

Príklad 2.2.

(1) Premenné x, y, z, t sú (?) B-výrazy.

(2) $\overline{x+y}, xy, \overline{yz}, \bar{z}x$ sú (?) B-výrazy.

(3) $(x+y)\bar{z}, x\bar{y}z, yz+x, \overline{yz+x}, \overline{yz}+x$, sú (?) B-výrazy.

(4) $x+y+1+z$ je (?) B-výraz.

Príklad

B-výrazy jednej premennej sú $x, \bar{x}, 0, 1$.

B-výrazy dvoch premenných sú $0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}, xy, x\bar{y}, \dots, \bar{x}\bar{y}, x+y, \dots$ ale napríklad aj $xy + \bar{x}$.

Poznámka

- Každý B-výraz reprezentuje (definuje, určuje, generuje) nejakú (jednu jedinou!!!) B-funkciu.
- Každá B-funkcia môže byť reprezentovaná viacerými B-výrazmi.

Príklad (modif. 2.3) B-výraz

$U(x, y, z) = (\overline{x+y})z$ definuje funkciu $f_U(x, y, z) = (\overline{x+y})z$.

Rovnosť B - funkcií.

Rovnosť B - výrazov.

Ekvivalencia B - výrazov.

Definícia 2.5. B-výrazy $U(x_1, \dots, x_n)$, $V(x_1, \dots, x_n)$ sa nazývajú **ekvivalentné** vtedy, ak definujú rovnakú booleovskú funkciu.

Píšeme $U \cong V$ resp. $U(x_1, \dots, x_n) \cong V(x_1, \dots, x_n)$.

Poznámka 2.5. Predchádzajúcu definíciu môžeme stručne zapísať takto: $U \cong V \Leftrightarrow f_U = f_V$.

Príklad 2.4. Dokážte, že $xz + yz \cong (x + y)z$.

Veta 2.4. (Tabuľka ekvivalencií B - výrazov.)

Analógia s pravidlami pre log. spojky a pre B - funkcie.

sčítanie	násobenie	
		komutatívne zák.
		asociatívne zákony
		distributívne zákony
		de Morganove zák.
		zákony skrátania
		z. komplementárnosti
		zákon involúcie (negácia negácie)
		zákony pohltenia
		zákony identity
Zákon jednotkového sčítovania	Zákon nulového násobenia	

E1. $U + V \cong V + U$	$UV \cong VU$	komutatívne zákony
E2. $(U + V) + W \cong U + (V + W)$	$(UV)W \cong U(VW)$	asociatívne zákony
E3. $(U + V)W \cong UW + VW$	$UV + W \cong (U + W)(V + W)$	distributívne zákony
E4. $\overline{U + V} \cong \overline{U} \overline{V}$	$\overline{UV} \cong \overline{U} + \overline{V}$	de Morganove zákony
E5. $U + U \cong U$	$UU \cong U$	zákony idempotentnosti
E6. $U + \overline{U} \cong 1$	$U\overline{U} \cong 0$	zákony komplementárnosti
E7. $U \cong \overline{\overline{U}}$		zákon involúcie
E8. $U + (UV) \cong U$	$U(U + V) \cong U$	zákon absorpcie (pohltenia)
E9. $U + 0 \cong U$	$U \cdot 1 \cong U$	zákony identity
E10. $U + 1 \cong 1$	$U \cdot 0 \cong 0$	zákony jednotkového sčítania a nulového násobenia

Poznámka

Pre B-výrazy okrem toho platia tzv. **zákony stability**:

Veta 2.5. Pre každé B - výrazy U, V, W platí:

ak $U \cong V$, tak	$U + W \cong V + W$
	$UW \cong VW$
	$\overline{U} \cong \overline{V}$

Dôkaz (skriptá)

Otázka ??? Platia predchádzajúce Implikácie aj naopak, t.j.

ak $U + W \cong V + W$ potom $U \cong V$ (a ďalšie)?

Dohoda.

Dohodneme sa na ďalších zjednodušeníach pri zápise B-výrazov. Využijeme zákony z Tabuľky ekvivalencií B-výrazov.

- Nebudeme rozlišovať medzi B-výrazmi $U + V$ a $V + U$ ani medzi UV a VU .
- B-výrazy $(U + V) + W$ a $U + (V + W)$ budeme považovať za rovnaké a miesto nich budeme písať $U + V + W$.
Podobne namiesto $(UV)W$ či $U(VW)$ budeme písať UVW .
- Za rovnaké budeme považovať aj B-výrazy $1 \cdot U$, $0 + U$, U tiež $1 + U$ a 1 , a tiež $0 \cdot U$ a 0 .

Príklad

Poznámka

Niektoré typy B-výrazov sú výhodnejšie než iné, pretože dávajú napr.

- Informáciu o jednotkových bodoch príslušnej B-funkcie ?
- Informáciu o jednotkových bodoch príslušnej B-funkcie
- Majú stručný zápis alebo celkom minimálny a preto budú praktické (lacné, rýchle, efektívne, ekologické...) pri fyzikálnej realizácii.
- ...

Príklad

Nájdite $J(f)$, ak $f(x, y, z) =$

Nájdite $J(f)$, ak $f(x, y, z) =$

Nájdite $N(f)$, ak $f(x, y, z) =$

Úplná normálna disjunktívna forma

Definícia 2.7.

Elementárnym súčinovým členom nazývame B-výraz

$$S(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n,$$

kde $\alpha_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Príklad

Koľko je elementárnych súčinových členov 2 premenných?

Vypíšte ich:

!!! nie je el.súčinový člen!!!

Elementárnych súčinových členov 3 premenných je.....(koľko?):

Elementárnych súčinových členov n premenných je.....

Poznámka

- Každý elementárny súčinový člen n premenných určuje práve jeden nulový / jednotkový bod a naopak:
- Každý bod zodpovedá práve jednému elementárnemu súčinovému členu.

Veta 2.7.

Jednotkové body ľubovoľných dvoch elementárnych súčinových členov sú rôzne.

Príklad

Nájdite nejaký zápis funkcie f , ak

$$J(f) = \{111, 100, 001, 000, 010\}.$$

Riešenie: $f(x, y, z) = xyz + xyz + xyz + xyz + xyz$

Úplný zápis:

$$f(x, y, z) = xyz + xyz + xyz + xyz + xyz + xyz + xyz + xyz$$

Definícia 2.9. Úplná normálna disjunktívna forma B-funkcie n premenných $x_1, \dots, x_n$ je B-výraz tvaru

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum c_j S_j(x_1, \dots, x_n), \text{ kde } c_j \in \{0, 1\}.$$

Skrátene píšeme $UNDF(f)$.

Príklad

Nájdite $UNDF(f), J(f), N(f)$, ak je f daná tabuľkou

Veta 2.8. Každé dve rôzne $UNDF$ určujú dve rôzne booleovské funkcie.

Veta 2.9. Každá booleovská funkcia je určená niektorou $UNDF$.

Poznámka

- **Veta 2.10.** Ak je $J(g) = \emptyset$, tak $UNDF(g) =$
- Definujeme aj $UNDF$ B-výrazov.

Definícia 2.10.

Nech $W(x_1, \dots, x_n)$ je B-výraz a nech $U(x_1, \dots, x_n)$ je taká $UNDF$, že $W \cong U$.

Potom U nazývame **úplnou normálnou disjunktívnou formou B-výrazu W** a tiež **úplnou normálnou disjunktívnou formou B-funcie f_W** .

Príklad

$f(x, y, z) = x\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + xy$. Nájdite $UNDF(f)$, $J(f)$, $J(\bar{f})$.

Úplná normálna konjunktívna forma

Definícia 2.11.

Elementárnym súčtovým členom (*elementárnym súčtom*) nazývame B-výraz

$$T(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

kde $\alpha_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Príklad

Koľko je elementárných súčtov 2 premenných? Vypíšte ich:

!!! nie je elementárny súčet!!!

Elementárných súčtov 3 premenných je.....(koľko?):

Elementárných súčtových členov n premenných je.....

Poznámka

- Každý elementárny súčet n premenných určuje práve jeden nulový / jednotkový bod a naopak:
- Každý bod zodpovedá práve jednému elementárnemu súčtu.

Definícia 2.13. Úplná normálna konjunktívna forma B-funkcie n premenných $x_1, \dots, x_n$ je B-výraz tvaru

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod (c_k + T_k(x_1, \dots, x_n)), \text{ kde } c_k \in \{0, 1\}.$$

Skrátene píšeme $UNKF(f)$.

Poznámka (Veta 2.11.)

Ak je $N(g) = \emptyset$, tak $UNKF(g) =$

Príklad

Nájdite $UNKF(f), N(f), J(f)$, ak je f daná tabuľkou

Príklad

$f(x, y, z) = (z + y) \cdot (x + \bar{z})$. Nájdite $UNKF(f)$ iba úpravami.

Príklad

$$f(x, y, z) = \overline{x + y} \cdot z + y \cdot (x + \bar{z})$$

Nájdite $UNDF(f)$ aj $UNKF(f)$ iba úpravami.

Definícia 2.8. Nech $(j_1, j_2, \dots, j_n) \in B^n$ je jednotkový bod elementárneho súčinového člena. Označme

$$j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \dots + j_{n-1} 2^1 + j_n 2^0$$

Potom tento súčinový člen budeme označovať

$$S_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ alebo } S_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a nazývať ho **elementárny súčinový člen priradený k n-tici** $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Definícia 2.12.

Nech $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in B^n$ je nulový bod elementárneho súčtového člena a nech

$$v = v_1 2^{n-1} + v_2 2^{n-2} + \dots + v_{n-1} 2^1 + v_n 2^0.$$

Tento súčtový člen budeme označovať

$$T_{(v_1, v_2, \dots, v_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

alebo $T_v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a nazývať ho **elementárny súčtový člen priradený k n-tici** $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.