

# Predmet LOGICKÉ SYSTÉMY

---

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/LogickeSystemy/ParalelkaB>

- Časová dotácia 4+1
- Obsah predmetu
- Požiadavky na získanie zápočtu
- 3 zápočtové písomky po 10 bodov, najbližšia pravdepodobne v pondelok 28.10. počas prednášky
- Hodnotenie na skúške
- **!!! Cvičenia z utorka 24.9. (zajtra) presúvam na utorok 1.10. (o týždeň) podľa kľúča, ktorý bude aj na stránke predmetu. Bude sa to týkať týchto krúžkov:**

**TL5+TL6 budú mať cvičenie o 9,00 v B 704**

**TL2+TL7 budú mať cvičenie o 11,00 v B 704**

# 1 Úvodné pojmy

---

$N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$  - množina prirodzených čísel, t.j. takých, ktoré sú počtom prvkov nejakej množiny

$N^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\},$

$Z$  – množina všetkých celých čísel,

$Q$ - množina všetkých racionálnych čísel,

$R$  – množina všetkých reálnych čísel,

$R^+$  – množina všetkých kladných reálnych čísel.

**Definícia 1.3.** **Karteziánskym súčinom** množín  $A, B$  nazývame množinu

$$A \times B = \{(a,b); a \in A, b \in B\}.$$

## Príklad 1

Karteziánskym súčinom množín  $A = \{1, *\}, B = \{a, x, z\}$  je množina ....

## Príklad 2

Karteziánskym súčinom  $R \times R$  je množina ....

Píšeme tiež  $R^2$ .

## 2 Jazyk nad abecedou

---

### Definícia 1.7.

Neprázdnu množinu  $X$  nazývame **abecedou**.

Prvky množiny  $X$  nazývame **písmenami** (abecedy  $X$ ).

Konečnú postupnosť písmen abecedy  $X$  nazývame **slovom** nad  $X$ .

Počet písmen v slove  $w$  nad abecedou  $X$  nazývame **dĺžkou slova**  $w$  a označujeme ju  $|w|$ .

Množinu všetkých slov nad abecedou  $X$  označujeme  $X^+$ .

Nech  $\Delta \notin X^+$ . Symbol  $\Delta$  nazývame **prázdny slovo nad  $X$**  a priradujeme mu dĺžku nula.

Množinu všetkých slov nad abecedou  $X$  spolu s prázdny slovom označujeme  $X^*$ .

### Príklad 2 (1.8. skriptá)

Nech  $X = \{0, 1\}$ . Napíšeme postupne všetky slová nad abecedou  $X$  dĺžok 1, 2, 3. Koľko ich bude?

Všetkých slov dĺžky  $n$  nad dvojprvkovou abecedou je  $2^n$ .

Na generovanie jazykov používame špeciálne automaty, ktoré sa volajú **AKCEPTORY**.

## 3.1 Výroky

---

**Definícia 1.9.** **Výrok** je oznamovacia veta, ktorá má jednoznačnú a nemennú pravdivostnú hodnotu. Pravdivostná hodnota pravdivého výroku je **1**, pravdivostná hodnota nepravdivého výroku je **0**.

- Na označenie pravdivostnej hodnoty výroku  $A$  budeme používať symbol  $ph(A)$ .
- **Výroky**  $A, B$  sa nazývajú **ekvivalentné**, ak majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

### Príklad 3

|              |                             |          |
|--------------|-----------------------------|----------|
| Majme výroky | $A$ : 7 je deliteľné tromi. | $ph(A)=$ |
|              | $B$ : 8 je párne číslo.     | $ph(B)=$ |

- **!!párne čísla. Aj 0 je párne číslo.**

**Atomický (atomárny) výrok / elementárny výrok**

## Zložené výroky

- vzniknú spojením atomických výrokov prostredníctvom logických spojok.

**Definícia 1.10.** Ak  $A, B$  sú výroky, tak

**negáciou** výroku  $A$  nazývame výrok „Nie je pravda, že  $A$ “ a označujeme ho  $\bar{A}$  ;

**konjunkciou** výrokov  $A, B$  nazývame výrok „ $A$  a  $B$ “ a označujeme ho  $A \wedge B$ ;

**disjunkciou** výrokov  $A, B$  nazývame výrok „ $A$  alebo  $B$ “ a označujeme ho  $A \vee B$ ;

**ekvivalenciou** výrokov  $A, B$  nazývame výrok „ $A$  vtedy a len vtedy, keď  $B$ “ a označujeme ho  $A \Leftrightarrow B$ ;

**implikáciou** výrokov  $A, B$  nazývame výrok „Ak  $A$ , potom  $B$ “ a označujeme ho  $A \Rightarrow B$ .

- Znaky negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie, t.j. znaky  $\bar{\phantom{A}}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  a im zodpovedajúce slovné spojenia nazývame **logické spojky** alebo **funktory**.

## Súvis medzi $\text{ph}(A)$ , $\text{ph}(B)$ a pravdivosťnými hodnotami výrokov $\bar{A}$ , $A \wedge B$ , $A \vee B$ , $A \Rightarrow B$ , $A \Leftrightarrow B$ .

Tabuľky pravdivostných hodnôt

| <b>A</b> | <b>B</b> | <b><math>\bar{A}</math></b> | <b><math>A \wedge B</math></b> | <b><math>A \vee B</math></b> | <b><math>A \Rightarrow B</math></b> | <b><math>A \Leftrightarrow B</math></b> |
|----------|----------|-----------------------------|--------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------|
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>1</b>                    | <b>0</b>                       | <b>0</b>                     | <b>1</b>                            | <b>1</b>                                |
| <b>0</b> | <b>1</b> | <b>1</b>                    | <b>0</b>                       | <b>1</b>                     | <b>1</b>                            | <b>0</b>                                |
| <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b>                    | <b>0</b>                       | <b>1</b>                     | <b>0</b>                            | <b>0</b>                                |
| <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b>                    | <b>1</b>                       | <b>1</b>                     | <b>1</b>                            | <b>1</b>                                |

## 3.2 Kvantifikované výroky.

### Príklad 4

V každom z uvedených prípadov rozhodnite, či ide o výrok. Ak áno, aká je jeho ph?

|            |               |
|------------|---------------|
| A: $2 = 3$ | C: $x = y$    |
| B: $x = 3$ | D: $1/x = 11$ |

Výraz, ktorý obsahuje jednu alebo viac premenných, a z ktorého po dosadení prípustných hodnôt za premenné vznikne výrok, sa nazýva **výroková forma**.

Výroková forma sa stane pravdivou alebo nepravdivou až po dosadení konkrétneho čísla za  $x$ . Až potom sa z nej stane výrok.

- **Definičný obor výrokovej formy** je množina  $k$ -tic ( $k$ -rozmerných vektorov) prípustných hodnôt.

### Príklad 5

V predchádzajúcom príklade:

$B(x)$  má množinu prípustných hodnôt .....  $\mathbb{R}$

$C(x,y)$  má množinu prípustných hodnôt .....  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$D(x)$  má množinu prípustných hodnôt .....  $\mathbb{R}/\{0\}$

Množina všetkých k-tíc z definičného oboru  $D$  výrokovej formy, pre ktoré je „vzniknutý“ výrok pravdivý, sa nazýva **obor pravdivosti výrokovej formy**.

### Príklad 6

V predchádzajúcom príklade:

$B(x)$  má obor pravdivosti .....

$C(x,y)$  má obor pravdivosti .....

$D(x)$  má obor pravdivosti .....

- Takisto ako výroky, aj výrokové formy môžeme spájať pomocou logických spojok a tak vytvárať nové výrokové formy.



Z výrokovej formy sa dá vytvoriť výrok aj iným spôsobom, než iba dosadením hodnôt za premenné. Môžeme vytvoriť výrok, v ktorom sa hovorí o **počte** prvkov. Takéto výroky nazývame **kvantifikované výroky**. Sú to ormlácie typu:

- Existuje (aspoň jedno)  $x$ , že ...
- Existujú aspoň štyri také  $x$ , že ...
- Pre všetky  $x$  (platí)...

Poznáme

- 1) **Existenčný** (malý) **kvantifikátor**, ktorý sa označuje symbolom  $\exists$  (otočené E).

$$\exists x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 5$$

čítame: ..... , ph je .....

$$\exists ! x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 5$$

čítame: ..... , ph je .....

- 2) **Všeobecný** (univerzálny, veľký) **kvantifikátor**, ktorý označujeme  $\forall$  (otočené písmeno A).

$$\forall x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 5$$

čítame: ..... , ph je .....

➤ Ako čítame výroky s viacerými kvantifikátormi?

napr.  $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{N} : x - 2 \leq y$

## Negácia kvantifikovaného výroku

Venujme sa teraz tomu, ako tvoriť negácie kvantifikovaných výrokov.

Nech  $A(x)$  je **výroková forma** definovaná na množine  $D$ . Negáciou výroku

$$\exists x \in D: A(x)$$

je výrok

„Nie je pravda, že existuje  $x \in D$ , pre ktoré platí  $A(x)$ .“

To je však to isté ako

„Neexistuje  $x \in D$ , pre ktoré platí  $A(x)$ .“

a tiež ako

„Pre všetky  $x \in D$  platí negácia  $A(x)$ .“

čo môžeme zapísať takto:

$$\forall x \in D: \bar{A}(x).$$

Podobnými úvahami by sme utvorili aj negácie ďalších typov kvantifikovaných výrokov.

### Metóda:

Negáciu výroku, ktorý obsahuje niekoľko malých a/alebo veľkých kvantifikátorov, získame tak, že každý malý kvantifikátor zmeníme na veľký, veľký kvantifikátor zmeníme na malý a výrokovú formu negujeme.

## 3.3 Výrokové formuly

---

**Definícia 1.13.** **Formula** výrokového počtu (skrátene výroková formula alebo formula) je každé **slovo** nad abecedou  $X$ , pričom

$$X = \{ \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (, ), p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, \dots \},$$

ktoré vzniklo podľa pravidiel:

- (1) Každá výroková premenná je formula.
- (2) Ak  $a, b$  sú formuly, tak  
 $a, (a \wedge b), (a \vee b), (a \Rightarrow b), (a \Leftrightarrow b)$  sú formuly.
- (3) Žiadne iné slová nie sú formuly.

### Príklad 6

Príklady slov, ktoré nie sú formulami.

Príklady formúl a ich generovanie – el.skriptá, Príklad 1.19.

koniec prednášky 1

---

### Definícia 1.18.

Formula sa nazýva

- **tautológia**, ak jej pravdivostným ohodnotením je konštantná funkcia s hodnotou 1;
- **kontradikcia**, ak jej pravdivostným ohodnotením je konštantná funkcia s hodnotou 0;
- **splniteľná**, ak nie je kontradikciou.