

- Prednášky s prof. Ďuračkovou **21.10.+23.10.** (piaty týždeň)
- Cvičenia s mikroelektronikmi (ÚEF) **piaty** resp. **šiesty** týždeň
- 1.zápočtová písomka **28.10.** (snáď) v čase prednášky
- **Test** s mikroelektronikmi zatiaľ nemá stanovený termín

1.3.3 Výrokové formuly

Definícia 1.13. **Formula** výrokového počtu (skrátene výroková formula alebo formula) je každé **slovo** nad abecedou X , pričom

$$X = \{ \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,), p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, \dots \},$$

ktoré vzniklo podľa pravidiel:

- (1) Každá výroková premenná je formula.
- (2) Ak a, b sú formuly, tak
 $\bar{a}, (a \wedge b), (a \vee b), (a \Rightarrow b), (a \Leftrightarrow b)$ sú formuly.
- (3) Žiadne iné slová nie sú formuly.

Príklad 1

1)

2)

Poznámka - Zátvorky

- Dohoda: Vonkajšie zátvorky môžeme vynechávať.
- Ostatné môžeme vynechať iba v niektorých prípadoch,
napríklad pri použití **princípu priority logických spojok**:

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ sú zoradené podľa toho, ako silno viažu. Od najsilnejšej po najslabšiu.

Príklad 2

Poznámka

- Výroková formula nie je výrok. Preto nemá ani pravdivostnú hodnotu.
- Keď však do formuly $a(p_1, p_2, \dots, p_n)$ dosadíme za všetky jej premenné nejaké výroky, dostaneme výrok (voláme ho **interpretácia výrokovej formuly**). Ten už má ph.
- Pri inej voľbe výrokov, ktoré dosadzujeme do formuly, môže byť iná ph.

Definícia 1.17. Nech $a(p_1, p_2, \dots, p_n)$ je formula n premenných.

Funkcia $ph_a: \{0,1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ definovaná predpisom

$$ph_a(x_1, x_2, \dots, x_n) = ph(a(A_1, A_2, \dots, A_n)),$$

kde $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú výroky, pre ktoré $ph(A_1) = x_1, ph(A_2) = x_2, \dots, ph(A_n) = x_n$, sa nazýva **pravdivostné ohodnotenie formuly a**.

Zapisujeme ho v tvare tabuľky.

Príklad 3

Skriptá, príklad 1.23.

Príklad 4

Zostrojte pravdivostnú tabuľku formúl $a := p \wedge (q \Rightarrow r)$, $b := (p \wedge q) \Rightarrow r$.

p	q	r	$q \Rightarrow r$	a

p	q	r		b

Podľa pravdivostného ohodnotenia rozdeľujeme formuly takto:

Definícia 1.18.

Formula sa nazýva

- **tautológia**, ak jej pravdivostným ohodnotením je konštantná funkcia s hodnotou 1;
- **kontradikcia**, ak jej pravdivostným ohodnotením je konštantná funkcia s hodnotou 0;
- **splniteľná**, ak nie je kontradikciou.

Príklad 5

- 1) Formula **a** z P4 je, pretože
- 2) Formula **b** z P4 je, pretože
- 3) **Príklad 1.24** v skriptách.

Definícia 1.19. Dve formuly s rovnakými premennými nazývame **tautologicky ekvivalentné**, ak majú rovnaké pravdivostné ohodnotenie.

Tautologicky ekvivalentné formuly **a**, **b** označujeme **$a \sim b$** .

Príklad 6

- 1) **Príklady 1.25, 1.26** v skriptách.
- 2) Sú formuly **a**, **b** z P4 tautologicky ekvivalentné? Zdôvodnite.

Základné tautologické ekvivalencie

Veta 1.2. Nech sú a, b, c formuly s rovnakými premennými. Potom platia nasledujúce tautologické ekvivalencie:

- | | |
|---|--|
| E1. $a \vee b \sim b \vee a,$ | $a \wedge b \sim b \wedge a,$ |
| E2. $(a \vee b) \vee c \sim a \vee (b \vee c),$ | $(a \wedge b) \wedge c \sim a \wedge (b \wedge c),$ |
| E3. $(a \vee b) \wedge c \sim (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$ | $(a \wedge b) \vee c \sim (a \vee c) \wedge (b \vee c),$ |
| E4. $\overline{a \vee b} \sim \overline{a} \wedge \overline{b},$ | $\overline{a \wedge b} \sim \overline{a} \vee \overline{b},$ |
| E5. $a \vee a \sim a,$ | $a \wedge a \sim a,$ |
| E6. $a \vee (b \wedge \overline{b}) \sim a,$ | $a \wedge (b \vee \overline{b}) \sim a,$ |
| E7. $\overline{\overline{a}} \sim a,$ | |
| E8. $a \vee (a \wedge b) \sim a,$ | $a \wedge (a \vee b) \sim a,$ |
| E9. $a \Rightarrow b \sim \overline{a} \vee b,$ | $a \Rightarrow b \sim \overline{a \wedge \overline{b}},$ |
| E10. $a \Leftrightarrow b \sim (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}),$ | $a \Leftrightarrow b \sim (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}).$ |

Dôkazy E1 – E10 pomocou tabuliek

neporebujeme $\Rightarrow, \Leftarrow$

Definícia 1.20. Úplný systém logických spojok je taká množina (neprázdna) logických spojok Q , že každú formulu je možné vyjadriť iba pomocou spojok z Q .

Príklad 7 (pozrite si aj P1.28, P1.29 zo skrípt)

Dokážme, že $\{ \neg, \wedge, \vee, \}$ je ÚSLS.

2. Booleovské funkcie

Definícia 1.1. (str.5)

Nech sú A, M množiny. Predpis f , ktorý každému prvku z A priradí najviac jeden prvok z M , sa nazýva **zobrazenie z A do M** . Píšeme $f: A \rightarrow M$.

- Ak sú $A, M \subset R$, zobrazenie $f: A \rightarrow M$ sa nazýva **funkcia**.
- Ak $A \subset R \times R \times \dots \times R$, t.j. $A \subset R^n$
 $M \subset R^m$ } tak $f: A \rightarrow M$ sa nazýva
m- rozmerná funkcia n premenných.

Poznámka

- Odteraz budeme označovať $B = \{0,1\}$... **Boole**.
- Pripomeňme si, že $B^2 = B \times B = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$,
všeobecne $B^n = B \times B \times \dots \times B$ obsahuje všetky n-tice z 0,1.

Definícia 2.1. Každá funkcia $f: B^n \rightarrow B$, kde $n \in \mathbb{N}^+$, sa nazýva **booleovská funkcia n premenných** (logická fcia n premenných).

Poznámka

Ako súvisia B-funkcie s logickými systémami (resp. obvodmi)?

Systém

- má **n vstupných veličín** $x_1, x_2, \dots, x_n$, ktoré menia svoju hodnotu v čase nezávisle od systému. Zmeny sa vytvárajú okolím systému. (vstupy)

- má aj **m výstupných veličín** $y_1, y_2, \dots, y_m$. Ich hodnoty závisia od vstupných veličín. (výstupy)
- Vzťahy medzi hodnotami vstupov a výstupov sa sprostredkujú vnútornými veličinami systému $z_1, z_2, \dots, z_k$, ktoré voláme **stavové premenné**. (stavy)

Logické systémy sú také, kde všetky premenné nadobúdajú iba 2 hodnoty, a síce 0/1 resp. L/H. Pritom 0 neznamená, že je hodnota veličiny 0, ale je nízka=Low, 1=vysoká hodnota=High.

- Logický systém je definovaný na nejakom technickom zariadení, napr. elektronickom. Toto zariadenie voláme **logický obvod**. Jeho výstavba a správanie (v čase) sú vyjadrené štruktúrou a správaním príslušného logického systému.



Kombinačné systémy sú vyjadrené funkciou $f: B^n \rightarrow B^m$, ktorá každému vstupnému vektoru priradí jeden výstupný vektor. Každý výstupný vektor závisí iba od vstupného vektora.

Sekvenčné systémy: výstupy závisia nielen od vstupov v danom čase, ale aj od súčasného stavu systému. Pritom „súčasný stav“ závisí tiež od vstupného vektora ako i od predchádzajúceho stavu. Stav systému vyjadruje jeho „**pamäť**“.

Booleovské funkcie budeme študovať najskôr kvôli kombinačným systémom.

Poznámka

- Premenné pri booleovských funkciách budeme označovať x, y, z, u, v (resp. s indexami).

Príklad 8 Definujme všetky booleovské funkcie jednej premennej:

x	$f_1(x)$								

Koľko je booleovských funkcií 2 premenných?

x	y										...				

Koľko je booleovských funkcií 3 premenných?

Koľko je booleovských funkcií n premenných?

Veta 2.1. booleovských funkcií n premenných je 2^{2^n} .

koniec prednášky 2