

Operácie

Definícia 1.4. (str.6)

Nech $A \neq \emptyset$ je množina, $n \in \mathbb{N}^+$. Každé zobrazenie $h: A^n \rightarrow A$ nazývame **n -árnou operáciou** na množine A .

$n = 1$ unárna operácia

$n = 2$ operácia

$n \in \mathbb{N}^+$ operácia

Definícia 1.5.

Binárna operácia $\blacksquare: A^2 \rightarrow A$ sa nazýva

- **Komutatívna**, ak $\forall a, b \in A : a \blacksquare b = b \blacksquare a$
- **Asociatívna**, ak $\forall a, b, c \in A : (a \blacksquare b) \blacksquare c = a \blacksquare (b \blacksquare c)$

Prvok $e \in A$ sa volá

- **neutrálny prvok** binárnej operácie $\blacksquare$ na množine A , ak $\forall x \in A: x \blacksquare e = e \blacksquare x = x$.

Definícia 1.6.

Nech sú $\otimes, \Delta$ dve binárne operácie na množine A . Hovoríme, že operácia $\otimes$ **je distributívna vzhľadom k Δ** , ak

$$\forall x, y, z \in A: x \otimes (y \Delta z) = (x \otimes y) \Delta (x \otimes z)$$

a tiež

$$\forall x, y, z \in A: (y \Delta z) \otimes x = (y \otimes x) \Delta (z \otimes x)$$

Príklad 1

$+: R^2 \rightarrow R$ je binárna operácia „súčet“,

$\cdot: R^2 \rightarrow R$ je binárna operácia „súčin“.

Sú $+$, $\cdot$ komutatívne na R ? asociatívne? A čo distributívnosť?

Definujme teraz dôležité operácie na množine B .

Definícia 2.2.

Logickým súčtom nazývame binárnu operáciu na množine B , ktorú označujeme $+$ a definujeme takto:

$$0+0=0$$

Logickým súčinom nazývame binárnu operáciu na množine B , ktorú označujeme $\cdot$ a definujeme takto:

$$0 \cdot 0 = 0$$

Cayleyho multiplikačné tabuľky

Negáciou (alebo komplementom) nazývame unárnu operáciu na množine B , ktorú označujeme $\overline{}$ a definujeme takto:

$$\overline{0} = 1, \overline{1} = 0.$$

Poznámka 2.2.

Algebry, grupy, zväzy...

Booleova algebra je množina B spolu s binárnymi operáciami logický súčet, logický súčin a unárnou operáciou negácia.

Veta 2.2. (str.27)

Pre každé $x, y, z \in B$ platí (pozor na preklepy 😊)

$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$	komutatívne zákony
$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	asociatívne zákony
$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$	$(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$	distributívne zákony
$x + y = \bar{x} \cdot \bar{y}$	$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$	de Morganove zákony
$x + x = x$	$x \cdot x = x$	zákony idempotentnosti
$x + \bar{x} = 1$	$x \cdot \bar{x} = 0$	zákony komplementárnosti
$\bar{\bar{x}} = x$		zákon involúcie
$x + (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x + y) = x$	zákony absorpcie
$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$	zákony identity
$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$	
Zákon jednotkového sčítovania	Zákon nulového násobenia	

Dôkazy

Veta 2.3.

Pre každé $x, y \in B$ platí

$x + y = 1 \Leftrightarrow$	$x \cdot y = 1 \Leftrightarrow$
$x + y = 0 \Leftrightarrow$	$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow$

Poznámka

- Nech je $A \subset R$ a nech je $f: A \times A \rightarrow A$. Podľa toho, na aké vlastnosti f sa chceme zamerať, môžeme f považovať za **binárnu operáciu** alebo za **funkciu dvoch premenných**.
- $B = \{0,1\}$ je podmnožinou R . Preto môžeme každú booleovskú funkciu dvoch premenných považovať aj za binárnu operáciu – má teda zmysel uvažovať o tom, či je komutatívna, asociatívna, ...
- Booleovské funkcie n premenných sú n – árnymi operáciami na B .

Aj booleovské funkcie môžeme sčítovať, násobiť, negovať.

Definícia 2.3.

Nech $f, g: B^n \rightarrow B$ sú booleovské funkcie.

Súčtom funkcií f, g nazývame funkciu $f + g: B^n \rightarrow B$, kde

$$(f + g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n);$$

Súčinom funkcií f, g nazývame funkciu $f \cdot g: B^n \rightarrow B$, kde

$$(f \cdot g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n);$$

negáciou funkcie f nazývame funkciu $\bar{f}: B^n \rightarrow B$, kde

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}.$$

Príklad 2.1 modif

Nech $f(x, y, z) = xy + \bar{y}z$, $g(x, y, z) = x\bar{z}$

sú booleovské funkcie troch premenných. Nájdite nejaký predpis funkcií $f + g$, $f \cdot g$, $\bar{f}$.

Poznámka 2.3.

- Množina všetkých B -funkcií n premenných f_n spolu s práve definovanými operáciami súčtu, súčinu a negácie je tiež Booleova algebra (sú splnené vlastnosti z Vety 2.2).
- V každej Booleovej algebre platí **princíp duality**: Ak v pravdivom tvrdení zmeníme $+$ na $\cdot$, 0 na 1 a naopak, dostaneme opäť pravdivé tvrdenie.

DÚ: Overte si, že je tento princíp splnený vo všetkých desiatich vlastnostiach vety 2.2.

Definícia (Rovnosť B - funkcií.)

B-funkcie $f: B^n \rightarrow B$ a $g: B^n \rightarrow B$ **sú zhodné** (rovnaké), práve vtedy, keď $\forall (x_1, \dots, x_n) \in B^n: \dots\dots\dots$

Píšeme $f = g$.

Poznámka

Aj v prípade, že príslušné predpisy (výrazy) funkcií sú rôzne, môže platiť $f = g$.

Príklad 3

Zjednodušte zápis B-funkcie $f(x, y, z, u) = xyzu + x\bar{y}zu + \bar{x}yzu$ tak, aby v ňom bol najmenší možný počet (výskyt) písmen.

Poznámka

Booleovskú funkciu môžeme definovať rôznymi spôsobmi:

- výrazom,
- stanovením množiny jednotkových/nulových bodov,
- tabuľkou,
- nejakou slovnou formuláciou,
- pomocou KLS,
- pomocou Karnaughovej mapy, ...

Definícia 2.6.

Nech $f: B^n \rightarrow B$. Prvok $(a_1, \dots, a_n) \in B^n$ sa nazýva

- **jednotkový bod funkcie f** , ak $f(a_1, \dots, a_n)$
- **nulový bod funkcie f** , ak $f(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Množinu všetkých jednotkových resp. nulových bodov funkcie f budeme označovať $J(f)$ resp. $N(f)$.

Veta 2.6. Nech sú f, g B-funkcie n premenných. Potom platí

		Duálny vzťah
(1)	$f = g \Leftrightarrow J(f) = J(g)$	
(2)	$J(f + g) = J(f) \cup J(g)$	
(3)	$J(f \cdot g) = \dots$	
(4)	$J(\bar{f}) = \dots$	

Dôkaz (str.31)

(1) Tvrdenie vyplýva z toho, že každý bod definičného oboru booleovskej funkcie je buď jednotkový alebo nulový.

(2) Z vlastnosti

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n) = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 1 \vee g(x_1, \dots, x_n) = 1 \end{aligned}$$

vyplýva

$$J(f + g) = J(f) \cup J(g).$$

(3) Z vlastnosti

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n) = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 1 \wedge g(x_1, \dots, x_n) = 1 \end{aligned}$$

vyplýva

$$J(f \cdot g) = J(f) \cap J(g).$$

(4) Z vlastnosti

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

vyplýva

$$J(\bar{f}) = N(f).$$

➤ Tvrdenia o nulových bodoch sa dokazujú analogicky.

Príklad 2.7. (modif)

Nájdite $J(f)$ a $N(f)$ funkcie $f(x, y, z) = x\bar{y}z + \bar{x}z + yz$.

Poznámka

Ak poznáme všetky jednotkové resp. všetky nulové body booleovskej funkcie, máme o nej kompletnú informáciu.

Preto sú užitočné také zápisy (výrazy) B-funkcií, ktoré presne zodpovedajú jednotkám resp. nulám.

Príklad 5

Nájdite nejaký zápis (výraz) B-funkcie f , ak je daná množina jej jednotkových bodov $J(f) = \{(100), (001), (110)\}$.

Definícia 2.4.

Booleovský výraz (B - výraz) n premenných $x_1, \dots, x_n$ je **slovo** nad abecedou $\{+, \cdot, \overline{}, (,), 0, 1, x_1, \dots, x_n\}$ definované takto:

- (1) $x_1, \dots, x_n, 0, 1$ sú booleovské výrazy.
- (2) Ak sú U, V booleovské výrazy, tak aj $\overline{U}, (U + V), (U \cdot V)$ sú booleovské výrazy.
- (3) Iné slová nie sú booleovské výrazy.

Dohoda.

- (1) V samostatne stojacom B-výraze vynechávame vonkajšie zátvorky.
- (2) Princíp priority: v poradí $\overline{}, \cdot, +$.
- (3) Znak logického súčinu budeme často vynechávať, teda namiesto $x \cdot y$ budeme písať xy .
- (4) B-výraz U premenných $x_1, \dots, x_n$ označujeme aj $U(x_1, \dots, x_n)$.
 - Body (1) a (2) sú analogické ako v dohode o formulách.
 - Pojmy jednotkové resp. nulové body budeme vzťahovať aj na B-výrazy, ktorými je určená príslušná B-funkcia.

Príklad 2.2.

- (1) Premenné x, y, z, t sú (?) B-výrazy.
- (2) $\overline{x + y}, xy, \overline{yz}, \overline{z}x$ sú (?) B-výrazy.

(3) $(x + y)\bar{z}$, $x\bar{y}z$, $yz + x$, $\overline{yz + x}$, $\bar{y}z + x$, sú (?) B-výrazy.

(4) $x + y + 1 + z$ je (?) B-výraz.

Príklad

B-výrazy jednej premennej sú $x, \bar{x}, 0, 1$.

B-výrazy dvoch premenných sú $0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}, xy, x\bar{y}, \dots, \bar{x}\bar{y}, x + y, \dots$
ale napríklad aj $xy + \bar{x}$.

Poznámka

- Každý B-výraz reprezentuje (definuje, určuje, generuje) nejakú (jednu jedinou!!!) B-funkciu.
- Každá B-funkcia môže byť reprezentovaná viacerými B-výrazmi.

Príklad (modif. 2.3) B-výraz

$U(x, y, z) = (\overline{x + y})z$ definuje funkciu $f_U(x, y, z) = (\overline{x + y})z$.

Rovnosť B - funkcií.

Rovnosť B - výrazov. Ekvivalencia B - výrazov.

Definícia 2.5. B-výrazy $U(x_1, \dots, x_n)$, $V(x_1, \dots, x_n)$ sa nazývajú **ekvivalentné** vtedy, ak definujú rovnakú booleovskú funkciu.

Píšeme $U \cong V$ resp. $U(x_1, \dots, x_n) \cong V(x_1, \dots, x_n)$.

Príklad 2.4 Dokážte, že $xz + yz \cong (x + y)z$.