Zápočtovka – pondelok 27.10.

Definícia 2.22. (modif)

$p(x,y) = \overline{x+y}$

NOR

$x \downarrow y$

P_2- výraz n premenných definujeme takto:

- $x_1, \ldots, x_n$, 0, 1 sú P_2-výrazy.
- Ak sú U, V nejaké P_2- výrazy, tak aj $(U \downarrow V)$ je P_2- výraz.
- Žiadne iné výrazy nie sú P_2- výrazy.

Príklad P_2- výrazy sú napríklad

$x,\ (x \downarrow x),\ (x \downarrow 0) \downarrow y,\ (x \downarrow y) \downarrow (0 \downarrow z)$

Príklad Definujme funkciu $s: B \times B \to B$ predpisom

$s(x,y) = \overline{x \cdot y}$. Overte, že $\{s\}$ je ÚSBF.

$\{-, \cdot, +\}$ je ÚSBF.

áno, $\{s\}$ je ÚSBF.

$$\begin{cases} \overline{x} = \overline{x \cdot x} = s(x,x) \\ x \cdot y = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{xy}} = s(s(x,y), s(x,y)) \\ x+y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = s(s(x,x), s(y,y)) \end{cases}$$

Definícia 2.21.

- Booleovskú funkciu $s(x,y) = \overline{x \cdot y}$ nazývame **Shefferovou funkciou** a označujeme $x \uparrow y$.

NAND

Definícia 2.22. (modif)

S_2- výraz n premenných definujeme takto:

- $x_1, \ldots, x_n$, 0, 1 sú S_2-výrazy.
- Ak sú U, V nejaké S_2- výrazy, tak aj $(U \uparrow V)$ je S_2- výraz.
- Žiadne iné výrazy nie sú S_2- výrazy.

Príklad S_2- výrazy sú napríklad

$y,\ (0\uparrow 1),\ y\uparrow(x\uparrow x),\ (((x\uparrow z)\uparrow(y\uparrow 1))\uparrow q)$

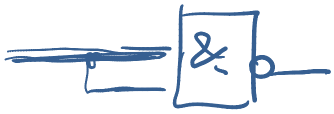
Príklad

Prepíšte pomocou $\{\bar{\ },+,\ \cdot\}$ výraz $((x\uparrow y)\uparrow((y\uparrow y)\uparrow(x\uparrow 1)))$.

$\overline{\overline{x\cdot y}\cdot\overline{\overline{y\cdot y}\cdot\overline{x\cdot 1}}}$

Dohoda

- Vonkajšie zátvorky budeme v P_2 aj v S_2- výrazoch vynechávať.
- $U\downarrow U$ budeme skracovať na $U\downarrow$
- $U\uparrow U$ budeme skracovať na $U\uparrow$



Príklad

Nájdite P_2 aj S_2- výraz funkcie $\overline{yz+x}$.

P_2: $\overline{\overline{\overline{yz}}+x} = \overline{\overline{\bar y+\bar z}+x} = ((y\downarrow)\downarrow(z\downarrow))\downarrow x$

S_2: $\overline{\overline{\overline{yz}}\cdot\bar x} = \overline{\overline{\overline{y\cdot z}}\cdot\overline{x\cdot x}} = ((y\uparrow z)\uparrow(x\uparrow))\uparrow$

Príklad To isté pre funkciu $f(x,y,z)=x+y\bar{x}+z$.

P_2: $f = \overline{\overline{x+z}}+\overline{\overline{y\bar x}} = \overline{\overline{\overline{x+z}}+\overline{\bar y+x}} = (((x\downarrow z)\downarrow)\downarrow((y\downarrow)\downarrow x))\downarrow$

S_2: $f = \overline{\overline{(x+z)+y\bar x}} = \overline{\overline{x+z}\cdot\overline{y\bar x}} = \overline{\overline{\bar x\cdot\bar z}\cdot\overline{y\bar x}} =$

$(((x\uparrow)\uparrow(z\uparrow))\uparrow)\uparrow(\ \uparrow(\ )) = S_2$-výraz

A B

Príklad Zistite, či je ↓ asociatívna. $(x \downarrow y) \downarrow z \stackrel{?}{=} x \downarrow (y \downarrow z)$

(Ide o funkciu z $\mathrm{B} \times \mathrm{B}$ do B, preto má otázka zmysel.)

x	y	z	$x \downarrow y$	A	$y \downarrow z$	B
0	0	0				
1	1	1				

Poznámka

- Pierceova funkcia $p: B \times B \to B$ je funkciou 2 premenných.
  Používa sa aj Pierceova funkcia 3, ..., n,... premenných.
  Kvôli ich odlíšeniu označíme $p = p_2$, a ďalšie p_3, ..., p_n.
- Podobne pre Schefferovu funkciu $s = s_2$, všeobecne s_n.

Definícia 2.23.

Pierceovou funkciou n premenných, $n \geq 2$, nazývame booleovskú funkciu

$$p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\ .$$

Budeme používať označenie $x_1 \downarrow x_2 \downarrow \cdots \downarrow x_n$.

Shefferovou funkciou n premenných, $n \geq 2$, nazývame booleovskú funkciu

$$s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\ .$$

Budeme používať označenie $x_1 \uparrow x_2 \uparrow \cdots \uparrow x_n$.

Poznámka

- $p_3(x,y,z) = \overline{x+y+z} = x \downarrow y \downarrow z$ je Pierceova funkcia 3 premenných.
- $s_3(x,y,z) = \overline{x \cdot y \cdot z} = x \uparrow y \uparrow z$ je Shefferova funkcia 3 premenných.
- Ukážeme, že hociktorá Pierceova i Shefferova funkcia (t.j. p_n aj s_n pre každé $n \geq 2$) umožňuje vygenerovanie ľubovoľnej (t.j. každej) booleovskej funkcie.

Veta 2.15.

Každá z množín $\{p_n\}$, $\{s_n\}$ pre $n \geq \cancel{2}\,3$ je USBF.

$\{p_2\}$ je ÚSBF, minulá prednáška

Stačí teda overiť, že $p_2(x,y)$ je možné vyjadriť pomocou ľub. p_n $(n=3,4,\dots)$

$$p_2(x,y) = x \downarrow y = x \downarrow y \downarrow 0 \;\dots\; 0 \downarrow 0 = p_n(x,y,0,\dots 0)$$

áno, $\{p_n\}$ je ÚSBF.

Definícia P_n- výraz n premenných definujeme takto:

- x, y, z, x_1, . . . , x_n , ..., 0, 1 sú P_n-výrazy.
- Ak sú $U_1, \dots, U_n$ nejaké P_n- výrazy, tak aj $(U_1 \downarrow \dots \downarrow U_n)$ je P_n- výraz.
- Žiadne iné výrazy nie sú P_n- výrazy.

$\boxed{\text{Príklady 2.24 - 2.26}}$

$\boxed{\text{Príklad}}$

Nájdite P_3 aj S_3- výraz funkcie $\overline{yz + x}$.

P_3: $\overline{\overline{\overline{yz}} + x + x}$

$\overline{\overline{\bar{y} + \bar{z} + 0} + x + x}$

$((y \downarrow y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z \downarrow z) \downarrow 0) \downarrow x \downarrow x$

S_3: $\overline{yz} \cdot \bar{x}$

$\overline{\overline{\overline{y \cdot z \cdot 1} \cdot \overline{x \cdot x \cdot x} \cdot 1}}$

$((y \uparrow z \uparrow 1) \uparrow (x \uparrow x \uparrow x) \uparrow 1) \uparrow$

Binárne relácie str.16

Definícia 1.21. **Binárnou reláciou** (reláciou) **na množine A** nazývame ľubovoľnú **podmnožinu karteziánskeho súčinu** $\boldsymbol{A \times A}$**.**

Poznámka 1.5.

Ak je σ binárna relácia na množine A a ak $(x, y) \in \sigma$,

tak hovoríme, že **prvok x je v relácii σ s prvkom y**.

Namiesto $(x, y) \in \sigma$ sa zvykne písať aj $x\sigma y$.

Príklad relácia σ je definovaná takto: $\sigma = \{(x, y) \in R^2 : x \leq y\}$,

$\sigma_1 = \{(x,y) \in R^2 : x < y\}$

Definícia 1.22. Relácia σ na množine A sa nazýva

- reflexívna, ak $\forall x \in A: (x, x) \in \sigma$
- symetrická, ak $\forall x, y \in A: (x, y) \in \sigma \Rightarrow (y, x) \in \sigma$,
- antisymetrická, ak $\forall x, y \in A: \big((x, y) \in \sigma \wedge (y, x) \in \sigma\big) \Rightarrow (x = y)$,
- tranzitívna, ak $\forall x, y, z \in A: \big((x, y) \in \sigma \wedge (y, z) \in \sigma\big) \Rightarrow \big((x, z) \in \sigma\big)$.

Definícia 1.23. Binárna relácia na množine A, ktorá je

- reflexívna,
- symetrická
- a tranzitívna,

sa nazýva **ekvivalencia** (relácia ekvivalencie) **na množine A**.

Poznámka 1.6. Ak je © relácia ekvivalencie a ak (x, y) ∈ ©, tak budeme hovoriť, že **x je ekvivalentné s y**.

Definícia 1.24.

Nech σ je relácia ekvivalencie na množine A a nech $a \in A$.

Potom množinu $\sigma(a) = \{x \in A;\ a\,\sigma\,x\}$ nazývame $(x,a) \in \sigma$

triedou ekvivalencie prvku a.

$\boxed{\textbf{Príklad 1.30}}$ Zistite, či je relácia σ, ktorá je definovaná takto:

$$\sigma = \{(x, y) \in R^2 : x \le y\},$$

reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

refl. $|x \le x$ platí $\forall x \in R|$ t.j. $(x,x) \in \sigma$ $\forall x \in R$

áno, σ je refl.

sym. $(x \le y) \overset{?}{\Longrightarrow} (y \le x)$ $\forall x,y \in R$

neplatí, napr. $1 \le 7$ ale $7 \not\le 1$ $(1,7) \in \sigma \wedge (7,1) \notin \sigma$

nie je sym.

tranzit. $((x \le y) \wedge (y \le z)) \Rightarrow (x \le z)$ platí $\forall x,y,z \in R$,

preto σ je tranzitívna

Príklad 000 A je množina ľudí. Relácia σ je daná takto:

$$\sigma = \{(x, y) \in A^2 \colon x \text{ je matkou } y\}$$

Zistite, či je σ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Príklad 001 Relácia σ je daná takto:

$$\sigma = \{(x, y) \in Z^2 \colon x \text{ dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako } y\}$$

- Overte, že σ je ekvivalenciou na Z.
- Nájdite všetky triedy ekvivalencie σ.

Ďalšie príklady ekvivalencií

Príklad 010 A je množina výr. formúl. Relácia $\sim$ je daná takto:

$(a, b) \in \sim \quad \Leftrightarrow \quad a$ má také isté pravdivostné ohodnotenie ako b.

Príklad 011 A je množina B - výrazov. Relácia $\cong$ je daná takto:

$(U, V) \in \cong \quad \Leftrightarrow \quad U$ určuje tú istú B – funkciu ako V.

Príklad 100 A je množina matíc $n \times n$. Relácia σ je daná takto:

$(C, D) \in \sigma \quad \Leftrightarrow$ sústava lin. rovníc určená maticou C má tú istú množinu riešení ako sústava určená maticou D.

Príklad 101 S je množina stavov v automate A. Relácia ~ je takáto: s~t $\Leftrightarrow$ ....

Príklad 110 A je množina automatov. Hovoríme, že .... automaty A, B sú ekvivalentné, keď ....