

- V pondelok po prednáške prídu do BC 300 za študentmi TLK zástupcovia Ústavu Telekomunikácií (náhradný termín) 😊

Obsah

Tabuľka ekvivalencií B - výrazov	2
Úplná normálna disjunktívna forma	5
Úplná normálna konjunktívna forma	8
Normálna disjunktívna forma	10
Normálna konjunktívna forma	13

- Farba strany

Poznámka

- Každý B-výraz reprezentuje (definuje, určuje, generuje) nejakú (jednu jedinu!!!) B-funkciu.
- Každá B-funkcia môže byť reprezentovaná viacerými B-výrazmi.

Príklad modif. 2.3 B-výraz $U(x, y, z) = (\overline{x + \bar{y}})z$
definuje funkciu $f_U(x, y, z) = (\overline{x + \bar{y}})z$.

Rovnosť B - funkcií.

Rovnosť B - výrazov. Ekvivalencia B - výrazov.

Definícia 2.5. B-výrazy $U(x_1, \dots, x_n)$, $V(x_1, \dots, x_n)$ sa nazývajú **ekvivalentné** vtedy, ak definujú rovnakú booleovskú funkciu.

Píšeme $U \cong V$ resp. $U(x_1, \dots, x_n) \cong V(x_1, \dots, x_n)$.

Poznámka 2.5. $U \cong V \Leftrightarrow f_U = f_V$.

Príklad 2.4 Dokážte, že $xz + yz \cong (x + y)z$.

Tabuľka ekvivalencií B - výrazov

Analógia s pravidlami pre log. spojky a pre B - funkcie.

Veta 2.4. Nech sú U, V, W ľubovoľné B - výrazy. Potom platí

		komutatívne zákony
		asociatívne zákony
		distributívne zákony
		de Morganove zákony
		zák.idempotentnosti
		z. komplementárnosti
		zákon involúcie
		zákony absorpcie
		zákony identity

Poznámka

Pre B-výrazy okrem toho platia tzv. **zákony stability**:

Veta 2.5. Pre každé B - výrazy U, V, W platí:

ak $U \cong V$, tak	$U + W \cong V + W$
	$UW \cong VW$
	$\bar{U} \cong \bar{V}$

Dôkaz (skriptá)

Otázka ??? Platia predchádzajúce Implikácie aj naopak, t.j. ak pre nejaký výraz W platí $U + W \cong V + W$ potom $U \cong V$ (atď)?

Dohoda. Zjednodušenia:

- Nebudeme rozlišovať medzi B-výrazmi $U + V$ a $V + U$ ani medzi UV a VU .
- B-výrazy $(U + V) + W$ a $U + (V + W)$ budeme považovať za rovnaké a miesto nich budeme písať $U + V + W$.
Podobne namiesto $(UV)W$ či $U(VW)$ budeme písať UVW .
- Za rovnaké budeme považovať aj B-výrazy $1 \cdot U$, $0 + U$, U a tiež $1 + U$ a 1 , a tiež $0 \cdot U$ a 0 .

Príklad

Nájdite nejaký zápis (výraz) B-funkcie f , ak je daná množina jej jednotkových bodov $J(f) = \{(100), (001), (110)\}$.

Poznámka

Niektoré typy B-výrazov sú výhodnejšie, pretože dávajú napr.

- Informáciu o jednotkových bodoch príslušnej B-funkcie
- Informáciu o nulových bodoch príslušnej B-funkcie
- Majú stručný zápis alebo celkom minimálny a preto budú pri fyzikálnej realizácii výhodné (lacné, rýchle, efektívne, ekologické...).
- ...

Príklad

Nájdite $J(f)$, ak $f(x, y, z) =$

Nájdite $J(f)$, ak $f(x, y, z) =$

Nájdite $N(f)$, ak $f(x, y, z) =$

Úplná normálna disjunktívna forma

Definícia 2.7.

Elementárnym súčinovým členom n premenných $x_1, \dots, x_n$ nazývame B-výraz

$$S(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n,$$

kde $\alpha_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Príklad

Koľko je elementárnych súčinových členov 2 premenných?

Vypíšte ich:

!!! nie sú elem. súčinové členy!!!

Elementárnych súčinových členov 3 premenných je.....(koľko?):

Elementárnych súčinových členov n premenných je

Poznámka

- Každý elementárny súčinový člen n premenných určuje práve jeden nulový / jednotkový bod a naopak:
- Každý bod zodpovedá práve jednému elementárnemu súčinovému členu.

Veta 2.7.

Jednotkové body ľubovoľných dvoch elementárnych súčinových členov sú rôzne.

Príklad

Nájdite nejaký zápis funkcie f , ak $J(f) = \{111, 100, 001, 000, 010\}$.

Riešenie: $f(x, y, z) = xyz + xyz + xyz + xyz + xyz$ (negácie!!!)

Úplný zápis (aj tu chýbajú negácie a tiež 0 resp. 1 pred každým členom):

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \\ &= xyz + xyz + xyz + xyz + xyz + xyz + xyz + xyz \end{aligned}$$

Definícia 2.9. Úplná normálna disjunktívna forma B-funkcie n premenných $x_1, \dots, x_n$ je B-výraz tvaru

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j S_j(x_1, \dots, x_n)$$

kde $c_j \in \{0, 1\}$. Skrátene píšeme $UNDF(f)$.

Veta 2.8. Každé dve rôzne $UNDF$ určujú dve rôzne booleovské funkcie.

Veta 2.9. Každá booleovská funkcia je určená niektorou $UNDF$.

Poznámka

- **Veta 2.10.** Ak je $J(g) = \emptyset$, tak $UNDF(g) =$
- Definujeme aj $UNDF$ B-výrazov.

Definícia 2.10.

Nech $W(x_1, \dots, x_n)$ je B-výraz a nech $U(x_1, \dots, x_n)$ je taký výraz v tvare $UNDF$, že $W \cong U$.

Potom U nazývame úplnou normálnou disjunktívnou formou B-výrazu W a tiež úplnou normálnou disjunktívnou formou príslušnej B-funcie f_W .

Príklad

$f(x, y, z) = x\bar{y}z + y\bar{z} + xy$. Nájdite $UNDF(f)$, $J(f)$, $J(\bar{f})$.

Úplná normálna konjunktívna forma

Definícia 2.11.

Elementárnym súčtovým členom (*elementárnym súčtom*) nazývame B-výraz

$$T(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

kde $\alpha_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Príklad

Koľko je elementárných súčtov 2 premenných? Vypíšte ich:

!!! nie je elementárny súčet!!!

Elementárných súčtov 3 premenných je.....(koľko?):

Elementárných súčtových členov n premenných je.....

Poznámka

- Každý elementárny súčet n premenných určuje práve jeden nulový / jednotkový bod a naopak:
- Každý bod zodpovedá práve jednému elementárnemu súčtu.

Definícia 2.13. Úplná normálna konjunktívna forma B-funkcie n premenných $x_1, \dots, x_n$ je B-výraz tvaru

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=0}^{2^n-1} (c_k + T_k(x_1, \dots, x_n)),$$

kde $c_k \in \{0,1\}$. Skrátene píšeme $UNKF(f)$.

Poznámka (Veta 2.11.)

Ak je $N(g) = \emptyset$, tak $UNKF(g) =$

Príklad

Nájdite $UNKF(f), N(f), J(f)$, ak je f daná tabuľkou

Príklad

$f(x, y, z) = (z + y) \cdot (x + \bar{z})$. Nájdite $UNKF(f)$ iba úpravami.

Príklad (nepovinná DÚ)

$$f(x, y, z) = \overline{x + y} \cdot z + y \cdot (x + \bar{z})$$

Nájdite $UNDF(f)$ aj $UNKF(f)$ iba úpravami.

Normálna disjunktívna forma

Poznámka

- Dáva informácie o jednotkových bodoch B-funkcie.
- Tak ako UNDF, aj toto je súčet súčinov, ale jednotlivé sčítance (súčinové členy) nemusia byť elementárne:
- ...inými slovami, NDF môže ale nemusí byť úplná (UNDF).

Definícia 2.14.

Súčinovým členom n premenných $x_1, \dots, x_n$ nazývame B-výraz

$$S(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n,$$

kde $\alpha_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Príklad 2.16

Súčinových členov 2 premenných je

Súčinových členov 3 premenných je

Súčinové členy n premenných sú napr.:

Súčinových členov n premenných je , pretože

Definícia 2.15. Každý B-výraz n premenných $x_1, \dots, x_n$, ktorý má tvar

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1} c_k S_k(x_1, \dots, x_n),$$

kde $c_k \in \{0,1\}$, nazývame **normálna disjunktívna forma** tohto výrazu a tiež *NDF* príslušnej B-funkcie.

Poznámka – Otázky

Ktoré tvrdenia budú pravdivé aj pre **súčinové** členy (nie nutne elementárne) a pre **NDF** (nie nutne úplné)?

- Každý ~~elementárny~~ súčinový člen n premenných určuje práve jeden jednotkový bod?
- Každý jednotkový bod zodpovedá práve jednému elementárnemu súčinovému členu?
- Jednotkové body ľubovoľných dvoch súčinových členov sú rôzne? (**Veta 2.7.**)
- Každé dve rôzne *NDF* určujú dve rôzne booleovské funkcie? (**Veta 2.8.**)
- Každá B-funkcia je určená niektorou *NDF*? (**Veta 2.9.**)

Príklad

Nájdite nejakú *NDF*, ktorá nie je *UNDF* funkcie f , ak $J(f) = \{110, 100, 001, 000\}$.

Príklad

Nájdite nejakú *NDF* funkcie $\bar{f}$ pre f z predch. príkladu.

Príklad

Nájdite nejakú *NDF* a nejakú *NKF* funkcie $f(x, y, z) = \overline{\overline{x + y} \cdot z}$.

Normálna konjunktívna forma

Poznámka

- Dáva informácie o bodoch B-funkcie.
- Tak ako UNKF, aj toto je....., ale jednotlivé súčtové členy nemusia byť elementárne:
- ...inými slovami, NKF môže ale nemusí byť UNKF.

Definícia 2.16.

Súčtovým členom n premenných $x_1, \dots, x_n$ nazývame B-výraz

$$T(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

kde $\alpha_i \in \{x_i, \bar{x}_i, \quad\}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Príklad 2.17

Súčtových členov 2 premenných je.....

Súčtových členov 3 premenných je

Súčtové členy n premenných sú napr.:

Súčtových členov n premenných je , pretože

Poznámka (duálna k Poznámke pre NDF)

??? Ktoré tvrdenia budú pravdivé aj pre **súčtové** členy (nie nutne elementárne) a pre **NKF** (nie nutne UNKF)?

- Každý elementárny súčtový člen n premenných určuje práve jeden nulový bod?
- Každý nulový bod zodpovedá práve jednému elementárnemu súčtovému členu?
- Nulové body ľubovoľných dvoch súčtových členov sú rôzne?
- Každé dve rôzne NKF určujú dve rôzne B-funkcie?
- **Veta 2.11.** Každá B-funkcia je určená niektorou NKF?

Definícia 2.17. Každý B-výraz n premenných $x_1, \dots, x_n$, ktorý má tvar

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{3^n} (c_k + T_k(x_1, \dots, x_n)),$$

kde $c_k \in \{0,1\}$, nazývame **normálna konjunktívna forma** tohto výrazu a tiež NKF príslušnej B-funkcie.

Príklad

$f(x, y, z) = (z + y) \cdot (x + \bar{z})$. Nájdite inú NKF(f) iba úpravami.