

- V pondelok po prednáške prídu do BC 300 za študentmi TLK zástupcovia Ústavu Telekomunikácií (náhradný termín) 😊

## Obsah

|                                         |   |
|-----------------------------------------|---|
| Tabuľka ekvivalencií B - výrazov .....  | 2 |
| Úplná normálna disjunktívna forma ..... | 5 |
| Úplná normálna konjunktívna forma ..... | 8 |

## Poznámka

- Každý B-výraz reprezentuje (definuje, určuje, generuje) nejakú (jednu jedinou!!!) B-funkciu.
- Každá B-funkcia môže byť reprezentovaná viacerými B-výrazmi.

### Príklad modif. 2.3

B-výraz  $U(x, y, z) = (\overline{x + y})z$

definuje funkciu  $f_U(x, y, z) = (\overline{x + y})z$ .

$$= (\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot z = \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$$

Rovnosť B - funkcií.

~~Rovnosť B - výrazov.~~ Ekvivalencia B - výrazov.

**Definícia 2.5.** B-výrazy  $U(x_1, \dots, x_n)$ ,  $V(x_1, \dots, x_n)$  sa nazývajú **ekvivalentné** vtedy, ak definujú rovnakú booleovskú funkciu.

Píšeme  $U \cong V$  resp.  $U(x_1, \dots, x_n) \cong V(x_1, \dots, x_n)$ .

**Poznámka 2.5.**  $U \cong V \Leftrightarrow f_U = f_V$ .

**Príklad 2.4** Dokážte, že  $\underbrace{xz + yz}_U \cong \underbrace{(x + y)z}_V$ .

definujeme

$$f_U(x, y, z) = xz + yz, \quad f_V(x, y, z) = (x + y)z$$

distib. • vzhľadom k + dávam  $f_U = f_V$   
t.j.  $U \cong V$

## Tabuľka ekvivalencií B - výrazov

Analógia s pravidlami pre log. spojky a pre B - funkcie.

**Veta 2.4.** Nech sú  $U, V, W$  ľubovoľné B - výrazy. Potom platí

|                                                 |                                             |                      |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------|
| $U + V \cong V + U$                             | $U \cdot V \cong V \cdot U$                 | komutatívne zákony   |
| $(x + y) + z = x + (y + z)$                     |                                             | asociatívne zákony   |
|                                                 |                                             | distributívne zákony |
|                                                 |                                             | de Morganove zákony  |
|                                                 |                                             | zák.idempotentnosti  |
|                                                 |                                             | z. komplementárnosti |
| $\bar{\bar{x}} = x$                             |                                             | zákon involúcie      |
| $x + (x \cdot y) = x$                           | $x \cdot (x + y) = x$                       | zákony absorpcie     |
| $x + 0 = x$                                     | $x \cdot 1 = x$                             | zákony identity      |
| $x + 1 = 1$<br>Zákon jednotkového<br>sčítovania | $x \cdot 0 = 0$<br>Zákon nulového násobenia |                      |

### Poznámka

$$x + xy = x(1 + y) = x \cdot 1 = x$$

Pre B-výrazy okrem toho platia tzv. **zákony stability**:

**Veta 2.5.** Pre každé B - výrazy  $U, V, W$  platí:

|                                    |                         |
|------------------------------------|-------------------------|
| ak $U \cong V$ , tak $\Rightarrow$ | $U + W \cong V + W$     |
| $\Rightarrow$                      | $UW \cong VW$           |
| $\Rightarrow$                      | $\bar{U} \cong \bar{V}$ |

### Dôkaz (skriptá)

definujeme  $f_U(x_1, \dots, x_n) = U(x_1, \dots, x_n)$ , podobne  $f_V, f_W$

$U \cong V \Rightarrow f_U = f_V \Rightarrow$  ľač  $(f_U + f_W) = (f_V + f_W)$ , lebo

$\forall (x_1, \dots, x_n)$  je  $(f_U + f_W)(x_1, \dots, x_n) = (f_V + f_W)(x_1, \dots, x_n)$   $\Rightarrow$

$\Rightarrow U + W \cong V + W$

**Otázka ???** Platia predchádzajúce Implikácie aj naopak, t.j. ak pre nejaký výraz  $W$  platí  $U + W \cong V + W$  potom  $U \cong V$  (atď)?

**Dohoda.** Zjednodušenia:

- Nebudeme rozlišovať medzi B-výrazmi  $U + V$  a  $V + U$  ani medzi  $UV$  a  $VU$ .
- B-výrazy  $(U + V) + W$  a  $U + (V + W)$  budeme považovať za rovnaké a miesto nich budeme písať  $U + V + W$ .  
Podobne namiesto  $(UV)W$  či  $U(VW)$  budeme písať  $UVW$ .
- Za rovnaké budeme považovať aj B-výrazy  $1 \cdot U$ ,  $0 + U$ ,  $U$  a tiež  $1 + U$  a  $1$ , a tiež  $0 \cdot U$  a  $0$ .

### Príklad

Nájdite nejaký zápis (výraz) B-funkcie  $f$ , ak je daná množina jej jednotkových bodov  $J(f) = \{(100), (001), (110)\}$ .

$$f(x, y, z) = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z$$

### Poznámka

Niektoré typy B-výrazov sú výhodnejšie, pretože dávajú napr.

- Informáciu o jednotkových bodoch príslušnej B-funkcie
- Informáciu o nulových bodoch príslušnej B-funkcie
- Majú stručný zápis alebo celkom minimálny a preto budú pri fyzikálnej realizácii výhodné (lacné, rýchle, efektívne, ekologické...).
- ...

**Príklad**

- a) Nájdite  $J(f)$ , ak  $f(x, y, z) = \overset{1,0,1}{x\bar{y}z} + \overset{0,0,0}{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}$   $f(f) = \{101, 000\}$
- b) Nájdite  $J(f)$ , ak  $f(x, y, z) = \bar{x}z + y\bar{z} = \bar{x}(y + \bar{y})z + (x + \bar{x})y\bar{z}$
- c) Nájdite  $N(f)$ , ak  $f(x, y, z) = \overset{0,1,1}{(x + \bar{y} + \bar{z})(x + y + z)(\bar{x} + y + z)}$   
 $N(f) = \{011, 000, 101\}$

**Úplná normálna disjunktívna forma**  $UNDF(f)$ **Definícia 2.7.**

**Elementárnym súčinovým členom**  $n$  premenných  $x_1, \dots, x_n$  nazývame B-výraz

$$S(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n,$$

kde  $\alpha_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$  pre  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Príklad**

Koľko je elementárnych súčinových členov 2 premenných?  $4 = 2^2$

Vypíšte ich:  $xy, \bar{x}y, x\bar{y}, \bar{x}\bar{y}$

!!!  $x, x\bar{x}, xy$  ..... nie sú elem. súčinové členy!!!

Elementárnych súčinových členov 3 premenných je  $2^3$  ..... (koľko?):

$$xyz, \bar{x}yz, \dots, \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2$$

Elementárnych súčinových členov  $n$  premenných je  $2^n$

## Poznámka

- Každý elementárny súčinový člen  $n$  premenných určuje práve jeden ~~nulový~~ jednotkový bod a naopak:
- Každý jednotkový bod zodpovedá práve jednému elementárnemu súčinovému členu.

## Veta 2.7.

Jednotkové body ľubovoľných dvoch elementárnych súčinových členov sú rôzne.

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n & & \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \\ \wedge & & \wedge \\ x_2 & \bar{x}_2 & x_2 \bar{x}_2 \end{array}$$

### Príklad

Nájdite nejaký zápis funkcie  $f$ , ak  $J(f) = \{111, 100, 001, 000, 010\}$ .

Riešenie:  $f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$  (negácie!!!)  $UNDF(f)$

Úplný zápis (aj tu chýbajú negácie a tiež 0 resp. 1 pred každým členom):

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \\ &= 1 \cdot xyz + 0 \cdot xy\bar{z} + 0 \cdot x\bar{y}z + 1 \cdot x\bar{y}\bar{z} + 0 \cdot \bar{x}yz + 1 \cdot \bar{x}y\bar{z} + 1 \cdot \bar{x}\bar{y}z + 1 \cdot \bar{x}\bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

**Definícia 2.9.** Úplná normálna disjunktívna forma B-funkcie  $f$   $n$  premenných  $x_1, \dots, x_n$  je B-výraz tvaru

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j S_j(x_1, \dots, x_n)$$

kde  $c_j \in \{0, 1\}$ . Skrátene píšeme  $UNDF(f)$ .

**Veta 2.8.** Každé dve rôzne  $UNDF$  určujú dve rôzne booleovské funkcie.

**Veta 2.9.** Každá booleovská funkcia je určená niektorou  $UNDF$ .

**Poznámka**

- ↙ prázdna množina
- **Veta 2.10.** Ak je  $J(g) = \emptyset$ , tak  $UNDF(g) = () \leftarrow$  číslo 0
  - Definujeme aj  $UNDF$  B-výrazov.

**Definícia 2.10.**

Nech  $W(x_1, \dots, x_n)$  je B-výraz a nech  $U(x_1, \dots, x_n)$  je taký výraz v tvare  $UNDF$ , že  $W \cong U$ .

Potom  $U$  nazývame úplnou normálnou disjunktívnou formou B - výrazu  $W$  a tiež úplnou normálnou disjunktívnou formou príslušnej B - funkcie  $f_W$ .

**Príklad**

$$UNDF(f)$$

$f(x, y, z) = x\bar{y}z + y\bar{z} + xy$ . Nájdite  $UNDF(f)$ ,  $J(f)$ ,  $J(\bar{f})$ .

$$= x\bar{y}z + x y \bar{z} + \bar{x} y \bar{z} + x y z + \cancel{x y \bar{z}} = UNDF(f)$$

$$J(f) = \{101, 110, \boxed{010}, 111\}$$

$$J(\bar{f}) = \{\cancel{010}, \cancel{001}, \cancel{101}, \cancel{000}\} = \{000, 001, 100, 011\}$$

$\approx N(f)$

## Úplná normálna konjunktívna forma

### Definícia 2.11.

**Elementárnym súčtovým členom** (*elementárnym súčtom*) nazývame B-výraz

$$T(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

kde  $\alpha_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$  pre  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### Príklad

Koľko je elementárných súčtov 2 premenných? Vypíšte ich:

$x+y, \bar{x}+y, x+\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}$   
!!!  $\bar{x}+\bar{y}$  ..... nie je elementárny súčet!!!

Elementárných súčtov 3 premenných je..... (koľko?):

Elementárných súčtových členov  $n$  premenných je.....

### Poznámka

- Každý elementárny súčet  $n$  premenných určuje práve jeden nulový ~~jednotkový~~ bod a naopak:
- Každý ~~nulový~~ ..... bod zodpovedá práve jednému elementárnemu súčtu.

**Definícia 2.13.** Úplná normálna konjunktívna forma B-funkcie  $n$  premenných  $x_1, \dots, x_n$  je B-výraz tvaru

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=0}^{2^n-1} (c_k + T_k(x_1, \dots, x_n)),$$

kde  $c_k \in \{0,1\}$ . Skrátene píšeme  $UNKF(f)$ .

**Poznámka (Veta 2.11.)**

Ak je  $N(g) = \emptyset$ , tak  $UNKF(g) = 1$

**Príklad**

← prázdná množina

Nájdite  $UNKF(f), N(f), J(f)$ , ak je  $f$  daná tabuľkou

| x | y | f |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

$\bar{x}\bar{y}$   
 $\bar{x}y$   
 $x\bar{y}$   
 $xy$

$N(f) = \{10, 11\}$   
 $J(f) = \{00, 01\}$   
 $UNKF(f) = (\bar{x} + y)(\bar{x} + \bar{y})$   
 $UNDF(f) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y$

Koniec prednášky 4

**Príklad**

$f(x, y, z) = (z + y) \cdot (x + \bar{z})$ . Nájdite  $UNKF(f)$  iba úpravami.

**Príklad**

$f(x, y, z) = \overline{x + y} \cdot z + y \cdot (x + \bar{z})$

Nájdite  $UNDF(f)$  aj  $UNKF(f)$  iba úpravami.