

Príklad 2.2.

(1) Premenné x, y, z, t sú (?) B-výrazy.

(2) $\overline{x + y}$, xy , $\overline{yz}$, $\overline{z}x$ sú (?) B-výrazy.

(3) $(x + y)\overline{z}$, $x\overline{y}z$, $yz + x$, $\overline{yz + x}$, $\overline{yz} + x$, sú (?) B-výrazy.

(4) $x + y + 1 + z$ je (?) B-výraz.

Príklad

B-výrazy jednej premennej sú $x, \overline{x}, 0, 1$.

B-výrazy dvoch premenných sú $0, 1, x, \overline{x}, y, \overline{y}, xy, x\overline{y}, \dots, \overline{x}\overline{y}, x + y, \dots$ ale napríklad aj $xy + \overline{x}$.

Poznámka

- Každý B-výraz reprezentuje (definuje, určuje, generuje) nejakú (jednu jedinou!!!) B-funkciu.
- Každá B-funkcia môže byť reprezentovaná viacerými B-výrazmi.

Príklad (modif. 2.3) B-výraz

$U(x, y, z) = (\overline{x + y})z$ definuje funkciu $f_U(x, y, z) = (\overline{x + y})z$.

Rovnosť B - funkcií.

Rovnosť B - výrazov.

Ekvivalencia B - výrazov.

Definícia 2.5. B-výrazy $U(x_1, \dots, x_n)$, $V(x_1, \dots, x_n)$ sa nazývajú **ekvivalentné** vtedy, ak definujú rovnakú booleovskú funkciu.

Píšeme $U \cong V$ resp. $U(x_1, \dots, x_n) \cong V(x_1, \dots, x_n)$.

Poznámka 2.5. Predchádzajúcu definíciu môžeme stručne zapísať takto: $U \cong V \Leftrightarrow f_U = f_V$.

Príklad 2.4. Dokážte, že $xz + yz \cong (x + y)z$.

Veta 2.4. (Tabuľka ekvivalencií B - výrazov.)

Analógia s pravidlami pre log. spojky a pre B - funkcie.

Nech sú U, V, W ľubovoľné výrazy. Potom platí

sčítanie	násobenie	
		komutatívne zák.
		asociatívne zákony
		distributívne zákony
		de Morganove zák.
		zákony skrátania
		z. komplementárnosti
		zákon involúcie (negácia negácie)
		zákony pohltienia
		zákony identity
Zákon jednotkového sčítovania	Zákon nulového násobenia	

E1. $U + V \cong V + U$	$UV \cong VU$	komutatívne zákony
E2. $(U + V) + W \cong U + (V + W)$	$(UV)W \cong U(VW)$	asociatívne zákony
E3. $(U + V)W \cong UW + VW$	$UV + W \cong (U + W)(V + W)$	distributívne zákony
E4. $\overline{U + V} \cong \overline{U} \overline{V}$	$\overline{UV} \cong \overline{U} + \overline{V}$	de Morganove zákony
E5. $U + U \cong U$	$UU \cong U$	zákony idempotentnosti
E6. $U + \overline{U} \cong 1$	$U\overline{U} \cong 0$	zákony komplementárnosti
E7. $U \cong \overline{\overline{U}}$		zákon involúcie
E8. $U + (UV) \cong U$	$U(U + V) \cong U$	zákon absorpcie (pohltenia)
E9. $U + 0 \cong U$	$U \cdot 1 \cong U$	zákony identity
E10. $U + 1 \cong 1$	$U \cdot 0 \cong 0$	zákony jednotkového sčítania a nulového násobenia

Poznámka

Pre B-výrazy okrem toho platia tzv. **zákony stability**:

Veta 2.5. Pre každé B - výrazy U, V, W platí:

ak $U \cong V$, tak	$U + W \cong V + W$
	$UW \cong VW$
	$\overline{U} \cong \overline{V}$

Dôkaz (skriptá)

Otázka ??? Platia predchádzajúce Implikácie aj naopak, t.j.

ak $U + W \cong V + W$ potom $U \cong V$ (a ďalšie)?

Dohoda.

Dohodneme sa na ďalších zjednodušeníach pri zápise B-výrazov. Využijeme zákony z Tabuľky ekvivalencií B-výrazov.

- Nebudeme rozlišovať medzi B-výrazmi $U + V$ a $V + U$ ani medzi UV a VU .
- B-výrazy $(U + V) + W$ a $U + (V + W)$ budeme považovať za rovnaké a miesto nich budeme písať $U + V + W$.
Podobne namiesto $(UV)W$ či $U(VW)$ budeme písať UVW .
- Za rovnaké budeme považovať aj B-výrazy $1 \cdot U$, $0 + U$, U tiež $1 + U$ a 1 , a tiež $0 \cdot U$ a 0 .

Príklad

Poznámka

Niektoré typy B-výrazov sú výhodnejšie než iné, pretože dávajú napr.

- Informáciu o jednotkových bodoch príslušnej B-funkcie ?
- Informáciu o nulových bodoch príslušnej B-funkcie
- Majú stručný zápis alebo celkom minimálny a preto budú praktické (lacné, rýchle, efektívne, ekologické...) pri fyzikálnej realizácii.
- ...

Príklad

Nájdite $J(f)$, ak $f(x, y, z) =$

Nájdite $J(f)$, ak $f(x, y, z) =$

Nájdite $N(f)$, ak $f(x, y, z) =$

Úplná normálna disjunktívna forma

Definícia 2.7.

Elementárnym súčinovým členom n premenných $x_1, \dots, x_n$ nazývame B-výraz

$$S(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n,$$

kde $\alpha_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Príklad

Koľko je elementárnych súčinových členov 2 premenných?

Vypíšte ich:

!!! nie je el.súčinový člen!!!

Elementárnych súčinových členov 3 premenných je.....(koľko?):

Elementárnych súčinových členov n premenných je.....

Poznámka

- Každý elementárny súčinový člen n premenných určuje práve jeden ~~nulový~~ / jednotkový bod a naopak:
- Každý bod zodpovedá práve jednému elementárnemu súčinovému členu.

Veta 2.7.

Jednotkové body ľubovoľných dvoch elementárnych súčinových členov sú rôzne.

Príklad

Nájdite nejaký zápis funkcie f , ak

$$J(f) = \{111, 100, 001, 000, 010\}.$$

Rieš.: $f(x, y, z) = xyz + xyz + xyz + xyz + xyz$ (chýbajú negácie)

Úplný zápis (aj tu chýbajú negácie a tiež 0 resp. 1 pred každým súč. členom):

$$f(x, y, z) = xyz + xyz + xyz + xyz + xyz + xyz + xyz + xyz$$

Definícia 2.9. Úplná normálna disjunktívna forma B-funkcie n premenných $x_1, \dots, x_n$ je B-výraz tvaru

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j S_j(x_1, \dots, x_n)$$

kde $c_j \in \{0, 1\}$. Skrátene píšeme $UNDF(f)$.

Príklad

- a) Nájdite $UNDF(f), J(f), N(f)$, ak je f daná tabuľkou
- b) Nájdite $J(\bar{f})$.

Veta 2.8. Každé dve rôzne $UNDF$ určujú dve rôzne booleovské funkcie.

Veta 2.9. Každá booleovská funkcia je určená niektorou $UNDF$.

Poznámka

- **Veta 2.10.** Ak je $J(g) = \emptyset$, tak $UNDF(g) =$
- Definujeme aj $UNDF$ B-výrazov.

Definícia 2.10.

Nech $W(x_1, \dots, x_n)$ je B-výraz a nech $U(x_1, \dots, x_n)$ je taký výraz v tvare $UNDF$, že $W \cong U$.

Potom U nazývame **úplnou normálnou disjunktívnou formou B-výrazu W** a tiež **úplnou normálnou disjunktívnou formou príslušnej B-funcie f_W** .

Príklad

$f(x, y, z) = x\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + xy$. Nájdite $UNDF(f)$, $J(f)$, $J(\bar{f})$.

Úplná normálna konjunktívna forma

Definícia 2.11.

Elementárnym súčtovým členom (*elementárnym súčtom*) nazývame B-výraz

$$T(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

kde $\alpha_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Príklad

Koľko je elementárných súčtov 2 premenných? Vypíšte ich:

!!! nie je elementárny súčet!!!

Elementárných súčtov 3 premenných je.....(koľko?):

Elementárných súčtových členov n premenných je.....

Poznámka

- Každý elementárny súčet n premenných určuje práve jeden nulový / jednotkový bod a naopak:
- Každý bod zodpovedá práve jednému elementárnemu súčtu.

Definícia 2.13. Úplná normálna konjunktívna forma B-funkcie n premenných $x_1, \dots, x_n$ je B-výraz tvaru

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=0}^{2^n-1} (c_k + T_k(x_1, \dots, x_n)),$$

kde $c_k \in \{0,1\}$. Skrátené píšeme $UNKF(f)$.

Poznámka (Veta 2.11.)

Ak je $N(g) = \emptyset$, tak $UNKF(g) =$

Príklad

Nájdite $UNKF(f), N(f), J(f)$, ak je f daná tabuľkou

Príklad

$f(x, y, z) = (z + y) \cdot (x + \bar{z})$. Nájdite $UNKF(f)$ iba úpravami.

Príklad (nepovinná DÚ)

$$f(x, y, z) = \overline{x + y} \cdot z + y \cdot (x + \bar{z})$$

Nájdite $UNDF(f)$ aj $UNKF(f)$ iba úpravami.