

- V pondelok po prednáške prídu do BC 300 za študentmi TLK zástupcovia Ústavu Telekomunikácií.

Obsah

Základné tautologické ekvivalencie	4
2. Booleovské funkcie	6
Operácie	9

- **Farba strany**

Definícia Nech p, q, r sú výrokové premenné. Hovoríme, že logická spojka **K** viaže silnejšie ako logická spojka **L**, keď

$$p\mathbf{K}q\mathbf{L}r = (p\mathbf{K}q)\mathbf{L}r \quad \text{a tiež, keď} \quad p\mathbf{L}q\mathbf{K}r = p\mathbf{L}(q\mathbf{K}r).$$

Princíp priority logických spojok: V postupnosti $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ sú logické spojky zoradené tak, že každá spojka **K** viaže silnejšie, než hociktorá iná spojka, stojaca vpravo od **K**.

Dohoda o vonkajších zátvorkách: V samostatne stojacich formulách budeme vonkajšie zátvorky vynechávať.

- Ostatné zátvorky môžeme vynechať iba v niektorých prípadoch, napríklad pri použití **princípu priority logických spojok**.

Poznámka

- Výroková formula nie je výrok. Preto nemá ani pravdivostnú hodnotu.
- Keď však do formuly $a(p_1, p_2, \dots, p_n)$ dosadíme za všetky jej premenné nejaké výroky, dostaneme výrok (voláme ho **interpretácia výrokovej formuly**). Ten už má ph.
- Pri inej voľbe výrokov, ktoré dosadzujeme do formuly, môže byť iná ph.

Definícia 1.17.

Nech $a(p_1, p_2, \dots, p_n)$ je formula n premenných.

Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú výroky. Označme ich ph takto:

$ph(A_1) = x_1, ph(A_2) = x_2, \dots, ph(A_n) = x_n.$

Funkcia $ph_a: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ definovaná predpisom

$ph_a(\quad) = ph(\quad)$

sa nazýva **pravdivostné ohodnotenie formuly a** .

Zapisujeme ho v tvare tabuľky.

Definícia 1.18.

Formula sa nazýva

- **kontradikcia**, ak jej pravdivostným ohodnotením je konštantná funkcia s hodnotou 0
- **splniteľná**, ak nie je kontradikciou
 - **tautológia**, ak jej pravdivostným ohodnotením je konštantná funkcia s hodnotou 1

Príklady 1.23, 1.24

Definícia 1.19. Dve formuly s rovnakými premennými nazývame **tautologicky ekvivalentné**, ak majú rovnaké pravdivostné ohodnotenie.

Tautologicky ekvivalentné formuly **a** , **b** označujeme **$a \sim b$** .

Poznámka

$a \sim b$ znamená, že formula $(a \Leftrightarrow b)$ je

Príklady 1.25, 1.26**Základné tautologické ekvivalencie**

Veta 1.2. Nech sú a, b, c formuly s rovnakými premennými. Potom platia nasledujúce tautologické ekvivalencie:

E1.	$a \vee b \sim b \vee a,$	$a \wedge b \sim b \wedge a,$	.
E2.	$(a \vee b) \vee c \sim a \vee (b \vee c),$	$(a \wedge b) \wedge c \sim a \wedge (b \wedge c),$	.
E3.	$(a \vee b) \wedge c \sim (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$	$(a \wedge b) \vee c \sim (a \vee c) \wedge (b \vee c),$	.
E4.	$\overline{a \vee b} \sim \bar{a} \wedge \bar{b},$	$\overline{a \wedge b} \sim \bar{a} \vee \bar{b},$	.
E5.	$a \vee a \sim a,$	$a \wedge a \sim a,$	.
E6.	$a \vee (b \wedge \bar{b}) \sim a,$	$a \wedge (b \vee \bar{b}) \sim a,$	.
E7.	$\bar{\bar{a}} \sim a,$		.
E8.	$a \vee (a \wedge b) \sim a,$	$a \wedge (a \vee b) \sim a,$	.
E9.	$a \Rightarrow b \sim \bar{a} \vee b,$	$a \Rightarrow b \sim \overline{a \wedge \bar{b}},$	.
E10.	$a \Leftrightarrow b \sim (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}),$	$a \Leftrightarrow b \sim (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}).$	.

Dôkazy E1 – E10 (na tabuli)

Nepotrebuje (čo?)

Príklad 1 Vyjadrite $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p$ bez použitia implikácií.

Definícia 1.20. Úplný systém logických spojok je taká množina (neprázdna) logických spojok Q , že každú formulu je možné vyjadriť iba pomocou spojok z Q .

Príklad 1.28, 1.29

Príklad 2

Dokážme, že $\{\neg, \wedge, \vee, \}$ je ÚSLS.

Príklad 3 Vyjadrite formulu $(p \Rightarrow q) \vee r$ pomocou $\{\neg, \wedge\}$.

Príklad 4 Vyjadrite formulu $p \wedge \bar{q} \Rightarrow q \vee \bar{p}$ pomocou $\{\neg, \Rightarrow\}$.

2. Booleovské funkcie

Definícia 1.1. (str.5)

Nech sú A, M množiny. Predpis f , ktorý každému prvku z A priradí najviac jeden prvok z M , sa nazýva **zobrazenie z A do M** . Píšeme $f: A \rightarrow M$.

➤ Ak sú $A, M \subset R$, zobrazenie $f: A \rightarrow M$ sa nazýva **funkcia**.

➤ Ak $A \subset \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_n$, t.j. $A \subset R^n$
a ak $M \subset R^m$ } tak $f: A \rightarrow M$ sa nazýva
m- rozmerná funkcia n premenných.

Poznámka

- Odteraz množinu $\{0,1\}$ budeme označovať **B**. **Boole**
- Pripomeňme si, že $B^2 = B \times B = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$,
všeobecne $B^n = \underbrace{B \times B \times \dots \times B}_n$ obsahuje všetky n-tice z 0,1.

Definícia 2.1. Každá funkcia $f: B^n \rightarrow B$, kde $n \in \mathbb{N}^+$, sa nazýva **booleovská funkcia n premenných** (logická fcia n premenných).

- Premenné pri booleovských funkciách budeme označovať x, y, z, u, v (resp. s indexami).

Poznámka

Booleovské funkcie definujú a formalizujú kombinačné logické systémy. Naučme sa teda o B-funkciách čo najviac 😊

Príklad 5 a) Definujme všetky booleovské funkcie jednej premennej.

x	$f_1(x)$								

➤ Booleovských funkcií 1 premennej je ...

b) Koľko je booleovských funkcií 2 premenných?

x	y										...				

➤ Booleovských funkcií 2 premenných je ...

➤ Booleovských funkcií 3 premenných je ...

➤ Booleovských funkcií n premenných je ...

Veta 2.1. booleovských funkcií n premenných je .

Poznámka

Ako súvisia B-funkcie s logickými systémami (resp. obvodmi)?

Systém

- má **n vstupných veličín** $x_1, x_2, \dots, x_n$, ktoré menia svoju hodnotu v čase nezávisle od systému. Zmeny sa vytvárajú okolím systému (vstupy)
- má aj **m výstupných veličín** $y_1, y_2, \dots, y_m$. Ich hodnoty závisia od vstupných veličín (výstupy)

- Vzťahy medzi hodnotami vstupov a výstupov sa sprostredkujú vnútornými veličinami systému $z_1, z_2, \dots, z_k$, ktoré voláme **stavové premenné**. (stavy)

Logické systémy sú také, kde všetky premenné nadobúdajú iba 2 hodnoty, a síce 0/1 resp. L/H. Pritom 0 neznamená, že je hodnota veličiny 0, ale je nízka = Low. Podobne 1 = vysoká hodnota = High.

- Logický systém je definovaný na nejakom technickom zariadení, napr. elektronickom. Toto zariadenie voláme **logický obvod**. Jeho výstavba a správanie (v čase) sú vyjadrené štruktúrou a správaním príslušného logického systému.



Kombinačné systémy sú vyjadrené funkciou $f: B^n \rightarrow B^m$, ktorá každému vstupnému vektoru priradí jeden výstupný vektor. Každý výstupný vektor závisí iba od vstupného vektora.

Sekvenčné systémy: výstupy závisia nielen od vstupov v danom čase, ale aj od súčasného stavu systému. Pritom „súčasný stav“ závisí tiež od vstupného vektora ako i od predchádzajúceho stavu. Stav systému vyjadruje jeho „**pamäť**“.

Booleovské funkcie budeme študovať najskôr kvôli kombinačným systémom.

Operácie

Definícia 1.4. (str.6)

Nech $A \neq \emptyset$ je množina, $n \in \mathbb{N}^+$. Každé zobrazenie $h: A^n \rightarrow A$ nazývame **n -árnou operáciou** na množine A .

$n = 1$ unárna operácia

$n = 2$ operácia

$n \in \mathbb{N}^+$ operácia

Definícia 1.5.

Binárna operácia $\blacksquare: A^2 \rightarrow A$ sa nazýva

- **Komutatívna**, ak $\forall a, b \in A : a \blacksquare b = b \blacksquare a$
- **Asociatívna**, ak $\forall a, b, c \in A : (a \blacksquare b) \blacksquare c = a \blacksquare (b \blacksquare c)$

Prvok $e \in A$ sa volá

- **neutrálny prvok** binárnej operácie $\blacksquare$ na množine A , ak
 $\forall x \in A: x \blacksquare e = e \blacksquare x = x$.

Definícia 1.6.

Nech sú $\otimes, \Delta$ dve binárne operácie na množine A . Hovoríme, že

- $\otimes$ **je distributívna vzhľadom k Δ** , ak

$$\forall x, y, z \in A: x \otimes (y \Delta z) = (x \otimes y) \Delta (x \otimes z)$$

a tiež

$$\forall x, y, z \in A: x \otimes (y \Delta z) = (x \otimes y) \Delta (x \otimes z)$$

Príklad 1

$+: R^2 \rightarrow R$ je binárna operácia „súčet“,

$\cdot: R^2 \rightarrow R$ je binárna operácia „súčin“.

Príklad 2

Sú $+$, $\cdot$ komutatívne na R ? asociatívne? A čo distributívnosť?

Definujme teraz dôležité operácie na množine B .

Definícia 2.2.

Logickým súčtom nazývame binárnu operáciu na množine B , ktorú označujeme $+$ a definujeme takto:

$$0+0=0,$$

Logickým súčinom nazývame binárnu operáciu na množine B , ktorú označujeme $\cdot$ a definujeme takto:

$$0 \cdot 0 = 0$$

Cayleyho multiplikačné tabuľky

Negáciou (alebo komplementom) nazývame unárnu operáciu na množine B , ktorú označujeme $\overline{}$ a definujeme takto:

$$\overline{0} = 1, \overline{1} = 0.$$

Poznámka 2.2.

Algebry, grupy, zväzy...

Booleova algebra je množina B spolu s binárnymi operáciami logický súčet, logický súčin a unárnou operáciou negácia.

Veta 2.2. (str.27)

Pre každé $x, y, z \in B$ platí (pozor na preklepy 😊)

$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$	komutatívne zákony
$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	asociatívne zákony
$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$	$(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$	distributívne zákony
$x + y = \bar{x} \cdot \bar{y}$	$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$	de Morganove zákony
$x + x = x$	$x \cdot x = x$	zákony idempotentnosti
$x + \bar{x} = 1$	$x \cdot \bar{x} = 0$	zákony komplementárnosti
$\bar{\bar{x}} = x$		zákon involúcie
$x + (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x + y) = x$	zákony absorpcie
$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$	zákony identity
$x + 1 = 1$ Zákon jednotkového sčítovania	$x \cdot 0 = 0$ Zákon nulového násobenia	

Dôkazy niektorých zákonov.

Veta 2.3.

Pre každé $x, y \in B$ platí

$x + y = 1 \Leftrightarrow$	$x \cdot y = 1 \Leftrightarrow$
$x + y = 0 \Leftrightarrow$	$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow$

Poznámka

- Nech je $A \subset R$ a nech je $f: A \times A \rightarrow A$. Podľa toho, na aké vlastnosti f sa chceme zamerať, môžeme f považovať za **binárnu operáciu** alebo za **funkciu dvoch premenných**.
- $B = \{0,1\}$ je podmnožinou R . Preto môžeme každú booleovskú funkciu dvoch premenných považovať aj za binárnu operáciu – má teda zmysel uvažovať o tom, či je komutatívna, asociatívna, ...
- Booleovské funkcie n premenných sú n – árnymi operáciami na B .

Aj booleovské funkcie môžeme sčítovať, násobiť, negovať.