

Predmet LOGICKÉ SYSTÉMY

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/LogickeSystemy/ParalelkaB>

- Časová dotácia 4+1 (3+2)
- Obsah predmetu
- Požiadavky na získanie zápočtu
- 3 zápočtové písomky po 10 bodov,
 - prvá pravdepodobne

vo štvrtok 23.10. počas prednášky

- Hodnotenie na skúške

Obsah prednášky

1 Úvodné pojmy	2
2 Jazyk nad abecedou	3
3.1 Výroky	4
Zložené výroky	4
Pravdivostné hodnoty zložených výrokov	5
3.2 Kvantifikované výroky	6
Negácia kvantifikovaného výroku	8
3.3 Výrokové formuly	9

1 Úvodné pojmy

$N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ - množina prirodzených čísel,
t.j. takých, ktoré sú počtom prvkov nejakej množiny

$N^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\},$

Z – množina všetkých celých čísel,

Q - množina všetkých racionálnych čísel,

R – množina všetkých reálnych čísel,

R^+ – množina všetkých kladných reálnych čísel.

Definícia 1.3. **Karteziánskym súčynom** množín A, B nazývame množinu $\{(a,b); a \in A, b \in B\}$. Označujeme $A \times B$.

Príklad 1

Karteziánskym súčynom množín $A = \{1, *\}$, $B = \{a, x, z\}$ je množina:

Príklad 2 Karteziánskym súčynom $R \times R$ je množina:

Píšeme tiež R^2 .

2 Jazyk nad abecedou

Definícia 1.7. (el.str.5)

- Neprázdnu množinu X nazývame **abecedou**.
- Prvky množiny X nazývame **písmenami** (abecedy X).
- Konečnú postupnosť písmen abecedy X nazývame **slovom** nad X . Množinu všetkých slov nad abecedou X označujeme X^+ .
- Počet písmen v slove w nad abecedou X nazývame **dĺžkou slova** w a označujeme ju $|w|$.
- Nech $\Delta \notin X^+$. Symbol Δ nazývame **prázdny slovom nad X** a priradíme mu dĺžku nula. Množinu všetkých slov nad abecedou X spolu s prázdny slovom označujeme X^* .

Príklad 3 (1.8. skriptá)

Nech $X = \{0, 1\}$. Napíšeme postupne všetky slová nad abecedou X dĺžok 1, 2, 3. Koľko ich bude?

Všetkých

Poznámka Na generovanie jazykov používame špeciálne automaty, ktoré sa volajú **AKCEPTORY**.

3.1 Výroky

Definícia 1.9. **Výrok** je oznamovacia veta, ktorá má jednoznačnú a nemennú pravdivostnú hodnotu.

Pravdivostná hodnota pravdivého výroku je **1**,
pravdivostná hodnota nepravdivého výroku je **0**.

- Na označenie pravdivostnej hodnoty výroku A budeme používať symbol $ph(A)$.
- **Výroky** A, B sa nazývajú **ekvivalentné**, ak majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Príklad 4

Majme výroky	A : 7 je deliteľné tromi.	$ph(A) = 0$
	B : 8 je párne číslo.	$ph(B) = 1$
	C : $\sqrt{0}$ je celé číslo.	$ph(C) = 1$

!!párne čísla. 0

Sú niektoré z výrokov A, B, C ekvivalentné?

Atomický (atomárny) výrok = elementárny výrok

Zložené výroky

- vzniknú spojením atomických výrokov prostredníctvom **logických spojok**

- základné logické spojky: **unárne** a **binárne**

Definícia 1.10. Ak A, B sú výroky, tak

negáciou výroku A nazývame výrok „Nie je pravda, že A “ a označujeme ho $\bar{A}$;

konjunkciou výrokov A, B nazývame výrok „ A a B “ a označujeme ho $A \wedge B$;

disjunkciou výrokov A, B nazývame výrok „ A alebo B “ a označujeme ho $A \vee B$;

ekvivalenciou výrokov A, B nazývame výrok „ A vtedy a len vtedy, keď B “ a označujeme ho $A \Leftrightarrow B$;

implikáciou výrokov A, B nazývame výrok „Ak A , potom B “ a označujeme ho $A \Rightarrow B$.

- Znaky negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie, t.j. znaky $\bar{}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ a im zodpovedajúce slovné spojenia nazývame **logické spojky** alebo **funktory**.

Pravdivostné hodnoty zložených výrokov

Tabuľky pravdivostných hodnôt

A	B	$\bar{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

3.2 Kvantifikované výroky

Príklad 5 V každom z uvedených prípadov rozhodnite, či ide o výrok. Ak áno, aká je jeho ph?

A: $2 = 3$	C: $x = y$
B: $x = 3$	D: $1/x = 11$

Definícia

- Výraz, ktorý obsahuje jednu alebo viac premenných, a z ktorého po dosadení prípustných hodnôt za premenné vznikne výrok, sa nazýva **výroková forma**.
- **Definičný obor výrokovej formy** je množina k-tic (t.j. k-rozmerných vektorov) prípustných hodnôt

Príklad 6 V predchádzajúcom príklade:

$B(x)$ má množinu prípustných hodnôt $\mathbb{R}$

$C(x,y)$ má množinu prípustných hodnôt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$D(x)$ má množinu prípustných hodnôt $\mathbb{R}/\{0\}$

Množina všetkých k-tic z definičného oboru D výrokovej formy, pre ktoré je „vzniknutý“ výrok pravdivý, sa nazýva **obor pravdivosti výrokovej formy**.

Príklad 7 V predchádzajúcom príklade:

$B(x)$ má obor pravdivosti

$C(x,y)$ má obor pravdivosti

$D(x)$ má obor pravdivosti

- Aj výrokové formy môžeme spájať pomocou logických spojok a tak vytvárať nové výrokové formy.



Z výrokovej formy sa dá vytvoriť výrok aj iným spôsobom, než iba dosadením hodnôt za premenné. Môžeme vytvoriť výrok, v ktorom sa hovorí o **počte** prvkov. Takéto výroky nazývame **kvantifikované výroky**. Sú to formulácie typu:

- Existuje (aspoň jedno) x , že ...
- Existujú aspoň štyri také z , že ...
- Pre všetky t (platí)...

Poznáme

- 1) **Existenčný** (malý) **kvantifikátor**, ktorý sa označuje symbolom $\exists$.

- Výrok $\exists x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 5$ čítame:

ph tohto výroku je

- Výrok $\exists ! x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 5$ čítame:

ph je

2) **Všeobecný** (univerzálny, veľký) **kvantifikátor**, ktorý označujeme $\forall$.

- Výrok $\forall x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 5$ čítame:

ph je

Negácia kvantifikovaného výroku

Nech $A(x)$ je **výroková forma** definovaná na množine D . Negáciou výroku

$$\exists x \in D: A(x)$$

je výrok

„Nie je pravda, že existuje $x \in D$, pre ktoré platí $A(x)$.“

„Neexistuje $x \in D$, pre ktoré platí $A(x)$.“

„Pre všetky $x \in D$ platí negácia $A(x)$.“

čo môžeme zapísať takto:

$$\forall x \in D: \bar{A}(x)$$

Podobnými úvahami by sme utvorili aj negácie ďalších typov kvantifikovaných výrokov.

Metóda:

Negáciu výroku, ktorý obsahuje niekoľko malých a/alebo veľkých kvantifikátorov, získame tak, že každý malý kvantifikátor zmeníme na veľký, veľký kvantifikátor zmeníme na malý a výrokovú formu negujeme.

Príklad 1.18 – skriptá, riešený

3.3 Výrokové formuly

Definícia 1.13. Nech je abeceda

$$X = \{ \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,), p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, \dots \}.$$

Formula výrokového počtu (výroková formula, formula) je každé **slovo** nad abecedou X , ktoré vzniklo podľa pravidiel:

- (1) Každá výroková premenná je formula.
- (2) Ak a, b sú formuly, tak
$$\neg a, (a \wedge b), (a \vee b), (a \Rightarrow b), (a \Leftrightarrow b)$$
sú formuly.
- (3) Žiadne iné slová nie sú formuly.

Príklad 8 Príklady slov, ktoré nie sú formulami.

Príklad 1.19 - skriptá Príklady formúl a ich generovanie.