Relácia ekvivalencie

Rozklad množiny na triedy ekvivalencií

Príklad 000 A je množina ľudí. Relácia σ je daná takto:

$$\sigma = \{(x, y) \in A^2 : x \text{ je matkou } y\}$$

Zistite, či je σ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Príklad 001 Relácia σ je daná takto:

$$\sigma = \{(x, y) \in Z^2 : x \text{ dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako } y\}$$

- Overte, že σ je ekvivalenciou na Z.
- Nájdite všetky triedy ekvivalencie σ.

Príklad 010 A je množina výr.formúl. Relácia $\sim$ je daná takto:

$(a, b) \in \sim \quad \Leftrightarrow \quad a$ má také isté pravdivostné ohodnotenie ako b.

Príklad 011 A je množina B-výrazov. Relácia $\cong$ je daná takto:

$(U, V) \in \cong \quad \Leftrightarrow \quad U$ určuje tú istú B-funkciu ako V.

Príklad 100 A je množina matíc $n \times n$. Relácia σ je daná takto:

$(C, D) \in \sigma \quad \Leftrightarrow$ sústava lin.rovníc určená maticou C má tú istú množinu riešení ako súst. určená maticou D.

Príklad 101 S je množina stavov v automate A. Relácia ~ je takáto: $s{\sim}\mathrm{t} \quad \Leftrightarrow$ ....

Príklad 110 A je množina automatov. Hovoríme, že automaty A, B sú ekvivalentné, keď ....

Úplný systém booleovských funkcií str.40 el.s.

Poznámka

- Mali sme USLS $\{\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow\},\{\neg,\wedge,\vee\},\{\neg,\wedge\},\{\neg,\vee\},\ldots$
- Koľko je B-funkcií n premenných?
- Koľko logických operácií zatiaľ poznáme? Ktoré?
- Prepojenie medzi B-funkciami a výrokovými formulami

Booleovské funkcie		Výrokové formuly
$x+(y\cdot\bar{x}+\bar{y})$	$\longrightarrow$	
	$\longleftarrow$	$\overline{p\wedge q\wedge r}\wedge\bar{p}\wedge\bar{q}$

Definícia 2.20.

Množina B-funkcií $\{f_1,f_2,\ldots,f_k\}$ sa nazýva **úplný systém Booleovských funkcií**, (skrátene **ÚSBF**) ak každú B-funkciu môžeme vyjadriť pomocou $\{f_1,f_2,\ldots,f_k\}$ ako zloženú funkciu.

Veta 2.14.

Nech Q je nejaký ÚSBF.

Ak každú funkciu $f\in Q$ môžeme vyjadriť pomocou funkcií z inej množiny $\Re$, tak aj $\Re$ je ÚSBF.

Príklad

$\{\neg,\wedge,\vee\}$ je USLS, preto $\{\neg,\ \cdot\ ,+\}$ je ÚSBF.....3 B-funkcie stačia

$\{\neg,\wedge\}$ je USLS, preto $\{\neg,\ \cdot\}$ je ÚSBF..... 2

Dalo by sa vystačiť s jedinou B-funkciou?

Príklad !!! NOR

Definujme funkciu $h_1: B \times B \to B$ predpisom

$$h_1(x, y) = \overline{x + y}.$$

Overme, že $\{h_1\}$ je ÚSBF.

Príklad !!! NAND

Definujme funkciu $h_2: B \times B \to B$ predpisom

$$h_2(x, y) = \overline{x \cdot y}$$

Overme, že $\{h_2\}$ je ÚSBF.

Definícia 2.21.

- Booleovskú funkciu $h_1(x,y) = \overline{x+y}$
  nazývame **Pierceovou funkciou** a označujeme $x \downarrow y$.
- Booleovskú funkciu $h_2(x,y) = \overline{x \cdot y}$
  nazývame **Shefferovou funkciou** a označujeme $x \uparrow y$.

Definícia 2.22. (modif)

P_2- výraz n premenných definujeme takto:

(1) $x_1, \dots, x_n$, 0, 1 sú P_2-výrazy.

(2) Ak sú U, V nejaké P_2- výrazy, tak aj $(U \downarrow V)$ je P_2- výraz.

(3) Žiadne iné výrazy nie sú P_2- výrazy.

Príklad P_2- výrazy sú napríklad

Definícia 2.22. (modif)

S_2- výraz n premenných definujeme takto:

(1) $x_1, \dots, x_n$, 0, 1 sú S_2-výrazy.

(2) Ak sú U, V nejaké S_2- výrazy, tak aj $(U \uparrow V)$ je S_2- výraz.

(3) Žiadne iné výrazy nie sú S_2- výrazy.

Príklad S_2- výrazy sú napríklad

Príklad

Prepíšte pomocou $\{\bar{\ }, +, \cdot\}$ výraz $((x \uparrow y) \uparrow ((y \uparrow y) \uparrow (x \uparrow 1)))$.

Príklad

Nájdite P_2 aj S_2- výraz funkcie $\overline{yz + x}$

Dohoda

- V P_2 ani S_2- výrazoch nebudeme písať vonkajšie zátvorky.
- $U \downarrow U$ budeme skracovať na $U \downarrow$
- $U \uparrow U$ budeme skracovať na $U \uparrow$

Príklad

Zistime, či je $\downarrow$ asociatívna operácia.

(je to funkcia z $B \times B$ do B, preto tá otázka má zmysel).