

Definícia 2.22. (modif)

P_2 - výraz n premenných definujeme takto:

- $x_1, \dots, x_n, 0, 1$ sú P_2 -výrazy.
- Ak sú U, V nejaké P_2 - výrazy, tak aj $(U \downarrow V)$ je P_2 - výraz.
- Žiadne iné výrazy nie sú P_2 - výrazy.

Príklad P_2 - výrazy sú napríklad

Príklad Definujme funkciu $s: B \times B \rightarrow B$ predpisom

$$s(x, y) = \overline{x \cdot y}. \text{ Overte, že } \{s\} \text{ je ÚSBF.}$$

Definícia 2.21.

- Booleovskú funkciu $s(x, y) = \overline{x \cdot y}$ nazývame **Shefferovou funkciou** a označujeme $x \uparrow y$.

Definícia 2.22. (modif)

S_2 - výraz n premenných definujeme takto:

- $x_1, \dots, x_n, 0, 1$ sú S_2 -výrazy.
- Ak sú U, V nejaké S_2 - výrazy, tak aj $(U \uparrow V)$ je S_2 - výraz.
- Žiadne iné výrazy nie sú S_2 - výrazy.

Príklad S_2 - výrazy sú napríklad

Príklad

Prepíšte pomocou $\{ \neg, +, \cdot \}$ výraz $((x \uparrow y) \uparrow ((y \uparrow y) \uparrow (x \uparrow 1)))$.

Dohoda

- Vonkajšie zátvorky budeme v P_2 aj v S_2 - výrazoch vynechávať.
- $U \downarrow U$ budeme skracovať na $U \downarrow$
- $U \uparrow U$ budeme skracovať na $U \uparrow$

Príklad

Nájdite P_2 aj S_2 - výraz funkcie $\overline{yz + x}$.

Príklad To isté pre funkciu $f(x, y, z) = x + y\bar{x} + z$.

Príklad Zistite, či je $\downarrow$ asociatívna.

(Ide o funkciu z $B \times B$ do B , preto má otázka zmysel.)

Poznámka

- Pierceova funkcia $p: B \times B \rightarrow B$ je funkciou 2 premenných.
Používa sa aj Pierceova funkcia 3, ..., n , ... premenných.
Kvôli ich odlíšeniu označíme $p = p_2$, a ďalšie $p_3, \dots, p_n$.
- Podobne pre Schefferovu funkciu $s = s_2$, všeobecne s_n .

Definícia 2.23.

Pierceovou funkciou n premenných, $n \geq 2$, nazývame booleovskú funkciu

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n}.$$

Budeme používať označenie $x_1 \downarrow x_2 \downarrow \dots \downarrow x_n$.

Shefferovou funkciou n premenných, $n \geq 2$, nazývame booleovskú funkciu

$$s_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Budeme používať označenie $x_1 \uparrow x_2 \uparrow \dots \uparrow x_n$.

Poznámka

- $p_3(x, y, z) = \overline{x + y + z} = x \downarrow y \downarrow z$ je Pierceova funkcia 3 premenných.
- $s_3(x, y, z) = \overline{x \cdot y \cdot z} = x \uparrow y \uparrow z$ je Shefferova funkcia 3 premenných.
- Ukážeme, že hociktorá Pierceova i Shefferova funkcia (t.j. p_n aj s_n pre každé $n \geq 2$) umožňuje vygenerovanie ľubovoľnej (t.j. každej) booleovskej funkcie.

Veta 2.15.

Každá z množín $\{p_n\}$, $\{s_n\}$ pre $n \geq 2$ je USBF.

Definícia P_n - výraz n premenných definujeme takto:

- $x, y, z, x_1, \dots, x_n, \dots, 0, 1$ sú P_n -výrazy.
- Ak sú $U_1, \dots, U_n$ nejaké P_n - výrazy, tak aj $(U_1 \downarrow \dots \downarrow U_n)$ je P_n - výraz.
- Žiadne iné výrazy nie sú P_n - výrazy.

Príklady 2.24 - 2.26

Príklad

Nájdite P_3 aj S_3 - výraz funkcie $\overline{yz + x}$.

Binárne relácie str.16

Definícia 1.21. Binárnou reláciou (reláciou) na množine A nazývame ľubovoľnú podmnožinu karteziánskeho súčinu $A \times A$.

Poznámka 1.5.

Ak je σ binárna relácia na množine A a ak $(x, y) \in \sigma$, tak hovoríme, že prvok x je v relácii σ s prvkom y .

Namiesto $(x, y) \in \sigma$ sa zvykne písať aj $x\sigma y$.

Príklad relácia σ je definovaná takto: $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$,

Definícia 1.22. Relácia σ na množine A sa nazýva

- reflexívna, ak $\forall x \in A: (x, x) \in \sigma$
- symetrická, ak $\forall x, y \in A: (x, y) \in \sigma \Rightarrow (y, x) \in \sigma$,
- antisymetrická, ak $\forall x, y \in A: (x, y) \in \sigma \wedge (y, x) \in \sigma \Rightarrow x = y$,
- tranzitívna, ak $\forall x, y, z \in A: (x, y) \in \sigma \wedge (y, z) \in \sigma \Rightarrow (x, z) \in \sigma$.

Definícia 1.23. Binárna relácia na množine A , ktorá je

- reflexívna,
- symetrická
- a tranzitívna,

sa nazýva **ekvivalencia** (relácia ekvivalencie) na množine A .

Poznámka 1.6. Ak je $\odot$ relácia ekvivalencie a ak $(x, y) \in \odot$, tak budeme hovoriť, že **x je ekvivalentné s y**.

Definícia 1.24.

Nech σ je relácia ekvivalencie na množine A a nech $a \in A$.

Potom množinu $\sigma(a) = \{x \in A; a \sigma x\}$ nazývame

triedou ekvivalencie prvku a .

Príklad 1.30 Zistite, či je relácia σ , ktorá je definovaná takto:

$$\sigma = \{(x, y) \in R^2: x \leq y\},$$

reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Príklad 000 A je množina ľudí. Relácia σ je daná takto:

$$\sigma = \{(x, y) \in A^2 : x \text{ je matkou } y\}$$

Zistite, či je σ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Príklad 001 Relácia σ je daná takto:

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \text{ dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako } y\}$$

- Overte, že σ je ekvivalenciou na $\mathbb{Z}$.
- Nájdite všetky triedy ekvivalencie σ .

Ďalšie príklady ekvivalencií

Príklad 010 A je množina výr. formúl. Relácia $\sim$ je daná takto:
 $(a, b) \in \sim \Leftrightarrow a$ má také isté pravdivostné ohodnotenie ako b .

Príklad 011 A je množina B - výrazov. Relácia $\cong$ je daná takto:
 $(U, V) \in \cong \Leftrightarrow U$ určuje tú istú B – funkciu ako V .

Príklad 100 A je množina matic $n \times n$. Relácia σ je daná takto:
 $(C, D) \in \sigma \Leftrightarrow$ sústava lin. rovníc určená maticou C má tú istú množinu riešení ako sústava určená maticou D .

Príklad 101 S je množina stavov v automate A . Relácia $\sim$ je takáto:
 $s \sim t \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Príklad 110 A je množina automatov. Hovoríme, že
 automaty A, B sú ekvivalentné, keď