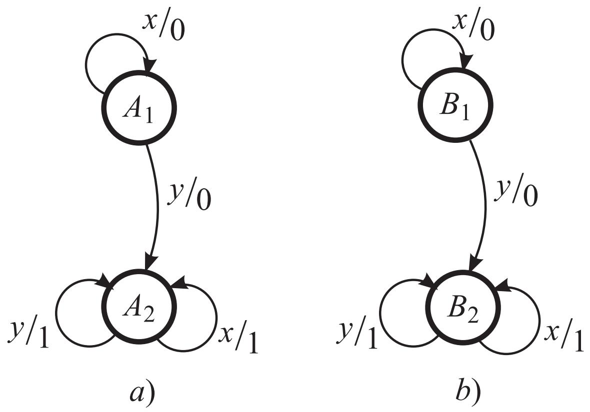
RIEŠENIE. Najprv budeme dokazovať ekvivalenciu. Preto zostrojíme redukované automaty A_R a B_R.



Obr. 36. Grafy automatov z príkladu 3.25

Pre ekvivalenciu E_A na množine stavov automatu A dostávame $E_1 = \{\overline{s_1, s_2}, \overline{s_3, s_4}\} = E_2 = E_A$. Ak označíme $\overline{s_1, s_2} = A_1$, a $\overline{s_3, s_4} = A_2$, automat A_R je daný grafom na obr. 37, časť a).

Pre ekvivalenciu E_B na množine stavov automatu B dostávame $E_1 = \{\overline{q_1, q_4}, \overline{q_2, q_3}\} = E_2 = E_B$. Ak označíme $\overline{q_1, q_4} = B_1$, a $\overline{q_2, q_3} = B_2$, automat B_R je daný grafom na obr. 37, časť b).



Obr. 37. Grafy redukovaných automatov z príkladu 3.25

Je zrejmé, že automaty A_R a B_R sú izomorfné. Stačí zvoliť funkciu $f : \{A_1, A_2\} \to \{B_1, B_2\}$ tak, aby $f(A_1) = B_1$, $f(A_2) = B_2$. Je zrejmé, že ide o bijekciu, pomocou ktorej je uvedený izomorfizmus definovaný. Teda A a B sú ekvivalentné automaty.

Teraz ukážeme, že pôvodné automaty, aj keď majú rovnaký počet stavov a sú ekvivalentné, ešte nemusia byť izomorfné. Aby sme ukázali, že tieto automaty nie sú izomorfné, musíme vyšetriť všetky bijekcie $f : \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \to \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ a ukázať, že ani jedna z nich nespĺňa podmienky, ktoré sú kladené na izomorfizmus automatov. V prvej časti ľahko vylúčime bijekcie, ktoré nespĺňajú podmienku $\lambda_A(s, x) = \lambda_B(f(s), x)$.

Uvažujme teda o bijekciách, ktoré podmienky pre výstupné funkcie izomorfných automatov spĺňajú. Nech f je jedna z nich. Potom $f(s_1)$ musí byť buď q_1 alebo q_4, lebo iba tieto dva stavy v automate B dávajú rovnaké výstupné hodnoty na vstupné písmená x, y ako dáva stav s_1.

a) Uvažujme teda o možnosti $f(s_1) = q_1$. Potom musí byť nutne $f(s_2) = q_4$, lebo stavy q_2, q_3, majú výstupy rôzne od stavu s_2. Pod podmienkou $f(s_1) = q_1$ a $f(s_2) = q_4$

poďme teraz overovať splnenie prvej podmienky pre izomorfizmus automatov a pritom sa pokúsime definovať zvyšné funkčné hodnoty. Počítajme: $f(\delta_A(s_1,x)) = f(s_2) = q_4$, $\delta_B(f(s_1),x) = \delta_B(q_1,x) = q_1$. Pretože $q_1 \neq q_4$, bijekcia f nespĺňa podmienky izomorfizmu automatov A a B. Musíme uvažovať o ďalších možnostiach. Tá však už je len jediná.

b) Ešte môžeme zvoliť $f(s_1) = q_4$, $f(s_2) = q_1$. Potom $f(\delta_A(s_1,x)) = f(s_2) = q_1$, $\delta_B(f(s_1),x) = \delta_B(q_4,x) = q_1$, $f(\delta_A(s_1,y)) = f(s_3)$, $\delta_B(f(s_1),y)) = \delta_B(q_4,y) = q_3$. Z toho vyplýva, že nutne musí byť $f(s_3) = q_3$, a teda $f(s_4) = q_2$. Inú možnosť pre voľbu bijekcie, ktorá spĺňa podmienky izomorfizmu automatov, už nemáme. Hodnoty bijekcie f boli volené tak, aby podmienky pre prechodovú funkciu boli splnené v stave s_1. Teraz musíme overiť, či sú splnené aj pre zvyšné stavy. Budeme ich overovať pre stav s_2:

$$f(\delta_A(s_2,x)) = f(s_2) = q_1, \delta_B(f(s_2),x) = \delta_B(q_1,x) = q_1,$$
$$f(\delta_A(s_2,y)) = f(s_3) = q_3,\ \delta_B(f(s_2),y) = \delta_B(q_1,y) = q_2.$$

Pretože $q_2 \neq q_3$, daná bijekcia nespĺňa podmienky izomorfizmu automatov A a B. Pretože inej možnosti už niet, dané automaty nie sú izomorfné. ∎

Poznámka 3.6. Tak ako v prípade ekvivalencie automatov môžeme aj pri izomorfizme automatov upustiť od požiadavky, aby automaty A a B mali spoločné vstupné a spoločné výstupné množiny. Túto podmienku treba nahradiť podmienkou existencie bijekcie medzi vstupnými a bijekcie medzi výstupnými množinami. Potom definíciu izomorfných automatov môžeme sformulovať takto:

Nech $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, Y, W, \delta_B, \lambda_B)$ sú automaty. Nech existujú také bijekcie $f : S \to T$, $g : X \to Y$, $h : Z \to W$, že pre každé $s \in S$ a každé $x \in X$ je:

a) $f(\delta_A(s,x)) = \delta_B(f(s), g(x))$,
b) $h(\lambda_A(s,x)) = \lambda_B(f(s), g(x))$.

Potom hovoríme, že automaty A a B sú izomorfné.

V tomto prípade okrem kódovania stavov sme kódovali aj vstupnú a aj výstupnú abecedu.

Dá sa dokázať, že pri takto chápanom izomorfizme automatov a pri zovšeobecnenej definícii ekvivalencie automatov, ktorú sme uviedli v poznámke 3.5, veta 3.10 platí v tom istom znení.

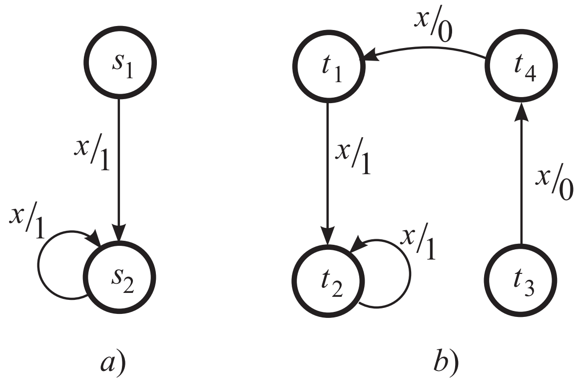
7. Pokrytie automatu automatom

Nech A je automat. V tejto časti sa budeme zaoberať automatom B, ktorý má tú vlastnosť, že pre každé vstupné slovo w dokáže generovať takú istú postupnosť (riadiacich) výstupných signálov ako automat A. Pritom automat B môže generovať aj výstupné postupnosti, ktoré automat A nebude schopný vydávať. V takom prípade budeme hovoriť, že automat B pokrýva automat A.

Definícia 3.17. Nech $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$ sú automaty. Ak existuje také zobrazenie $\varphi : S \to T$, že pre každé $w \in X^+$ je $\widehat{\lambda}_A(s,w) = \widehat{\lambda}_B(\varphi(s), w)$, budeme hovoriť, že ***automat*** B ***pokrýva automat*** A. Pritom budeme písať $B >> A$.

Príklad 3.26. Nech automaty $A = \{\{s_1, s_2\}, \{x\}, \{0,1\}, \delta_A, \lambda_A\}$ a $B = \{\{t_1, t_2, t_3, t_4\}, \{x\}, \{0,1\}, \delta_B, \lambda_B\}$ sú dané pomocou grafu na obr. 38, časť a), b). Nech $S = \{s_1, s_2\}$, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. V tomto príklade sa dá ľahko dokázať, že automat B pokrýva automat A. Pre voľbu funkcie $\varphi : S \to T$ sa nám v tomto prípade totiž núka aj viacero možností. Tieto možnosti sú takéto:

1. $\varphi(s_1) = \varphi(s_2) = t_1$,



Obr. 38. Grafy automatov z príkladu 3.26

2. $\varphi(s_1) = \varphi(s_2) = t_2$,
3. $\varphi(s_1) = t_1$, $\varphi(s_2) = t_2$,
4. $\varphi(s_1) = t_2$, $\varphi(s_2) = t_1$. ■

Veta 3.11. Automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ pokrýva ľubovoľný svoj podautomat $A' = (S', X, Z, \delta', \lambda')$.

Dôkaz. Za funkciu $\varphi : S' \to S$ stačí voliť identické zobrazenie, ktoré každému $s \in S'$ priradí to isté $s \in S$. □

Je zrejmé, že automat B pokrýva automat A práve vtedy, keď pre každý stav $s \in S$ existuje $t \in T$, ktoré je ekvivalentné so stavom s. Toto tvrdenie nemusí platiť v opačnom smere. Z toho vyplýva, že v prípade ekvivalencie automatov A a B bude $A >> B$ a $B >> A$. Dokonca platí ešte silnejšie tvrdenie.

Veta 3.12. Dva automaty $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$ sú ekvivalentné práve vtedy, keď $A >> B$ a súčasne $B >> A$.

Dôkaz. Ak $A >> B$ a $B >> A$, priradenie ekvivalentných stavov sa deje dokonca pomocou zobrazení. Preto sú tieto automaty ekvivalentné.

Ak $A \sim B$, pre každé $s \in S$ existuje dokonca celá množina prvkov $t \in T$, ktoré sú s prvkom s ekvivalentné. Je to jedna trieda ekvivalencie E_B na množine T. Z každej takejto triedy vyberieme jedno t a priradíme ho ku stavu s. Tak dostaneme zobrazenie $\varphi : S \to T$, ktoré ku každému $s \in S$ priradí $\varphi(s) \sim s$. Teda $B >> A$. Podobne sa dokáže, že aj $A >> B$. □

Dôsledok 3.1.

1. Ak A a B sú izomorfné automaty, potom $A >> B$ a $B >> A$.
2. Ak A_R je redukovaný automat automatu A, potom $A_R >> A$ a $A >> A_R$. □

Ak si pozorne prezrieme obr. 36, časť b) a obr. 37, časť b), vidíme, že v automate B z príkladu 3.25 neexistuje podautomat, ktorý by bol izomorfný s redukovaným automatom B_R. To znamená, ak automat B pokrýva automat A, v automate B nemusí existovať podautomat, ktorý je izomorfný s automatom A. Dokážeme však dôležitú vetu, z ktorej vyplýva, že v automate B musí existovať podautomat, ktorý je s automatom A ekvivalentný. Pri dôkaze využijeme túto definíciu.

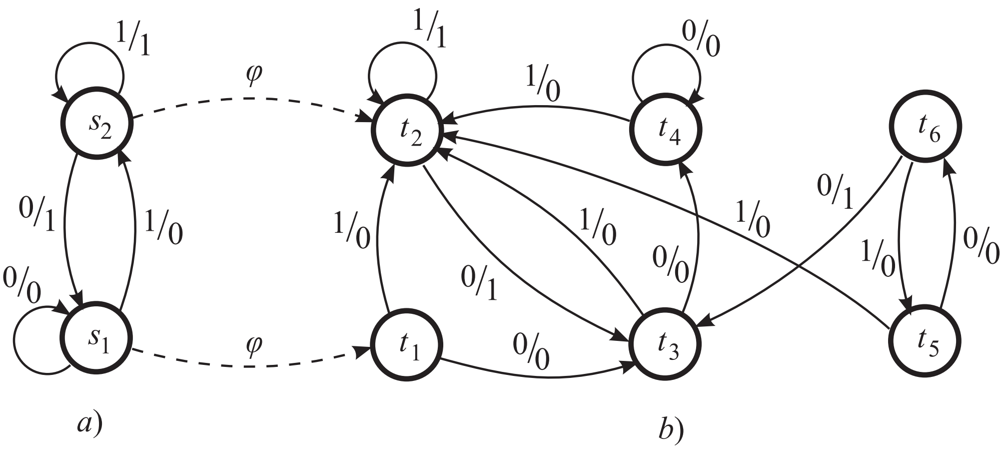
Nech $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$ je automat a $S' \subset S$. Nech T je množina všetkých stavov automatu A, ktoré sú dosiahnuteľné z niektorého stavu množiny S'. Teda $T = S' \cup \{s \in S;$ existuje $s' \in S'$ a $w \in X^+$ tak, že $s = \widehat{\delta}(s', w)\}$. Potom je zrejmé, že pre každé $s \in T$ a $x \in X$ je $\delta(s, x) \in T$. Preto funkcie $\delta' : T \times X \to T$, $\delta'(s, x) = \delta(s, x)$ a $\lambda' : T \times X \to Z$,

$\lambda'(s,x) = \lambda(s,x)$ sú zúženia funkcií δ a λ. Z toho už vyplýva, že $A' = (T, X, Z, \delta', \lambda')$ je podautomat automatu A.

Definícia 3.18. Automat A' nazývame ***podautomat automatu*** A, ktorý je ***generovaný množinou stavov*** S'.

Je zrejmé, že pre každú neprázdnu podmnožinu $S' \subset S$ existuje podautomat, ktorý je touto množinou generovaný.

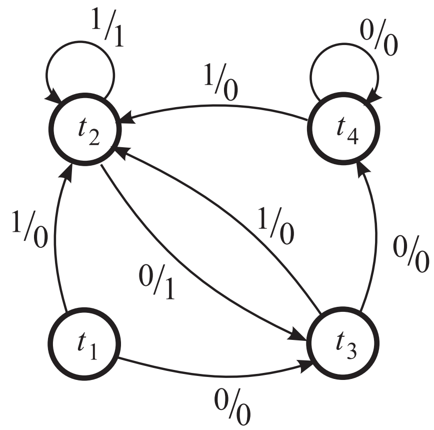
Príklad 3.27. Nech $A = (\{s_1, s_2\}, \{0,1\}, \{0,1\}, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}, \{0,1\}, \{0,1\}, \delta_B, \lambda_B)$ sú automaty, ktoré sú dané grafmi na obr. 39, časť a), b).



Obr. 39. Grafy automatov z príkladu 3.27

Nech $S = \{s_1, s_2\}$ a $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$. Nech $\varphi : S \to T$ je také zobrazenie, že $\varphi(s_1) = t_1$, $\varphi(s_2) = t_2$. Označme $\varphi(S) = \{\varphi(s_1), \varphi(s_2)\} = \{t_1, t_2\} = T' \subset T$. Teraz opíšeme podautomat automatu B, ktorý je generovaný množinou T'.

Riešenie. Množina stavov tohto podautomatu $R = T' \cup \{t \in T;$ existuje $w \in X^+$ a $t' \in T'$ také, že $\delta_B(t', w) = t\} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. Vidíme, že stavy t_5 a t_6 nie sú zo stavov t_1 a t_2 dosiahnuteľné. Potom podautomat B', ktorý je generovaný množinou T, má graf na obr. 40.



Obr. 40. Ilustrácia príkladu 3.27

Na ďalšie účely bude pre nás výhodná ešte táto veta.

Veta 3.13. Nech $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$. Nech stav $s \in S$ je ekvivalentný so stavom $t \in T$. Potom pre každé $w \in X^+$ je $\widehat{\delta}_A(s, w) \sim \widehat{\delta}_B(t, w)$.

Dôkaz. Nech $w \in X^+$ a $v \in X^+$ sú ľubovoľné slová. Potom aj $wv \in X^+$. Z predpokladu $s \sim t$ vyplýva, že $\widehat{\lambda}_A(s, wv) = \widehat{\lambda}_B(t, wv)$. Keďže

$$\widehat{\lambda}_A(s, wv) = \widehat{\lambda}_A(s, w)\widehat{\lambda}_A(\widehat{\delta}_A(s, w), v),$$
$$\widehat{\lambda}_B(t, wv) = \widehat{\lambda}_B(t, w)\widehat{\lambda}_B(\widehat{\delta}_B(t, w), v),$$

z toho už dostávame

$$\widehat{\lambda}_A(s, w)\widehat{\lambda}_A(\widehat{\delta}_A(s, w), v) = \widehat{\lambda}_B(t, w)\widehat{\lambda}_B(\widehat{\delta}_B(t, w), v).$$

Pretože ide o rovnosť dvoch slov zo Z^+, musí byť

$$\widehat{\lambda}_A(s, w) = \widehat{\lambda}_B(t, w) \text{ a } \widehat{\lambda}_A(\widehat{\delta}_A(s, w), v) = \widehat{\lambda}_B(\widehat{\delta}_B(t, w), v).$$

Z druhej rovnosti už dostávame požadovanú ekvivalenciu. □

Teraz už môžeme vysloviť a dokázať hlavnú vetu tejto časti.

Veta 3.14. Nech $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ je redukovaný automat a automat $B = (T, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$ pokrýva automat A. Potom automat B obsahuje podautomat B', ktorý je ekvivalentný s automatom A.

Dôkaz.

1. Nech teda $B = (S, X, Z, \delta_B, \lambda_B)$ pokrýva automat $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$. To znamená, že existuje zobrazenie $\varphi : S \to T$, ktoré pre každé $s \in S$ a každé $w \in X^+$ dáva rovnosť $\widehat{\lambda}_A(s, w) = \widehat{\lambda}_B(\varphi(s), w)$. Teraz ukážeme, že za podmienky redukovanosti automatu A je zobrazenie φ injekciou.

Predpokladajme, že $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$. Ale $s_1 \sim \varphi(s_1)$ a $s_2 \sim \varphi(s_2) = \varphi(s_1)$. Preto $s_1 \sim s_2$. Teraz už z redukovanosti automatu A vyplýva, že $s_1 = s_2$. Preto zobrazenie $\varphi : S \to T$ je injekciou.

2. Uvažujme o množine $\varphi(S) = \{\varphi(s) \in T; s \in S\}$. Označme túto množinu T'. Nech $B' = (R, X, Z, \delta'_B, \lambda'_B)$ je podautomat automatu B, ktorý je generovaný množinou T' (R je množina všetkých stavov, automatu B, ktoré sú dosiahnuteľné z niektorého stavu množiny T').

3. Pretože $\varphi(S) \subset R$ a pre každé $t \in R$ a každé $w \in X^+$ je $\widehat{\lambda}_{B'}(t, w) = \widehat{\lambda}_B(t, w)$, je zrejmé že automat B' pokrýva automat A.

4. Teraz dokážeme, že aj naopak automat A pokrýva automat B'. Definujeme funkciu $\psi : R \to S$ takto:

a) $\psi(\varphi(s)) = s$ pre každé $s \in S$,
b) $\psi(\widehat{\delta}_{B'}(\varphi(s), w)) = \widehat{\delta}_A(s, w)$ pre každé $s \in S$ a každé $w \in X^+$.

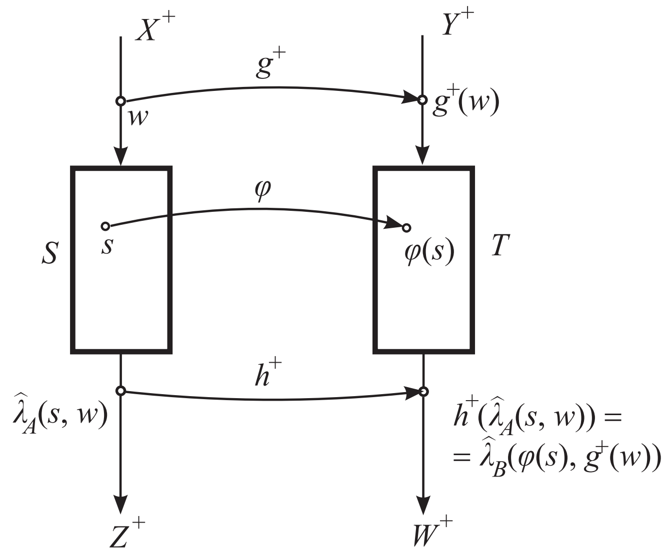
Treba ešte dokázať, že funkcia ψ je dobre definovaná. Je totiž dobre možné si predstaviť, že $\widehat{\delta}_{B'}(\varphi(s_i), w) = \widehat{\delta}_{B'}(\varphi(s_j), v)$ a pritom $\widehat{\delta}_A(s_i, w) \neq \widehat{\delta}_A(s_j, v)$. Ale $\varphi(s_i) \sim s_i$ a $\varphi(s_j) \sim s_j$. Preto je $\widehat{\delta}_A(s_i, w) \sim \widehat{\delta}_{B'}(\varphi(s_i), w) = \widehat{\delta}_{B'}(\varphi(s_j), v) \sim \widehat{\delta}_A(s_j, v)$, teda $\widehat{\delta}_A(s_i, w) \sim \widehat{\delta}_A(s_j, v)$. Z redukovanosti automatu A už dostávame $\widehat{\delta}_A(s_i, w) = \widehat{\delta}_A(s_j, v)$. To znamená, že predpoklad $\widehat{\delta}_{B'}(\varphi(s_i), w) = \widehat{\delta}_{B'}(\varphi(s_j), v)$ implikuje $\widehat{\delta}_A(s_i, w) = \widehat{\delta}_A(s_j, v)$ a teda zobrazenie ψ je dobre definované.

5. Stavy $\varphi(s)$ a s sú ekvivalentné. Preto aj $\widehat{\delta}_{B'}(\varphi(s), w)$ a $\widehat{\delta}_A(s, w)$ sú ekvivalentné stavy. To znamená, že funkcia ψ každému stavu priraďuje ekvivalentný stav. Z toho už vyplýva, že automat A pokrýva automat B'. Teda A a B' sú ekvivalentné automaty. Tým je veta 3.14 dokázaná. □

Dôsledok 3.2.

1. Vetu 3.14 sme dokázali za predpokladu redukovanosti automatu A. V prípade, že A nie je redukovaný automat a $B >> A$, potom $B >> A_R$ (lebo $A >> A_R$) a v automate B sa nachádza podautomat B', ktorý je ekvivalentný s automatom A_R. Potom máme $B' \sim A_R \sim A$. Teda B obsahuje podautomat B', ktorý je ekvivalentný s automatom A.
2. Ak k danému automatu A nájdeme automat B, ktorý ho pokrýva, potom máme automat, ktorý dokáže imitovať činnosť automatu A pomocou ekvivalentného automatu B'. Pochopiteľne, B dokáže okrem toho aj viac. □

Poznámka 3.7. Pojem pokrytia automatu automatom môžeme definovať aj v prípade automatov $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ a $B = (T, Y, W, \delta_B, \lambda_B)$. V tomto prípade budeme žiadať aby existovali injekcie $g : X \to Y$ a $h : Z \to W$. Každú z týchto injekcií možno rozšíriť na injekciu $g^+ : X^+ \to Y^+$, resp. $h^+ : Z^+ \to W^+$, tak že pre každé $w = x^1 \dots x^n$, resp. $v = z^1 \dots z^n$ položíme $g^+(w) = g^+(x^1 \dots x^n) = g(x^1) \dots g(x^n)$, resp. $h^+(v) = h^+(z^1 \dots z^n) = h(z^1) \dots h(z^n)$. Potom budeme hovoriť, že automat $A = (S, X, Z, \delta_A, \lambda_A)$ pokrýva automat $B = (T, Y, W, \delta_B, \lambda_B)$ práve vtedy, ak existujú injekcie $g : X \to Y$, $h : Z \to W$ a funkcia $\varphi : S \to T$ také, že pre každé $s \in S$ a každé $w \in X^+$ je $h^+(\widehat{\lambda}_A(s, w)) = \widehat{\lambda}_B(\varphi(s), g^+(w))$ (pozri obr. 41).



Obr. 41. Ilustrácia definície pokrytia automatov

Pri takto definovanom pokrytí automatov, ak použijeme zovšeobecnenú definíciu ekvivalencie automatov, sa dá veta 3.14 dokázať v nezmenenom znení.