- V pondelok po prednáške prídu do BC 300 za študentmi TLK zástupcovia Ústavu Telekomunikácií.

Obsah

Definícia Nech p, q, r sú výrokové premenné. Hovoríme, že logická spojka K viaže silnejšie ako logická spojka L, keď

$$pKqLr = (pKq)Lr \qquad \text{a tiež, keď} \qquad pLqKr = pL(qKr).$$

Princíp priority logických spojok: V postupnosti $\overline{}$, ∧ , ∨ , ⇒ , ⇔ sú logické spojky zoradené tak, že každá spojka K viaže silnejšie, než hociktorá iná spojka, stojaca vpravo od K.

Dohoda o vonkajších zátvorkách: V samostatne stojacich formulách budeme vonkajšie zátvorky vynechávať.

- Ostatné zátvorky môžeme vynechať <u>iba v niektorých prípadoch</u> , napríklad pri použití **princípu priority logických spojok.**

Poznámka

- Výroková formula nie je výrok. Preto nemá ani pravdivostnú hodnotu.
- Keď však do formuly a(p_1, p_2, ... , p_n) dosadíme za všetky jej premenné nejaké výroky, dostaneme výrok (voláme ho **interpretácia výrokovej formuly**). Ten už má ph.
- Pri inej voľbe výrokov, ktoré dosadzujeme do formuly, môže byť iná ph.

Definícia 1.17.

Nech $a(p_1, p_2, \ldots , p_n)$ je formula n premenných.

Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú výroky. Označme ich ph takto:

$ph(A_1) = x_1$, $ph(A_2) = x_2$, . . . , $ph(A_n) = x_n$.

Funkcia $ph_a: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ definovaná predpisom

$ph_a(\qquad) = ph(\qquad)$

sa nazýva **pravdivostné ohodnotenie formuly a**.

Zapisujeme ho v tvare tabuľky.

Definícia 1.18.

Formula sa nazýva

- **kontradikcia**, ak jej pravdivostným ohodnotením je konštantná funkcia s hodnotou 0
- **splniteľná**, ak nie je kontradikciou
    - **tautológia**, ak jej pravdivostným ohodnotením je konštantná funkcia s hodnotou 1

Príklady 1.23, 1.24

Definícia 1.19. Dve formuly s rovnakými premennými nazývame **tautologicky ekvivalentné**, ak majú rovnaké pravdivostné ohodnotenie.

Tautologicky ekvivalentné formuly **a**, **b** označujeme **a** $\circ$ **b**.

Poznámka

a $\circ$ **b** znamená, že formula $(a \Leftrightarrow b)$ je ....

Príklady 1.25, 1.26

Základné tautologické ekvivalencie

Veta 1.2. Nech sú a,b,c formuly s rovnakými premennými. Potom platia nasledujúce tautologické ekvivalencie:

E1.	$a \vee b \sim b \vee a,$	$a \wedge b \sim b \wedge a,$	.
E2.	$(a \vee b) \vee c \sim a \vee (b \vee c),$	$(a \wedge b) \wedge c \sim a \wedge (b \wedge c),$	.
E3.	$(a \vee b) \wedge c \sim (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$	$(a \wedge b) \vee c \sim (a \vee c) \wedge (b \vee c),$	.
E4.	$\overline{a \vee b} \sim \overline{a} \wedge \overline{b},$	$\overline{a \wedge b} \sim \overline{a} \vee \overline{b},$	.
E5.	$a \vee a \sim a,$	$a \wedge a \sim a,$	.
E6.	$a \vee (b \wedge \overline{b}) \sim a,$	$a \wedge (b \vee \overline{b}) \sim a,$	.
E7.	$\overline{\overline{a}} \sim a,$		.
E8.	$a \vee (a \wedge b) \sim a,$	$a \wedge (a \vee b) \sim a,$	.
E9.	$a \Rightarrow b \sim \overline{a} \vee b,$	$a \Rightarrow b \sim \overline{a \wedge \overline{b}},$	.
E10.	$a \Leftrightarrow b \sim (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}),$	$a \Leftrightarrow b \sim (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}).$	.

Dôkazy E1 – E10 (na tabuli)

Nepotrebujeme (čo?)

Príklad 1 Vyjadrite ((p⇒q)⇒r)⇒p bez použitia implikácií.

Definícia 1.20. **Úplný systém logických spojok** je taká množina (neprázdna) logických spojok Q, že každú formulu je možné vyjadriť iba pomocou spojok z Q.

$\boxed{\text{Príklad 1.28, 1.29}}$

$\boxed{\text{Príklad 2}}$

Dokážme, že { ¯ ,∧,∨,} je ÚSLS.

$\boxed{\text{Príklad 3}}$ Vyjadrite formulu $(p \Rightarrow q) \vee r$ pomocou $\{\overline{\ \ }, \wedge\}$.

$\boxed{\text{Príklad 4}}$ Vyjadrite formulu $p \wedge \overline{q} \Rightarrow q \vee \overline{p}$ pomocou $\{\overline{\ \ }, \Rightarrow\}$.

2. Booleovské funkcie

Definícia 1.1. (str.5)

Nech sú A, M množiny. Predpis f, ktorý každému prvku z A priradí najviac jeden prvok z M, sa nazýva **zobrazenie z A do M**. Píšeme $f: A \to M$.

- Ak sú $A, M \subset R$, zobrazenie $f: A \to M$ sa nazýva **funkcia**.
- Ak $\left.\begin{array}{r} A \subset \underbrace{\mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \ldots \times \mathrm{R}}_{\mathrm{n}}, \text{t. j. } A \subset R^n \\ \text{a ak} \quad M \subset R^m \end{array}\right\}$ tak $f: A \to M$ sa nazýva **m- rozmerná funkcia n premenných**.

Poznámka

- Odteraz množinu $\{0,1\}$ budeme označovať B. **Boole**
- Pripomeňme si, že $B^2 = B \times B = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, všeobecne $B^n = \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n}$ obsahuje všetky n-tice z 0,1.

Definícia 2.1. Každá funkcia $f: B^n \to B$, kde $n \in N^+$, sa nazýva **booleovská funkcia n premenných** (logická fcia n premenných).

- Premenné pri booleovských funkciách budeme označovať x,y,z,u,v (resp. s indexami).

Poznámka

Booleovské funkcie definujú a formalizujú kombinačné logické systémy. Naučme sa teda o B-funkciách čo najviac ☺

Príklad 5 a)Definujme všetky booleovské funkcie jednej premennej.

x	$f_1(x)$								

- Booleovských funkcií 1 premennej je ...

b) Koľko je booleovských funkcií 2 premenných?

x	y										...				

- Booleovských funkcií 2 premenných je ...
- Booleovských funkcií 3 premenných je ...
- Booleovských funkcií n premenných je ...

Veta 2.1. booleovských funkcií n premenných je .

Poznámka

Ako súvisia B-funkcie s logickými systémami (resp. obvodmi)?

Systém

- má **n vstupných veličín** $x_1, x_2, \dots, x_n$, ktoré menia svoju hodnotu v čase nezávisle od systému. Zmeny sa vytvárajú okolím systému (vstupy)
- má aj **m výstupných veličín** $y_1, y_2, \dots, y_m$. Ich hodnoty závisia od vstupných veličín (výstupy)

- Vzťahy medzi hodnotami vstupov a výstupov sa sprostredkúvajú vnútornými veličinami systému $z_1, z_2, \ldots, z_k$, ktoré voláme **stavové premenné**. (stavy)

Logické systémy sú také, kde všetky premenné nadobúdajú iba 2 hodnoty, a síce 0/1 resp. L/H. Pritom 0 neznamená, že je hodnota veličiny 0, ale je nízka = Low. Podobne 1 = vysoká hodnota = High.

- Logický systém je definovaný na nejakom technickom zariadení, napr. elektronickom. Toto zariadenie voláme **logický obvod**. Jeho výstavba a správanie (v čase) sú vyjadrené štruktúrou a správaním príslušného logického systému.

Logické systémy (podľa správania) → Kombinačné systémy
Logické systémy (podľa správania) → Sekvenčné systémy

<u>**Kombinačné systémy**</u> sú vyjadrené funkciou $f: B^n \to B^m$, ktorá každému vstupnému vektoru priradí jeden výstupný vektor. Každý výstupný vektor závisí iba od vstupného vektora.

<u>**Sekvenčné systémy**</u>: výstupy závisia nielen od vstupov v danom čase, ale aj od súčasného stavu systému. Pritom „súčasný stav“ závisí tiež od vstupného vektora ako i od predchádzajúceho stavu. Stav systému vyjadruje jeho „**pamäť**“.

koniec prednášky 2