

Relácie. Relácia ekvivalencie

Rozklad množiny na triedy ekvivalencií

Príklad 000 A je množina ľudí. Relácia σ je daná takto:

$$\sigma = \{(x, y) \in A^2 : x \text{ je matkou } y\}$$

Zistite, či je σ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Príklad 001 Relácia σ je daná takto:

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \text{ dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako } y\}$$

- Overte, že σ je ekvivalenciou na $\mathbb{Z}$.
- Nájdite všetky triedy ekvivalencie σ .

Príklad 010 A je množina výr.formúl. Relácia $\sim$ je daná takto:

$$(a, b) \in \sim \Leftrightarrow a \text{ má také isté pravdivostné ohodnotenie ako } b.$$

Príklad 011 A je množina B-výrazov. Relácia $\cong$ je daná takto:

$$(U, V) \in \cong \Leftrightarrow U \text{ určuje tú istú B-funkciu ako } V.$$

Príklad 100 A je množina matic $n \times n$. Relácia σ je daná takto:

$$(C, D) \in \sigma \Leftrightarrow \text{sústava lin.rovníc určená maticou } C \text{ má tú istú množinu riešení ako súst. určená maticou } D.$$

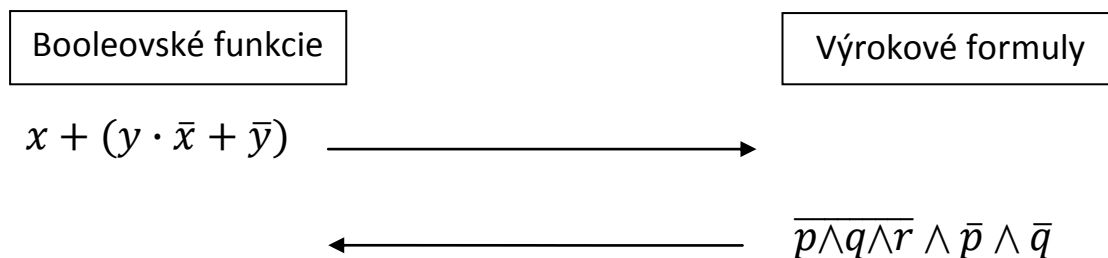
Príklad 101 S je množina stavov v automate A . Relácia $\sim$ je takáto: $s \sim t \Leftrightarrow \dots\dots$

Príklad 110 A je množina automatov. Hovoríme, že automaty A, B sú ekvivalentné, keď $\dots\dots$

Úplný systém booleovských funkcií str.40 el.s.

Poznámka

- Mali sme USLS $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}, \{\neg, \wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \dots$
- Koľko je B-funkcií n premenných?
- Koľko logických operácií zatiaľ poznáme? Ktoré?
- Prepojenie medzi B-funkciami a výrokovými formulami



Definícia 2.20.

Množina B-funkcií $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ sa nazýva **úplný systém Booleovských funkcií**, (skrátene **ÚSBF**) ak každú B-funkciu môžeme vyjadriť pomocou $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ ako zloženú funkciu.

Veta 2.14.

Nech Q je nejaký ÚSBF.

Ak každú funkciu $f \in Q$ môžeme vyjadriť pomocou funkcií z inej množiny $\mathfrak{R}$, tak aj $\mathfrak{R}$ je ÚSBF.

Príklad

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ je USLS, preto $\{\neg, \cdot, +\}$ je ÚSBF.....3 B-funkcie stačia

$\{\neg, \wedge\}$ je USLS, preto $\{\neg, \cdot\}$ je ÚSBF..... 2

Dalo by sa vystačiť s jedinou B-funkciou?

Príklad !!! NOR

Definujme funkciu $h_1: B \times B \rightarrow B$ predpisom

$$h_1(x, y) = \overline{x + y}.$$

Overme, že $\{h_1\}$ je ÚSBF.

Vsuvka z prednášky

Príklad !!! NOR

Definujme funkciu $h_1: B \times B \rightarrow B$ predpisom

$$h_1(x, y) = \overline{x + y}.$$

Pierceova funkcia ↓

Overme, že $\{h_1\}$ je ÚSBF.

① (použijeme Vetu 2.14.): $\mathcal{Q} = \{-, \cdot, +\}$, $\mathcal{R} = \{h_1\}$

$$\bar{x} = \overline{x + x} = h_1(x, x) \quad \checkmark$$

$$x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{\overline{x + x} + \overline{y + y}} = h_1(h_1(x, x), h_1(y, y)) \quad \checkmark$$

$$x + y = \overline{\overline{x + y}} = \overline{h_1(x, y)} = h_1(h_1(x, y), h_1(x, y)) \quad \checkmark$$

Veta 2.14 $\implies \{h_1\}$ je ÚSBF

Príklad !!! NAND

Príklad !!! NAND

Definujme funkciu $h_2: B \times B \rightarrow B$ predpisom

$$h_2(x, y) = \overline{x \cdot y}$$

Overme, že $\{h_2\}$ je ÚSBF.

Definícia 2.21.

- Booleovskú funkciu $h_1(x, y) = \overline{x + y}$ nazývame **Pierceovou funkciou** a označujeme $x \downarrow y$.
- Booleovskú funkciu $h_2(x, y) = \overline{x \cdot y}$ nazývame **Shefferovou funkciou** a označujeme $x \uparrow y$.

Definícia 2.22. (modif)

P_2 - výraz n premenných definujeme takto:

- (1) $x_1, \dots, x_n, 0, 1$ sú P_2 -výrazy.
- (2) Ak sú U, V nejaké P_2 - výrazy, tak aj $(U \downarrow V)$ je P_2 - výraz.
- (3) Žiadne iné výrazy nie sú P_2 - výrazy.

Príklad P_2 - výrazy sú napríklad

Definícia 2.22. (modif)

S_2 - výraz n premenných definujeme takto:

- (1) $x_1, \dots, x_n, 0, 1$ sú S_2 -výrazy.
- (2) Ak sú U, V nejaké S_2 - výrazy, tak aj $(U \uparrow V)$ je S_2 - výraz.
- (3) Žiadne iné výrazy nie sú S_2 - výrazy.

Príklad S_2 - výrazy sú napríklad

Príklad

Prepíšte pomocou $\{\neg, +, \cdot\}$ výraz $((x \uparrow y) \uparrow ((y \uparrow y) \uparrow (x \uparrow 1)))$.

Dohoda

- Vonkajšie zátvorky budeme v P_2 aj v S_2 - výrazoch vynechávať.
- $U \downarrow U$ budeme skracovať na $U \downarrow$
- $U \uparrow U$ budeme skracovať na $U \uparrow$

Príklad

Nájdite P_2 aj S_2 - výraz funkcie $\overline{yz + x}$.

koniec prednášky 6

Príklad

Zistíme, či je $\downarrow$ asociatívna operácia.

(je to funkcia z $B \times B$ do B , preto tá otázka má zmysel).