LINEÁRNA ALGEBRA 2

Michal Zajac

Základom pre tieto prednášky je kniha Carl D. Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Na ňu sa budú vzťahovať odkazy (napr. príklad 5.1.12 znamená príklad 5.1.12 na str. 278 tejto knihy).

1. Norma, Vnútorný súčin, ortogonálnosť

Najprv pripomeňme, že pre vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$ je ich veľkosť

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$$

a ich skalárny súčin je

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x \mid y) = \|x\|\|y\| \cos\alpha = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\,, \quad \alpha = \sphericalangle xy \text{ je uhol vektorov } x, y\,.$$

V LA1 sme odvodili pomocou vlastností skalárneho súčinu (bez využitia geometrickej interpretácie skalárneho súčinu) vzorec na výpočet kolmého priemetu vektora $\mathbf{u}$ do smeru vektora $\mathbf{v}$:

Vektor $\mathbf{u}$ rozložíme na súčet $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $\mathbf{u}_1 = t\mathbf{v} \parallel \mathbf{v}$, pre nejaké $t \in R$, $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} = t\mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \implies \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (t\mathbf{v} + \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} = t\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v} = t\|v\|^2 \implies t = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|v\|^2}\,.$$

Odtiaľ dostaneme

$$\operatorname{Proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|v\|^2}\mathbf{v}\,, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1\,.$$

Pojem veľkosť vektora, skalárny súčin, kolmosť a ortogonálny priemet sa dá zovšeobecniť na viacrozmerné lineárne priestory. Najprv v lineárnom priestore $(L, +, \cdot)$ zavedieme tieto pojmy

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$ je (reálny alebo komplexný) lineárny priestor. Zobrazenie $\|\cdot\|\colon L \to R$ sa nazýva norma, ak pre $\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$ platí

(N1) $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$ pre $\forall$ čísla α.
(N2) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (trojuholníková nerovnosť)
(N3) $\|\mathbf{u}\| \ge 0, \quad \|\mathbf{u}\| = 0 \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (nulový vektor).

Príkladom normy je Euklidovská norma na R^n (C^n):

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}\,.$$

Dôkaz vlastností (N1) a (N3) je ľahký, trojuholníková nerovnosť je dôsledkom CBS nerovnosti, ktorú uvedieme a dokážeme neskôr.

Príklad. Ukážte, že v priestore C^n sú normami nasledujúce funkcie:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\,, \qquad \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}\,.$$

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$ je reálny lineárny priestor. Zobrazenie $(\cdot \mid \cdot)\colon L \times L \to R$ sa nazýva vnútorný súčin, ak pre $\forall\ u, v, w \in L$, $\alpha \in R$ platí:

(IP1) $(u \mid v) = (v \mid u)$,
(IP2) $(u + v \mid w) = (u \mid w) + (v \mid w)$,
(IP3) $(\alpha u \mid v) = \alpha(u \mid v)$,
(IP4) $(u, u) \ge 0, \quad (u, u) = 0 \implies u = 0$

Pre komplexné lineárne priestory:

Definícia. Nech $(L,+,\cdot)$ je komplexný lineárny priestor. Zobrazenie $(\cdot \mid \cdot)\colon L\times L\to C$ sa nazýva vnútorný súčin, ak pre $\forall\, u,v,w\in L$, $\alpha\in C$ platí:
(IP1) $(u\mid v)=\overline{(v\mid u)}$,
(IP2) $(u+v\mid w)=(u\mid w)+(v\mid w)$,
(IP3) $(\alpha u\mid v)=\alpha(u\mid v)$,
(IP4) $(u\mid u)\ge 0, \quad (u\mid u)=0 \implies u=0$

Poznámka.
1. $(u\mid \alpha v)=\overline{\alpha}(u\mid v)$ a $(u\mid v)=\overline{(v\mid u)}$ ($\overline{\alpha}$ je číslo komplexne združené k α).
2. Vnútorný súčin sa nazýva aj skalárny súčin.
3. V knihe C.D. Meyera sa (neobvykle) v komplexnom lineárnom priestore definuje vnútorný súčin inak; vlastnosť (IP3) je tam zamenená za $(\alpha u\mid v)=\overline{\alpha}(u\mid v)$,
4. Iné obvyklé označenia pre vnútorný súčin sú (u,v), $\langle u,v\rangle$ $u\cdot v$.
5. Z (IP3) ľahko dostaneme tvrdenie: ak je vektor u alebo v nulový, tak $(u\mid v)=0$.

Príklad. V priestore R^n je vnútorným súčinom napr.

$$(x\mid y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\,,\quad \forall\, x,y\in R^n\,;\ x=(x_1,x_2,\dots x_n), y=(y_1,y_2,\dots y_n)\,.$$

V C^n

$$(x\mid y)=x_1\overline{y}_1+x_2\overline{y}_2+\cdots+x_n\overline{y}_n\,,\quad \forall\, x,y\in C^n\,;\ x=(x_1,x_2,\dots x_n), y=(y_1,y_2,\dots y_n)\,.$$

Príklad. Nech $a<b$ sú reálne čísla. V priestore $C(a,b)$ všetkých spojitých funkcií $f\colon \langle a,b\rangle\to R$ je skalárnym súčinom napr.

$$(f\mid g)=\int_a^b f(t)g(t)\,dt\,.$$

CBS nerovnosť. *Nech $(V,+,\cdot)$ je komplexný lineárny priestor so skalárnym súčinom. Potom*
1. $\forall\, x,y\in V$ *platí* $|(x\mid y)|^2\le (x\mid x)(y\mid y)$
2. $|(x\mid y)|^2=(x\mid x)(y\mid y)$ *vtedy a len vtedy, keď sú x,y lineárne závislé.*

Obvykle píšeme $\sqrt{(x\mid x)}=\|x\|$, potom CBS nerovnosť má tvar $|(x\mid y)|\le \|x\|\cdot\|y\|$.

Dôkaz. Ak je x alebo y nulový vektor, tak na oboch stranách CBS nerovnosti dostaneme nulu a nemáme, čo dokazovať. Predpokladajme teda, že $x\ne 0$, $y\ne 0$. Z vlastností (IP1)–(IP4) dostaneme $\forall\,\alpha\in C$:

$$0\le (x-\alpha y\mid x-\alpha y)=(x\mid x)-(x\mid \alpha y)-(\alpha y\mid x)+(\alpha y\mid \alpha y)=(x\mid x)-\overline{\alpha}(x\mid y)-\alpha(y\mid x)+\alpha\overline{\alpha}(y\mid y)\,.$$

Zvolíme si teraz $\alpha=\frac{(x|y)}{(y|y)}$ a dostaneme:

$$\begin{aligned}0\le (x-\alpha y\mid x-\alpha y)=(x\mid x)-\overline{\frac{(x\mid y)}{(y\mid y)}}(x\mid y)-\frac{(x\mid y)}{(y\mid y)}(y\mid x)+\left|\frac{(x\mid y)}{(y\mid y)}\right|^2(y\mid y)\\ =(x\mid x)-\frac{|(x\mid y)|^2}{(y\mid y)}-\frac{|(x\mid y)|^2}{(y\mid y)}+\frac{|(x\mid y)|^2}{(y\mid y)}=(x\mid x)-\frac{|(x\mid y)|^2}{(y\mid y)}\end{aligned}$$

Teda $0\le (x\mid x)-\frac{|(x|y)|^2}{(y|y)}$ a odtiaľ vynásobením nerovnosti kladným číslom $(y\mid y)>0$ dostaneme:

$$0\le (x\mid x)(y\mid y)-|(x\mid y)|^2 \implies |(x\mid y)|^2\le (x\mid x)(y\mid y)\,.$$

Pritom rovnosť podľa (IP4) platí iba vtedy, keď $x-\alpha y=0$, teda, keď $x=\alpha y$, čím je aj druhá časť vety dokázaná.

Dôsledok. *Ak $(x\mid y)$ je skalárny súčin, tak $\|x\|=\sqrt{(x\mid x)}$ je norma.*

Dôkaz. Dokážeme len trojuholníkovú nerovnosť. Z vlastností (IP1)–(IP4) a (CBS) nerovnosti vyplýva:

$$(x+y\mid x+y)=|(x\mid x)+(x\mid y)+(y\mid x)+(y\mid y)|\le (x\mid x)+2|(x\mid y)|+|(y\mid y)|\le \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\,.$$

Teda $\|x+y\|^2\le (\|x\|+\|y\|)^2$ a po odmocnení $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$.

Poznámka. V prípade reálneho priestoru so skalárnym súčinom dostanem pre nenulové vektory x,y: $-1\le \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}\le 1$. Existuje teda jediný uhol $\alpha\in\langle 0,\pi\rangle$, pre ktorý je $\cos\alpha=\frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}$. Aj v tomto abstraktnom prípade sa α nazýva *uhol vektorov x,y*.

Aj v komplexnom prípade definujeme:

Definícia. Prvky x, y lineárneho priestoru s vnútorným súčinom $(x \mid y)$ sa nazývajú *ortogonálne* (kolmé), ak platí $(x \mid y) = 0$ (stručne $x \perp y \iff (x \mid y) = 0$).

Príklady a cvičenia.
1. Odporúčam vyriešiť príklady 5.1.1, 5.1.2, 5.1.5, 5.1.8, 5.1.12, 5.1.13, 5.3.1, 5.3.2.
2. Dokážte, že pre $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ platí:

$$1 < p < q < \infty \implies \|x\|_q = (|x_1|^q + |x_2|^q + |x_3|^q)^{1/q} \le (|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p)^{1/p}.$$

Návod. Ukážte:
a. Pretože $\|\alpha x\|_r = |\alpha|\|x\|_r$ pre každé $x \in R^3$, $\alpha \in R$ a $1 < r < \infty$ môžeme predpokladať $\|x\|_q = 1$.
b. Potom stačí dokázať, že $\|x\|_q = 1 \implies 1 \le |x_1|^p + x_2^p + x_3^p$.

Ortogonálne množiny.

Najprv zavedieme označenie (Kroneckerov symbol): $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ak } i \ne j, \\ 1, & \text{ak } i = j \end{cases}$, $i, j \in Z$.

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$ je lineárny priestor s vnútorným súčinom $(x \mid y)$. Množina $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset L$ sa nazýva
1. *ortogonálna*, ak $i \ne j \implies (u_i \mid u_j) = 0$, $(u_i \mid u_i) \ne 0$ $(\forall i, j = 1, 2, \dots, n)$.
2. *ortonormálna*, ak $(u_i \mid u_j) = \delta_{ij}$ $(\forall i, j = 1, 2, \dots, n)$.
3. Nekonečná množina $M \subset L$ sa nazýva ortogonálna (ortonormálna), ak je ortogonálna (ortonormálna) každá konečná podmnožina $M_1 \subset M$.

Príklad. Ukážte, že
1. Štandardná báza v R^n (C^n) je ortonormálna množina.
2. Dokážte, že každá ortogonálna množina je lineárne nezávislá.

Definícia. Ortonormálna (ortogonálna) množina $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, ktorá je súčasne bázou priestoru $(L, +, \cdot)$ sa nazýva *ortonormálna báza* (ortogonálna báza).

Veta. *Nech $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ je ortonormálna báza lineárneho priestoru $(L, +, \cdot)$ s vnútorným súčinom $(x \mid y)$. Potom pre $\forall x \in L$ platí:*

$$x = (x \mid u_1)u_1 + (x \mid u_2)u_2 + \cdots + (x \mid u_n)u_n = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k)u_k. \tag{1}$$

Dôkaz. Ak $[x]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^\top$ sú súradnice vektora x vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$, tak

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \text{ a odtiaľ dostaneme } (x \mid u_m) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (u_k \mid u_m) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{km} = \alpha_m, \quad \forall m = 1, 2, \dots, n.$$

Poznámka. Vzťah (1) sa nazýva Fourierov rozvoj prvku x vzhľadom na ortonormálnu bázu $\mathcal{B}$.

Príklad. Dokážte, že platia nasledujúce tvrdenia
a) Ak $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset l$ je ortonormálna množina, tak

$$x \in L \implies \|x\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 \quad \text{(Besselova nerovnosť)}.$$

a) Ak $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset L$ je ortonormálna báza, tak

$$x \in L \implies \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 \quad \text{(Parsevalova rovnosť)}.$$

Príklad.
1. Ukážte, že $\mathcal{B}' = \{u_1', u_2', u_3',\ u_1' = (1, -1, 0),\ u_2' = (1, 1, 1),\ u_3' = (-1, -1, 2)$ je ortogonálna báza euklidovského priestoru R^3 a nájdite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ tak, aby $\mathcal{B} = \{\alpha_1 u_1', \alpha_2 u_2', \alpha_3 u_3'\}$ bola ortonormálna báza.
2. Nájdite Fourierov rozvoj prvku $x = (1, 2, 3)$ vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$.

Príklad. Ukážte, že

$$\mathcal{F}' = \{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\} = \{1\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\cos kt, \sin kt\}$$

je ortogonálna množina v priestore $L_1(-\pi,\pi)$ všetkých integrovateľných funkcií $f\colon \langle -\pi,\pi\rangle$ s vnútorným súčinom $(f \mid g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$ a že

$$\mathcal{F} = \Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, \dots \Big\}$$

je ortonormálna množina v $L_1(-\pi,\pi)$

Definícia. Nech $f \in L_1(-\pi,\pi)$. Rozvoj funkcie f podľa ortonormálnej množiny $\mathcal{F}$ sa nazýva *Fourierov rad funkcie* f. Má tvar:

$$f(t) \sim a_0' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k' \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} + b_k' \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt\,,$$

pričom podobne ako v konečnorozmernom prípade platí

$$a_0' = \Big(f \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big),\ a_k' = \Big(f \mid \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\Big),\ b_k' = \Big(f \mid \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\Big).$$

Odtiaľ dostaneme

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\,,\ k = 0,1,2,\dots \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\,,\ k = 1,2,3,\dots$$

Definícia. Nech $(L,+,\cdot)$ je nekonečnorozmerný LP s vnútorným súčinom $(u \mid v)$. Ortonormálna množina $\mathcal{B} = (u_0, u_1, u_2, \dots\}$ sa nazýva ortonormálna báza, ak platí implikácia $\forall\, n = 0,1,2,\dots (u \mid u_n) = 0 \implies u = 0$.

Aj pre nekonečnú ortonormálnu množinu platí Besselova nerovnosť a pre ortonormálnu bázu aj Parsevalova rovnosť. Najprv pripomenieme, že v lineárnom priestore s normou $\|x\|$ postupnosť $\{x_n\}$ má limitu $\lim x_n = x$ práve vtedy keď $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$.

Veta. *Ak $\mathcal{B} = \{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ortonormálna báza LP $(L,+,\cdot)$, tak pre všetky $x \in L$ platí*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} (x \mid u_k) u_k \quad , \text{ t.j.} \qquad \lim_{n\to\infty} \Big\| x - \sum_{k=0}^{n} (x \mid u_k) u_k \Big\| = 0\,.$$

Dôkaz. Dokážeme len Besselovu nerovnosť, dá sa ukázať, že veta je jej dôsledkom. Z ortonormálnosti $\mathcal{B}$ dostaneme

$$0 \le \Big(x - \sum_{k=0}^{n} (x \mid u_k) u_k \mid x - \sum_{k=0}^{n} (x \mid u_k) u_k \Big) = (x \mid x) - \sum_{k=0}^{n} |(x \mid u_k)|^2 \implies \sum_{k=0}^{n} |(x \mid u_k)|^2 \le \|x\|^2\,.$$

Odtiľ vyplýva, že $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |(x \mid u_k)|^2$ je konvergentný rad a tiež Besselova nerovnosť:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(x \mid u_k)|^2 \le \|x\|^2\,.$$

Poznamenajme, že sme využili len to, že $\mathcal{B}$ je ortonormálna množina, teda Besselova nerovnosť platí aj bez predpokladu $\forall\, n\, (x \mid u_n) = 0 \implies x = 0$.

Príklady. 5.4.1, 5.4.3, 5.4.4, 5.4.13, 5.4.14, 5.4.20

Gramm-Schmidtov ortogonalizačný proces.

Ak $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je lineárne nezávislá množina, tak sa (pomocou algoritmu, ktorý sa nazýva Gramm-Schmidtov ortogonalizačný proces) dá skonštruovať ortonormálna množina $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ s vlastnossofttou

$$\operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots x_k\} = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots u_k\} \quad \text{pre všetky } k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

1. $u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$ ($\operatorname{span}\{x_1\} = \operatorname{span}\{u_1\}$ je zrejmé).

2. Vektor x_2 rozložíme na zložku $v_2 = \alpha u_1$ rovnobežnú s vektorom u_1 a zložku y_2 kolmú na u_1: x_2 y_2

$$x_2 = \alpha u_1 + y_2 \implies (x_2 \mid u_1) = \alpha (u_1 \mid u_1) + (y_2 \mid u_1) = \alpha\,.$$ $v_2 = \alpha\, u_1$

   Teda dostaneme $y_2 = x_2 - \alpha u_1 = x_2 - (x_2 \mid u_1) u_1 \neq 0$ pretože $x_2 \notin \operatorname{span}\{x_1\} = \operatorname{span}\{u_1\}$. Stačí teraz zobrať $u_2 = \frac{1}{\|y_2\|} y_2$. Zrejme $x_2 = y_2 + \alpha u_1 \in \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ a preto platí
   $\{u_1, u_2\}$ je ortonormálna množina a $\operatorname{span}\{u_1, u_2\} = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$.
3. Ak sme pre $m < n$ skonštruovali ortonormálnu množinu $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, pre ktorú platí $\operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ pre $\forall\, k = 1, 2, \ldots, m$, tak skonštruujeme u_{m+1} podobne, t.j. x_{m+1} rozložíme na zložku $v_{m+1} \in \operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ a zložku y_{m+1} kolmú na $\operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$:
   $y_{m+1} = x_{m+1} - (x_{m+1} \mid u_1) u_1 - (x_{m+1} \mid u_2) u_2 - \cdots - (x_{m+1} \mid u_m) u_m$ a definujeme $u_{m+1} = \frac{1}{\|y_{m+1}\|} y_{m+1}$.

Príklad. Gramm-Schmidtov proces aplikujte na $x_1, x_2, x_3 \in R^4$,

a. $x_1 = (1, 0, 0, -1)$, $x_2 = (1, 2, 0, -1)$, $x_3 = (3, 1, 1, -1)$.

b. $x_1 = (0, 0, 1, -1)$, $x_2 = (0, 1, 0, -1)$, $x_3 = (1, 0, 1, -1)$.

Príklad. Gramm-Schmidtov proces aplikujte na $x_0(t) = 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$ v $C(0,1)$ so skalárnym súčinom $(x \mid y) = \int_0^1 x(t) y(t)\, dt$.

Ortogonálne a unitárne matice.

Najprv si pripomenieme, že ak $A \in C^{m \times n}$, tak A^* označuje maticu, ktorá vznikne z matice $A^\top$ nahradením všetkých jej prvkov komplexne združenými číslami.

Definícia. Matica $U \in C^{n \times n}$ sa nazýva *unitárna*, ak $U^* U = I$ (I je jednotková matica).
$P \in R^{n \times n}$ nazýva *ortogonálna*, ak $P^* P = I$.

Zrejme ortogonálna matica sa dá považovať za špeciálny prípad unitárnej matice.

Najprv ukážeme, že unitárnou (ortogonálnou) maticou je euklidovskom priestore C^n (R^n) daný lineárny operátor, ktorý zachováva vnútorný súčin, teda veľkosť vektorov aj uhly vektorov.

$$u, v \in C^{n \times 1} \implies (Uu \mid Uv) = (Uv)^* Uu = v^* U^* U u = v^* (U^* U) u = v^* I u = v^* u = (u \mid v)\,.$$

Pre unitárne matice platí:

Veta. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*
1. $U \in C^{n \times n}$ *je unitárna matica.*
2. U *má ortonormálne stĺpce.*
3. U *má ortonormálne riadky.*
4. $U^{-1} = U^*$.
5. $\|Ux\| = \|x\|$ *pre* $\forall\, x \in C^{n \times 1}$

Na dôkaz najprv ukážeme, že z tvrdenia 5 vyplýva $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ pre všetky $x, y \in C^{n \times 1}$. Na to si stačí uvedomiť, že $\|u\|^2 = (u \mid u)$ a overiť rovnosť:

$$(u \mid v) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i \|ix + y\|^2 + i \|ix - y\|^2) \quad \forall\, u, v \in C^{n \times 1}\,.$$

Potom pre prvky e_i, e_j štandardnej bázy priestoru $C^{n \times 1}$ dostaneme $(U_{*i} \mid U_{*j}) = (Ue_i \mid Ue_j) = (e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$, teda U má ortonormálne stĺpce.

Analogicky pre ortogonálne matice:

Veta. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*
1. $P \in R^{n\times n}$ *je ortogon'alna matica.*
2. P *má ortonormálne stĺpce.*
3. P *má ortonormálne riadky.*
4. $P^{-1} = P^\top$.
5. $\|Px\| = \|x\|$ *pre* $\forall\, x \in P^{n\times 1}$

Dôkaz je skoro rovnaký, využijeme zrejmú rovnosť: $4(x \mid y) = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ pre $\forall\, x, y \in R^{n\times 1}$.

Matice ktoré spĺňajú vlastnosť 5. sa nazývajú *izometrie* (presnejšie $x \mapsto Ax$ je izometrický lineárny operátor).

Príklad.
1. Z kapitoly 5.6 (str. 335,336): 5.6.1, 5.6.2, 5.6.3, 5.6.4, 5.6.5
2. Akú hodnotu môže mať determinant oprtogonálnej matice?

Vlastné čísla a vlastné vektory

Pripomeňme najprv, že lineárny operátor $T\colon L \to L$ je vzhľadom na bázu $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ lineárneho priestoru L určený maticou $A = [T]_\mathcal{B}$, ktorej stĺpce sú: $A_{*1} = [Tb_1]_\mathcal{B}$, $A_{*2} = [Tb_2]_\mathcal{B}$, … ,$A_{*n} = [Tb_n]_\mathcal{B}$ (súradnice prvku Tb_n vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$). Nasledujúci príklad ukazuje, že vhodnou voľbou bázy sa dá matica lineárneho operátora zjednodušiť.

Príklad. Nech lineárny operátor $T\colon R^2 \to R^2$ má vzhľadom na štandardnú bázu maticu $A = [T]_S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Nájdime jeho maticu vzhľadom na bázu $\mathcal{B} = \{b_1 = (1.4)^\top,\ b_2 = (1, -1)^\top\}$:

$$\left.\begin{array}{l} Tb_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} = 3b_1 \qquad \Longrightarrow [Tb_1]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Tb_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2b_2 \Longrightarrow [Tb_2]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow [T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matica $[T]_\mathcal{B}$ je „jednoduchšia" ako $[T]_S$ b_1, b_2 sú vlastné vektory operátora T:

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$ je lineárny priestor, $T\colon L \to L$ lineárny operátor. Nenulový vektor $u \in L$ sa nazýva *vlastný vektor* operátora T patriaci k *vlastnému číslu* $\lambda \in C$, ak $Tu = \lambda u$.

Ak $I\colon L \to L$, $Ix = x$ pre $\forall\, x \in L$, tak $Tu = \lambda u \iff (T - \lambda I)u = 0$, t.j. λ je vlastné číslo operátora T, ak existuje nenulový prvok z $\ker(T - \lambda I)$. V konečnorozmernom priestore L je T určené maticou A a môžeme to napísať v maticovom zápise, $\det(A - \lambda I) = 0$. Teda nájsť vlastné čísla znamená nájsť korene polynómu $\det(A - \lambda I)$. Potom príslušné vlastné vektory sa hľadajú ako nenulové riešenie homogénnej sústavy lineárnych rovníc $(A - \lambda I)u = 0$.

Označenie. Množina všetkých vlastných čísiel matice $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva *spektrum* matice A a označuje $\sigma(A)$.

Príklad. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice A

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Teraz pripomenieme základné fakty o polynómoch.

Polynómy (mnohočleny).

Definícia. Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ $(\in C)$. Zobrazenie, ktoré každému $x \in R$ $(x \in C)$ priradí číslo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

sa nazýva polynóm nad poľom R (C) s koeficientami $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Ak $a_n \neq 0$, tak sa n nazýva *stupeň* polynómu f; ak $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, tak hovoríme, že f má stupeň $-\infty$. Stupeň polynómu f označujeme $\deg f$.

Veta. *Nech* f, g *sú polynómy. Potom* $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

Veta (o jednoznačnosti koeficientov). *Nech* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^n + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ *sú polynómy nad* R *(*C*),* $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$*. Ak pre* $\forall\, x \in R$ *(*$\forall\, x \in C$*) platí* $f(x) = g(x)$*, tak* $m = n$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\dots$, $a_n = b_n$.

Definícia. Číslo $c \in C$ sa nazýva koreň polynómu f, ak $f(c) = 0$.

Základná veta algebry. *Každý polynóm* f *nad* C*,* $\deg f \geq 1$ *má aspoň jeden koreň* $c \in C$.

Poznamenajme, že polynóm nad R nemusí mať v reálny koreň (napr. $f(x) = x^2 + 1$).
Polynóm stupňa n je jednoznačne určený svojimi koeficientami ($n+1$ čísel). Z nasledujúcej vety vyplýva, že polynóm je určený jednoznačne koeficientom a_n a svojimi koreňmi.

Veta o delení $f(x) : (x - c)$**.** *Nech* f *je polynóm nad* C *a nech* $c \in C$*. Potom zvyšok po delení polynómu* f *polynómom* $(x - c)$ *je* $f(c)$ *(hodnota polynómu* f *v bode* c*).*

Dôsledok. *Ak* c *je koreň polynómu* $f(x)$*, tak sa dá* $f(x) : (x - c)$ *deliť bezo zvyšku.*

Teraz odvodím *Hornerovu schému* (algoritmus na delenie polynómu $f(x)$ polynómom $(x - c)$ a výpočet hodnoty $f(c)$). Kvôli jednoduchosti zoberme $\deg f = 3$, podiel $f(x) : (x - c)$ je polynóm stupňa 2 a zvyšok je číslo $f(c)$ (pre $\deg f > 3$ by to bolo podobné):

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - c)(b_2x^2 + b_1x + b_0) + f(c)\,,\ a_3 \neq 0\,.$$

Vynásobením na pravej strane dotaneme:

$$\begin{aligned} f(x) =& a_3x^3 + a_2x^2 \ + a_1x \ + a_0 \\ =& b_2x^3 + b_1x^2 \ + b_0x \\ & \quad - cb_2x^2 - cb_1x - cb_0 + f(c) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} b_2 &= a_3 \\ b_1 - cb_2 &= a_2 \\ b_0 - cb_1 &= a_1 \\ f(c) - cb_0 &= b_0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} b_2 &= a_3 \\ b_1 &= a_2 + cb_2 \\ b_0 &= a_1 + cb_1 \\ f(c) &= cb_0 + b_0 \end{aligned}$$

Tieto výpočty zapíšeme do tabuľky (Hornerovej schémy):

$$\begin{array}{c|cccc} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & & cb_2 & cb_1 & cb_0 \\ \hline c & b_2 & b_1 & b_0 & \boxed{f(c)} \end{array}$$

Príklad. Pomocou Hornerovej schémy vypočítajme $f(x) = 2x^4 + x^2 - x + 1 : (x - 1)$ a hodnotu $f(1)$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & & 2 & 2 & -3 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & \boxed{3} \end{array}$$

Dostali sme $2x^4 + x^2 - x + 1 = (x - 1)(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) + 3$, $f(1) = 3$.

Definícia. Polynóm f nad R (nad C) stpňa aspoň 1 sa nazýva ireducibilný, ak neexistujú polynómy f_1, f_2, $\deg f_1 \geq 1$, $\deg f_2 \geq 1$ také, že $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ (f sa nedá napísať ako súčin dvoch nekonštantných polynómov).

Zo základnej vety algebry vyplýva, že polynóm f nad C je ireducibilný len ak $\deg f = 1$. Z nasledujúcej vety vyplýva, že že polynóm f nad R môže byť ireducibilný len ak $\deg f = 1$ alebo $\deg f = 2$ (na dôkaz si stačí uvedomiť, že $f(c) = 0 \implies \overline{f(c)} = f(\overline{c}) = 0$ a že $[x-(a+ib)][x-(a-ib)] = (x-a)^2+b^2 = x^2-2ax+a^2+b^2$ je polynóm nad R).

Veta. *Nech* $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ *a nech je* $c = a + ib$ *(*$a, b \in R$*) koreňom polynómu* $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$*. Potom aj komplexne združené číslo* $\overline{c} = a - ib$ *je koreňom polynómu* $f(x)$*.*

Vidno, že každý polynóm $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \in N$ sa dá rozložiť na súčin ireducibilných polynómov:

a) nad C:
$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^k_2 \dots (x - c_m)^{k_m}$, $m \in N$,
$c_1, c_2, \dots, c_m \in C$ sú korene polynómu f, $k_1, k_2, \dots, k_m$ sú ich násobnosti ($k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$).

b) nad R:
$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_\ell)^{k_\ell}(x^2 + p_1x + q_1)^{n_1} \dots (x^2 + p_rx + q_r)^{n_r}$,
$(k_1 + k_2 + \cdots + k_\ell) + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_r) = n$, $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Definícia. Číslo c je koreň násobnosti $k \in N$ polynómu f, ak $f(x) = (x - c)^k g(x)$, g je polynóm, pre ktorý $g(c) \neq 0$.

Všeobecne neexistuje vzorec na výpočet koreňov polynómu f, $\deg f > 4$. Ak má polynóm f celočíselné koeficienty, tak môžeme nájsť všetky jeho racionálne korene (alebo rozhodnúť, že nemá racionálne korene):

Veta. *Nech $a_o, a_1, \dots, a_n \in Z$, $a_n \neq 0$. Nech $p \in Z$, $q \in N$ a zlomok $\frac{p}{q}$ sa nedá krátiť. Ak je $c = \frac{p}{q}$ koreňom polynómu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$, tak je číslo p deliteľom čísla a_0 a číslo q deliteľom a_n.*

Príklad. Nájdite rozklad na irecubilné polynómy nad R a nad C:
a. $f(x) = x^4 + 1$ b. $f(x) = x^6 + 8$ c. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 7x - 6$
d. $f(x) = 2x^7 - 13x^6 + 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 22x + 3$ e. $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 3x - 3$
f. $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 3x - 3$

Maticu $A \in C^{n\times n}$ môžeme dosadzovať do polynómu s komplexnými koeficientami podľa nasledujúcich pravidiel:

$$A^0 = I_n \text{ (jednotková matica)}, \; A^1 = A\,, \; A^{k+1} = AA^k\,.$$

Definícia. Nech matica $A \in C^{n\times n}$.
1. $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ sa nazýva *charakteristický* polynóm matice A.
2. Nenulový polynóm $m_A(\lambda)$ sa nazýva minimálny polynóm matice A, ak
   a. $m_A(A) = 0_{n\times n}$.
   b. Ak p je polynóm, pre ktorý $p(A) = 0_{n\times n}$, tak $m_A(\lambda)$ je deliteľom $p(\lambda)$.

Teda $m_A(\lambda)$ je polynóm najmenšieho stupňa, ktorého hodnota v A je nulová matica.

Veta. *Nech $A \in C^{n\times n}$. Potom*
1. $\lambda \in C$ je vlastné číslo matice A, vtedy a len vtedy, keď je koreňom jej charkateristického polynómu.
2. $\lambda \in C$ je vlastné číslo matice A, vtedy a len vtedy, keď je koreňom jej minimálneho polynómu.
3. (Cayley-Hamiltonova veta) Ak $p(\lambda)$ je charakteristický polynóm matice A, tak $p(A) = 0_{n\times n}$.
4. Minimálny polynóm matice $A \in C^{n\times n}$ je deliteľom jej charakteristického polynómu.

Dôkaz. Tvrdenie 1 sme už dokázali.

2. Ak $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$ je kanonický rozklad minimálneho polynómu matice A, tak

$$0_{n\times n} = m(A) = (A - \lambda_1 I)^{k_1}(A - \lambda_2 I)^{k_2} \cdots (A - \lambda_m I)^{k_m}$$

Pre každé $i = 1, 2, \dots, m$ je polynóm $f(\lambda) = m(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)$ menšieho stupňa ako $m(\lambda)$, preto $B = f(A) \neq 0_{n\times n}$. Teda ak by bola matica $(A - \lambda_i I)$ regulárna, tak by

$$0_{n\times n} = (A - \lambda_i I)B \implies (A - \lambda_i I)^{-1} 0_{n\times n} = B = 0\,.$$

Matica B je ale nenulová, preto neexistuje $(A - \lambda_i I)^{-1}$, teda λ_i je vlastné číslo matice A. Ukázali sme, že každý koreň minimálneho polynómu je vlastné číslo matice A.

Naopak, ak by vlastné číslo μ matice A nebolo koreňom minimálneho polynómu $m(\lambda)$ matice A, tak $m(\lambda) = (\lambda - \mu)g(\lambda) + r$, kde $r = m(\mu)r \neq 0$. Potom by pre vlastný vektor $\mathbf{a}$ patriaci k vlastnému číslu μ platilo

$$m(A)\mathbf{b} = [(A - \mu I)g(A) + rI]\mathbf{b} = g(A)((A - \mu I)\mathbf{b} + r\mathbf{b} = r\mathbf{b} \neq 0_{n\times 1}\,.$$

To je v spore s tým, že $m(A) = 0_{n\times n}$.

Zvyšné dve tvrdenia vety sú zrejmým dôsledkom 2. tvrdenia.

Poznamenajme ešte, že z predchádzajúcej vety vyplýva, že korene minimálneho polynómu a charakteristického polynómu matice A sú tie isté, v minimálnom polynóme môžu mať menšiu násobnosť.

Podobnosť matíc, Jordanov tvar matice.

Teraz sa budeme zaoberať podmienkami, za ktorých matice $A, B \in C^{n\times n}$ sú maticami toho istého lineárneho operátora T (pri rôznych bázach). Presnejšie kedy existujú bázy $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ také, že $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $B = [T]_{\mathcal{D}}$. Pripomeňme, stĺpce matice A sú potom $A_{*k} = [Tb_k]_{\mathcal{B}}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Hlavná otázka bude pri akej báze bude matica $[T]_{\mathcal{B}}$ „najjednoduchšia".

Definícia. Matice $A, B \in C^{n\times n}$ sa nazývajú podobné, ak $\exists$ regulárna matica P, pre ktorú $B = P^{-1}AP$.

Príklad. Daná je matica $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Považujme A za maticu lineárneho operátora $T\colon C^3 \to C^3$ vzhľadom na štandardnú bázu $\mathcal{S}$. Matica A má vlastné čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -3$. Pre túto maticu vieme nájsť bázu $C^{3\times 1}$ pozostávajúcu z jej vlastných vektorov: $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$, $\mathbf{d}_1 = (1, 2, -2)^\top$ ($A\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1$), $\mathbf{d}_2 = (1, 1, 0)^\top$, $\mathbf{d}_3 = (1, 0, 1)^\top$ ($A\mathbf{d}_2 = -3d_2$, $A\mathbf{d}_3 = -3d_3$).

Zoberme $P = (\, \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3 \,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($P_{*1} = \mathbf{d}_1$, $P_{*2} = \mathbf{d}_2$, $P_{*3} = \mathbf{d}_3$), teda $P = [I]_{\mathcal{DS}}$, preto $P^{-1} = [I]_{\mathcal{SD}}$. A ľahko sa presvedčíme, že

$$[T]_{\mathcal{D}} = [I]_{\mathcal{SD}}[T]_{\mathcal{S}}[I]_{\mathcal{DS}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & -9 & -6 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Teda matica operátora T vzhľadom na bázu pozostávajúcu z vlastných čísel operátora T je diagonálna.

Veta. *Matice $A, B \in C^{n\times n}$ sú podobné práve vtedy, keď sú maticami toho istého operátora $T\colon C^n \to C^n$, t.j. keď existujú bázy $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ také, že $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $B = [T]_{\mathcal{D}}$.*

Ako urobiť dôkaz vidieť z predchádzajúceho príkladu: Ak sú matice podobné $A = PBP^{-1}$, tak matica A je vzhľadom na štandardnú bázu maticou toho istého operátora ako matica B vzhľadom na bázu $\{P_{*1}, P_{*2}, \ldots, P_{*n}\}$. Naopak, ak $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $B = [T]_{\mathcal{D}}$, tak pre $P = [I]_{\mathcal{BD}}$ platí $A = P^{-1}BP$.

Vidieť, že na nájdenie bázy, pri ktorej je matica daného operátora jednoduchá je potrebné poznať štruktúru jeho vlastných vektorov. V predchádzajúcom príklade sme našli bázu posoztávajúcu z vlastných vektorov. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sa nám to nepodarí. Má len jedno vlastné číslo a k nemu príslušný vlastný podpriestor je len jednorozmerný.

Definícia. Matica $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva diagonalizovateľná, ak je podobná diagonálnej matici.

Zrejme platí nasledujúce tvrdenie:

Veta. *Matica $A \in C^{n\times n}$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď existuje báza priestoru $C^{n\times 1}$ pozostávajúca z vlastných vektorov matice A.*

Definícia. Nech $A \in C^{n\times n}$. Polynóm $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$sa nazýva charakteristický polynóm matice A.

Pripomeňme, že $\lambda \in C$ je vlastné číslo matice $A \in C^{n\times n}$ vtedy a len vtedy, keď λ je koreňom jej charakteristického polynómu $p_A(\lambda)$. Vieme, že $\deg p_A(\lambda) = n$, má teda najviac n rôznych koreňov (ak ich má n, v tom prípade majú všetky násobnosť 1 a matica je diagonalizovateľná. Vyplýva to z nasledujúcej vety:

Veta. *Vlastné vektory $e_1, e_2, \ldots e_n$ prislúchajúce k po dvoch rôznym vlastným číslam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ operátora $T\colon L \to L$ sú lineárne nezávislé.*

Dôkaz. Vetu dokážeme matematickou indukciou.

1. Ak $n = 1$ tak je veta pravdivá, lebo vlastný vektor e_1 je nenulový a teda množina $\{e_1\}$ lineárne nezávislá.
2. Predpokladajme, že veta platí pre n vektorov a nech $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}$ sú vlastné vektory prislúchajúce k po dvoch rôznym vlastným číslam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$. Potom vieme, že množina $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ je lineárne nezávislá. Ak $\alpha_{n+1} = 0$, tak

$$\mathbf{0} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} e_{n+1} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \implies 0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$$

Ak $\alpha_{n+1} \neq 0$, tak

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} e_{n+1} = \mathbf{0} \implies e_{n+1} = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots \beta_n e_n\,,$$

kde $\beta_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Teraz

$$\begin{aligned} Te_{n+1} &= \beta_1 Te_1 + \beta_2 Te_2 + \ldots \beta_n Te_n &&= \beta_1\lambda_1 e_1 + \beta_2\lambda_2 e_2 + \ldots + \beta_n\lambda_n e_n \\ Te_{n+1} = \lambda_{n+1}e_{n+1} &= \lambda_{n+1}(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n) &&= \beta_1\lambda_{n+1}e_1 + \beta_2\lambda_{n+1}e_2 + \ldots + \beta_n\lambda_{n+1}e_n \end{aligned}$$

Z lineárnej nezávislosti množiny $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dostaneme (odčítaním predchádzajúcich rovností):

$$\mathbf{0} = \beta_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})}_{\neq 0} e_1 + \beta_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_{n+1})}_{\neq 0} e_2 + \cdots + \beta_n \underbrace{(\lambda_n - \lambda_{n+1})}_{\neq 0} e_n$$
$$\implies 0 = \beta_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = \beta_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1}) = \cdots = \beta_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})$$

Pretože vlastné čísla λ_k sú po dvoch rôzne, dostávame $0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n \implies 0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$. Potom ale máme

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} e_{n+1} = \mathbf{0} \implies \alpha_{n+1} e_{n+1} = \mathbf{0} \implies \alpha_{n+1} = 0\,.$$

To je však spor s naším predpokladom, že $\alpha_{n+1} \neq 0$ a veta je dokázaná.

V prípade, že matica nie je diagonalizovateľná, ,,najjednoduchšia" k nej podobná matica je tzv. Jordanova forma matice.

Definícia. Matica $J_k(\lambda) = (a_{ij}) \in C^{k\times k}$ sa nazýva Jordanov blok, ak $a_{ii} = \lambda$ pre $\forall\ i = 1, 2, \ldots k$, $a_{i+1,i} = 1$ pre $\forall\ i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Príklad. Nech $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ je báza lineárneho priestoru L. Nech lineárny operátor $N\colon L \to L$ je určený vzťahmi

$$Nb_1 = b_2\,,\ Nb_2 = b_3\,,\ Nb_3 = 0\,.$$

Ľahko sa ukáže, že $N^2 \neq 0$, $N^3 = 0$ a jeho matica je

$$[N]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_3(0)\,.$$

Teda matica operátora N vzhľadom k báze $\mathcal{B}$ je Jordanov blok a bázové prvky majú vlastnosť: $N^k b = 0$ pre nejaké $k \in N$.

Definícia. Nech $A \in C^{n\times n}$, $\lambda \in C$. Nenulový vektor $e \in C^{n\times 1}$ sa nazýva zovšeobecnený vlastný vektor matice (operátora) A patriaci k vlastnému číslu λ, ak existuje $m \in N$, pre ktoré $(A - \lambda I)^m e = 0$.

Množinu $E = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\} \subset C^{n\times n}$ nazývame reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, ak

1. $f_1 \notin \operatorname{ran} A$ ($\operatorname{ran} A$ znamená obor hodnôt operátora A, t.j. $\operatorname{ran} A = \operatorname{span}\{A_{*1}, A_{*2}, \ldots, A_{*n}\}$)
2. $(A - \lambda I) f_p = f_{p+1}$, $\forall\, p = 1, 2, \ldots, k-1$.
3. $Af_k = \lambda f_k$, $f_k \neq 0$.

Nasledujúca veta sa dá jednoducho dokázať matematickopu indukciou pomocou vzťahu:

$$(A - \lambda I)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_k f_k) = \alpha_1 f_2 + \alpha_2 f_3 + \cdots + \alpha_{k-1} f_k\,.$$

Veta. *Nech $A \in C^{n\times n}$. Každý reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice A je lineárne nezávislá množina.*

Jordanov tvar nilpotentnej matice.

Nech $0_{p\times q}$ označuje nulovú maticu z $C^{p\times q}$.

Definícia. Matica $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva nilpotentná rádu $k \in N$, ak $A^k = 0_{n\times n}$. $A^{k-1} \neq 0_{n\times n}$.

Dá sa ukázať, že pre nilpotentnú maticu $A \in C^{n\times n}$ rádu k, pre ktorú $\dim\ker A = p$ existuje p reťazcov $E_1, E_2, \ldots, E_p$ zovšeobecnených vlastných vektorov matice A patricich k (jedinému) vlastnému číslu matice A, $\lambda = 0$.

$$E_1 = \{f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1k_1}\}\,,\ E_2 = \{f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2k_2}\}\,, \ldots,\ E_p = \{f_{p1}, f_{p2}, \ldots, f_{pk_p}\}\,,$$

tak, že $k = k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_p$. $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$ a $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p$ je báza priestoru C^n. Hlavnú myšlienku dôkazu ukážeme na príklade troch reťazcov. Nech

$$E = \{e_1, e_2, e_3\}\,,\ F = \{f_1, f_2, f_3\}\,,\ G = \{g_1, g_2\}\,.$$

Ukážeme, že množina $E \cup F \cup G$ je lineárne nezávislá vtedy a len vtedy, keď je množina vlastných vektorov $\{e_3, f_3, g_2\}$ lineárne nezávislá: Ak je $\{e_3, f_3, g_2\}$ lineárne závislá, tak je lineárne závislá aj množina $E \cup F \cup G \supset \{e_3, f_3, g_2\}$, predpokladajme teda, že $\{e_3, f_3, g_2\}$ je lineárne nezávislá a existujú čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, γ_1, γ_2, pre ktoré

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 = 0\,.$$

Potom

$$\begin{aligned}
&A^2(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2) = \alpha_1 e_3 + \beta_1 f_3 = 0 \implies \alpha_1 = \beta_1 = 0\\
&\implies \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 = 0\,,\\
&\implies A(\alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2) = \alpha_2 e_3 + \beta_2 f_3 + \gamma_1 g_2 = 0 \implies \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_1 = 0\,.\\
&\implies \alpha_3 e_3 + \beta_3 f_3 + \gamma_2 g_2 = 0 \implies \alpha_3 = \beta_3 = \gamma_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Tým sme naše tvrdenie dokázali.

Veta. *Nech A je nilpotentná matica rádu k a $\dim\ker A = p$. Potom existujú $k_1, k_2, \dots, k_p \in N$, pre ktoré platí $k = k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_p$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$ a matica A je podobná blokovo diagonálnej matici*

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & 0_{k_1\times k_2} & \dots & 0_{k_1\times k_p}\\ 0_{k_2\times k_1} & J_{k_2}(0) & \dots & 0_{k_2\times k_p}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0_{k_p\times k_1} & 0_{k_p\times k_2} & \dots & J_{k_p}(0) \end{pmatrix}$$

Dôkaz. Ak A je matica lineárneho operátora T vzhľadom na štandardnú bázu, tak matica J je matica lineárneho operátora T vzhľadom na bázu tvorenú vyššie popísanými p reťazcami zovšeobecnených vlastných vektorov matice A

Príklad. Nájdite Jordanov tvar nilpotentnej matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

Charakteristický polynóm matice A je $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0\\ 4 & -2-\lambda & 0\\ 4 & -2 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda[(2-\lambda)(-2-\lambda)+4] = -\lambda^3$.
Teda $\sigma(A) = \{0\}$ a matica A je nilpotentná (presvedčte sa, že $A^2 = 0_{3\times 3}$.

Najprv hľadáme vlastné vektory:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \implies \mathbf{e} = s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\,, \quad \forall (s,t) \in C^2, (s,t) \neq (0,0)\,.$$

Existujú teda dve lineárne nezávislé vlastné vektory, báza vzhľadom ku ktorej bude mať matica Jordanov tvar pozostáva z dvoch reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov. Najprv hľadáme vlastný vektor e_2, ku ktorému existuje $e_1 \neq 0_{3\times 1}$ také, že $Ae_1 = e_2$ (súčasne hľadáme aj e_1, teda riešime sústavu rovníc, ktorej rozšírená matica je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & s\\ 4 & -2 & 0 & 2s\\ 4 & -2 & 0 & t\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & s\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & t-2s\end{array}\right) \quad \text{pre } (s,t) = (1,2) \text{ dostaneme } e_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ e_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Na voľbu zovšeobecneného vlastného vektora e_1 bolo nekonečne veľa možností. Za e_3 zvolíme taký vlastný vektor, ktorý nie je násobkom e_2, napr. pre $(s,t) = (0,1)$ dostaneme $e_3 = (0,0,1)^\top$. Ak teraz zvolíme maticu P tak, že jej stĺpce sú $P_{*1} = e_1$, $P_{*2} = e_2$, $P_{*3} = e_3$, tak dostaneme

$$A = PJP^{-1}\,, \quad \text{kde} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(0) & 0_{2\times 1}\\ 0_{1\times 2} & J_1(0)\end{pmatrix}\,.$$

Bez dôkazu teraz uvedieme vetu o Jordanovom tvare všeobecnej matice $A \in C^{n\times n}$.

Veta. *Nech $A \in C^{n\times n}$, ktorej charakteristický polynóm má kanonickú faktorizáciu*

$$p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_p)^{m_p}\,.$$

Potom je A podobná blokovo diagonálnej matici

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0_{m_1\times m_2} & \dots & 0_{m_1\times m_p} \\ 0_{m_2\times m_1} & J_2 & \dots & 0_{m_2\times m_p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_{m_p\times m_1} & 0_{m_p\times m_2} & & J_p \end{pmatrix}$$

Kde $J_i - \lambda_i I$ je Jordanov tvar nilpotentnej matice (lineárneho operátora $(A-\lambda_i I)|\ker(A-\lambda_i)^{m_i}$).

Poznamenajme, že J_i je Jordanov tvar matice, ktorá má jediné vlastné číslo λ_i a je tvaru

$$\begin{pmatrix} J_{k_{i1}}(\lambda_i) & 0_{k_{i1}\times k_{i2}} & \dots & 0_{k_{i1}\times k_{im}} \\ 0_{k_{i2}\times k_{i1}} & J_{k_{i2}}(\lambda_i) & \dots & 0_{k_{i2}\times k_{im}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_{k_{im}\times k_{i1}} & 0_{k_{im}\times k_{i2}} & \dots & J_{k_{im}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

kde $k_i = k_{i1} \ge k_{i2} \ge \dots \ge k_{im}$, $k_{i1}+k_{i2}+\dots+k_{im} = m_i$. Teda Jordanov tvar matice A je blokovo diagonálna matica, ktorá má na diagonále Jordanove bloky patriace k vlastným číslam matice A. Počet blokov patriacich k vlastnému číslu λ_i je $\dim\ker(A-\lambda_i I)$, teda počtu lineárne nezávislých vlastných vektorov patriacich k λ_i. Toto číslo sa nazýva *geometrická násobnosť* vlastného čísla λ_i a je vždy menšie alebo rovné m_i (algebraickej násobnosti λ_i ako koreňa charakteristického polynómu matice A).

Pripomeňme už dokázanú vetu:

Cayley-Hamiltonova veta.
Nech $p(\lambda)$ je charakteristický polynóm matice $A \in C^{n\times n}$. Potom $p(A) = 0_{n\times n}$.

Veta. *Nech $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_p)^{m_p}$ je charakteristický polynóm matice $A \in C^{n\times n}$ a nech k_i $(i = 1, 2\dots, p)$ je rozmer najväčšieho Jordanovho bloku matice A patriaceho ku vlastnému číslu λ_i. Potom minimálny polynóm matice A je*

$$m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\dots(\lambda-\lambda_p)^{k_p}\,.$$

Caley-Hamiltonovu aj predchádzajúcu vetu stačí dokázať pre Jordanov tvar matice, lebo minimálny aj charakteristický polynóm sa podobnosťou zachováva, stačí si uvedomiť, že $\det(P^{-1}AP) = \det A$ a že

$$\begin{aligned} A = PBP^{-1} &\implies A^2 = PB(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^2P^{-1} \\ &\implies f(A) = Pf(B)P^{-1} \quad \text{pre } \forall \text{ polynómy } f\,, \end{aligned}$$

Príklad. Určte Jordanov tvar J a minimálny polynóm matice A. Nájdite regulárnu maticu P, pre ktorú $A = PJP^{-1}$.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $[J_3(2)]$

b. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $[J_2(-1) \oplus J_1(-1)]$

c. $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$, $[J_2(-1) \oplus J_1(10)]$

d. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $[J_3(-1)]$

e. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $[J_2(1) \oplus J_1(2)]$

f. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $[J_2(0) \oplus J_1(1)]$

g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[J_3(1) \oplus J_1(1)]$

h. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $[J_2(0) \oplus J_2(0)]$

i. $A = \begin{pmatrix} 15 & 28 & -7 \\ -6 & -11 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $[J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(2)]$

j. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[J_3(1) \oplus J_1(1)]$

k. $A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 11 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, $[J_2(8) \oplus J_1(12) \oplus J_1(12)]$

l. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $[J_1(3) \oplus J_3(2)]$

Maticové normy.

Definícia. Funkcia $\|\cdot\|$ z množiny všetkých komplexných matíc do R sa nazýva maticová norma, ak
1. $\|A\| \geq 0$ a platí $\|A\| = 0 \iff A = 0$.
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ pre $\forall \alpha \in C$.
3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ pre $\forall$ matice $A, B \in C^{m\times n}$
4. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, pre $\forall\, A, B$, pre ktoré $\exists\, AB$.

Príklad. Frobeniova norma matice $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$ je $\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$.

Definícia. Nech $B = (b_{ij}) \in C^{n\times n}$. Potom sa číslo $\operatorname{trace} A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{jj}$ nazýva stopa matice A.

Veta. *Ak $A \in C^{m\times n}$, tak $\|A\|_F^2 = \operatorname{trace}(A^*A)$.*

Dôkaz. Označme $A^*A = B = (b_{ij})$. Potom

$$b_{jj} = \sum_{i=1}^{m} \overline{a_{ij}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 \implies \operatorname{trace} A^*A = \sum_{j=1}^{n} b_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 = \|A\|_F^2\,.$$

Veta (vlastnosti stopy).
1. *Nech $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ je n-tica všetkých vlastných čísiel matice $A \in C^{n\times n}$ (k-násobné vlstné čísla sa v nej vyskytujú k-krát). Potom* $\operatorname{trace}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$
2. *Ak sú matice A, B podobné, tak* $\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(B)$.
3. $A, B \in C^{n\times n} \implies \operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA)$

Dôkaz. Tvrdenie 3 sa dá dokázať priamym výpočtom, tvrdenie 2 vyplýva z tvrdenia 1 (spektrum podobných matíc (vrátane násobností) je zhodné. Stačí teda dokázať prvé tvrdenie:

Pripomenieme (kapitola 6.1), že pre $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ je $\det(A) = \sum\limits_{p} \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$, kde p prebieha všetky permutácie množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a $\sigma(p) = \pm 1$ je parita permutácie p. Vo všetkých súčinoch $a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$ je z každého riadku a z každého stĺpca matice A presne jeden prvok. Ak $p_i = i$ pre $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, tak $a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$ obsahuje všetky prvky a_{ii} hlavnej diagonály matice A, ak $p_i = j \neq i$ pre niektoré i, tak $p_j \neq j$, teda $a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$ obsahuje najviac $n-2$ prvkov hlavnej diagonály. Preto existuje polynóm $f_1(\lambda)$ stupňa $\deg f \leq n-2$, pre ktorý

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = f(\lambda) + (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) = f(\lambda) + \\ + \left[(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_{11} a_{22} \ldots a_{nn})\right]. \end{aligned}$$

Podobne z kanonického rozkladu charakteristického polyn'omu dostaneme:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n) = (-1)^n [\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \ldots]\,.$$

Porovnaním koeficientov pri mocnine λ^{n-1} dostávame

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{trace}(A)\,.$$

Definícia. Nech $\|\cdot\|$ je norma na $C^{n\times 1}$. Potom sa maticová norma

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

nazýva maticová (operátorová) norma indukovaná vektorovou normou $\|\cdot\|$.

Príklad. Ukážte, že pre indukovanú maticovú normu platí

$$\|A\| = \min\{K \geq 0 \colon \|Ax\| \leq K\|x\| \text{ pre } \forall\, x \in C^{n\times 1}\}\,.$$

Príklad. Ukážte, že pre euklidovskú normu $\|\cdot\|_2$ na $C^{n\times 1}$ platí

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F \|x\|_2 \text{ (t.j. Frobeniova norma je kompatibilná s euklidovskou),}$$

ale $\|A\|_F$ nie je indukovaná normou $\|\cdot\|_2$.

Návod. na dôkaz nerovnosti stačí vhodne použiť CBS nerovnosť. Potom treba nájsť konkrétnu maticu $A \in C^{2\times 2}$ tak, aby $\max_{\|x\|=1} \|Ax\|_2 < \|A\|_F$.

Príklad. Na $C^{n\times n}$ nájdite maticové normy indukované normou na $C^{n\times 1}$

a. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ b. $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$

Nasledujúcu vetu uvediem bez dôkazu.

Veta (spectral radius formula). *Pre každú maticovú normu na $C^{n\times n}$ existuje vlastná limita*

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \qquad \text{a platí } \rho(A) = \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(A)\}\,.$$

Definícia. Nezáporné číslo $\rho(A) = \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(A)\}$ sa nazýva spektrálny polomer matice (lineárneho operátora) A.

$\|A^n\| \le \|A\|^n \implies \lim \|A^n\|^{1/n} = \rho(A) \le \|A\|$ (dokážte túto nerovnosť bez použitia vzorca na výpočet spektrálneho polomeru).

Normálne, hermitovské a symetrické matice.

Definícia. $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva *normálna* matica, ak $A^*A = AA^*$. Ak $A^* = A$, tak sa A nazýva *hermitovská* (samoadjungovaná). Reálna matica A je hermitovská práve vtedy, keď je symetrická, t.j. $A = A^\top$.

V tejto kapitole bude $\|\cdot\|$ znamenať euklidovskú normu vektora v C^n a od nej odvodenú normu matice $A \in C^{n\times n}$ a budeme používať skalárny súčin $(x \mid y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ $(x, y \in C^n)$.

Veta. *Ak $A \in C^{n\times n}$ je normálna matica a $x \in C^{n\times 1}$, tak $\|Ax\| = \|A^*x\|$. Ak x je vlastný vektor matice A patriaci k vlastnému číslu λ, tak x je aj vlastný vektor matice A^* a k nemu príslušné vlastné číslo je $\overline{\lambda}$.*

Dôkaz. Pripomeňme, že $(Ax \mid y) = (x \mid A^*y)$. Potom
1. $\|Ax\|^2 = (Ax \mid Ax) = (x \mid A^*Ax) = (x \mid AA^*x) = (A^*x \mid A^*x) = \|A^*x\|^2$, teda $\|Ax\| = \|A^*x\|$.
2. Platí $(A-\lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$, preto $(A-\lambda I)^*(A-\lambda I) = (A^* - \overline{\lambda} I)(A - \lambda I) = A^*A - A^*\lambda I - \overline{\lambda} I A + \overline{\lambda} I \lambda I =$ $= AA^* - \lambda A^* - \overline{\lambda} A + \lambda\overline{\lambda} I = (A-\lambda I)(A-\lambda I)^*$, t.j. $(A - \lambda I)$ je normálna matica. Druhé tvrdenie vety teraz vyplýva z prvého:

$$(A-\lambda I)x = 0 \implies \|(A-\lambda I)x\| = 0 \implies \|(A-\lambda I)^*x\| = 0 \implies (A^* - \overline{\lambda} I x = 0\,.$$

Veta. *Vlastné vektory normálnej matice patriace k rôznym vlastným číslam sú na seba kolmé.*

Dôkaz. Ak $\lambda \ne \mu$ a $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, tak

$$\begin{matrix} (Ax \mid y) = (\lambda x \mid y) = \lambda (x \mid y) \\ (Ax \mid y) = (x \mid A^*y) = (x \mid \overline{\mu} y) = \mu (x \mid y) \end{matrix} \implies (\lambda - \mu)(x \mid y) = 0 \implies (x \mid y) = 0\,,$$

t.j. x, y sú na seba kolmé.

Veta. *Pre každú maticu $A \in C^{n\times n}$ platí:* $\|A^*A\| = \|A\|^2$

Dôkaz. Pre $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ označme $\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$. Zrejme platí $\|x\| = 1 \iff \|\overline{x}\| = 1$, odtiaľ: $\|A^*\overline{x}\| = \|(A^*\overline{x})^*\| = \|x^\top A\| = \|(x^\top A)^\top\| = \|Ax\| \implies \|A^*\| = \|A\|$.

Z (CBS) nerovnosti dostávame: $\|Ax\|^2 = (Ax \mid Ax) = (A^*Ax \mid x) \le \|A^*Ax\| \|x\| \le \|A^*A\| \|x\|^2 \implies$ $\|Ax\| \le \sqrt{\|A^*A\|} \|x\| \implies \|A\| \le \sqrt{\|A^*A\|}$. Teda $\|A\|^2 \le \|A^*A\| \le \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2 \implies \|A\|^2 = \|A^*A\|$.

Veta. *Ak $A \in C^{n\times n}$ je normálna matica, tak $\rho(A) = \|A\|$.*

Dôkaz. Pre každý vektor x je $\|A^*Ax\| = \|A(Ax)\| = \|A^2x\| \implies \|A^2\| = \|A^*A\|$. Spolu s predchádzajúcou vetou dostávame odtiaľ $\|A^2\| = \|A\|^2$. Pretože aj A^2 je normálna matica, platí $\|(A^2)^2\| = \|A^2\|^2 = \|A\|^4$ a zrejme tiež

$$\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k} \implies \|A^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|A\| \implies \rho(A) = \lim_{m\to\infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}} = \lim_{k\to\infty} \|A^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|A\|\,.$$

Dôsledok. *Pre každú maticu $A \in C^{n\times n}$ je matica A^*A hermitovská a teda aj normálna. Preto platí*

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = \rho(A^*A) \implies \|A\| = \sqrt{\rho(A^*A)}\,.$$

Navyše vlastné čísla matice A^*A sú nezáporné reálne čísla, a platí

$$\|A\| = \|A^*\| = \max\{\sqrt{\lambda}\colon \lambda \in \sigma(A^*A)\}\,.$$

Dôkaz. dokážeme, že $\sigma(A^*A) \subset \langle 0, \infty)$:
$\lambda \in \sigma(A^*A)$ a $\|x\| = 1$, $A^*Ax = \lambda x$, tak $\lambda = \lambda(x \mid x) = (\lambda x \mid x) = (A^*Ax \mid x) = (Ax \mid Ax) \geq 0$.

Definícia. Ak $A \in C^{n\times n}$, $0 \neq \lambda \in \sigma(A^*A)$, tak $\sqrt{\lambda}$ je *singulárne číslo* matice A.

Ak je matica $A \in C^{n\times n}$ normálna a platí $A^2x = 0$, tak

$$A(Ax) = 0 \implies A^*Ax = 0 \implies \|Ax\|^2 = (Ax \mid Ax) = (x \mid A^*Ax) = 0 \implies Ax = 0.$$

Teda pre normálnu maticu A a $\lambda \in \sigma(A)$ neexistujú zovšeobecneneé vlastné vektory. Preto sú všetky bloky jej Jordanovho tvaru jednorozmerné a dostávame:

Veta. *Každá normálna matica je diagonalizovateľná.*

Definícia. Matice $A, B \in C^{n\times n}$ sa nazývajú unitárne podobné, ak existuje unitárna matica U, pre ktorú $B = UAU^*$.

Veta. *Každá normálna matica $A \in C^{n\times n}$ je unitárne podobná diagonálnej matici.*

Dôkaz. Vieme, že existuje báza $B = \{b_1, b_2 \ldots, b_n\}$ priestoru $C^{n\times 1}$ zložená z vlastných vektorov matice A. Vlastné vektory príslúchajúce k rôznym vlastným číslam sú na seba kolmé. Pomocou Gram-Schmidtovho procesu sa báza B zmení na ortonormálnu bázu $\{e_1, e_2 \ldots, e_n\}$ zloženú z vlastných vektorov matice A. Ak $U_{*1} = e_1$, $U_{*2} = e_2$, … ,$U_{*n} = e_n$ a D je diagonálna matica, pre ktorú d_{ii} je vlastné číslo matice A prislúchajúce k vlatnému vektoru e_i, tak $U^*U = UU^* = I$ a platí: $A = UDU^*$.

Ak je matica $A \in C^{n\times n}$ diagonalizovateľná, tak existuje báza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ priestoru $C^{n\times 1}$ zložená z vlastných vektorov matice A. Nech $\lambda_1 \in \sigma(A)$ má násobnosť k_1, $e_1, e_2, \ldots e_{k_1} \in \ker(A - \lambda_1 I)$ (t.j. $Ae_j = \lambda_1 e_j$, $\forall\, j = 1, 2, \ldots, k_1$) a lineárny operátor $P_1\colon C^{n\times 1} \to C^{n\times 1}$ je definovaný vzťahom $P_1(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_{k_1}e_{k_1}$. Nech $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ a nech P_2, P_3, … P_m skonštruované podobne pre ostatné vlastné čísla matice A. Potom pre $\forall\, i = 1, 2, \ldots, m$ a $\forall\, x \in C^{n\times 1}$ platí:
$P_i^2 = P_i$, $i \neq j \implies P_iP_j = 0$, $P_1 + P_2 + \cdots + P_m = I$, $AP_ix = \lambda_iP_ix$, a teda

$$A = \lambda_1P_1 + \lambda_2P_2 + \cdots + \lambda_mP_m\,.$$

Predchádzajúci výraz sa nazýva spektrálny rozklad diagonalizovateľnej matice A. V prípade, že je matica A normálna, tak platí navyše $P_i^* = P_i$ (t.j. $(P_ix \mid y) = (x \mid P_iy)$) pre $\forall\, i = 1, 2, \ldots, m$ a P_i sa nazývajú ortogonálne projektory na $\ker(A - \lambda_iI)$.

Príklad.

1. Nájdite unitárnu maticu U a diagonálnu maticu D, pre ktorú platí $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = UDU^*$.
2. Nech $\|A\|_F$, znamená Frobéniovu normu matice $A \in C^{n\times n}$ a $\|A\|_p$ znamená normu matice A indukovanú vektorovou normou $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{(1/p)}$. Rozhodnite, či je matica A normálna, samoadjungovaná alebo symetrická a vypočítajte $\|A\|_F$, $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ a spektrálny polomer $\rho(A)$, ak
   a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e. A je matica z príkl. 1

Symetrické matice a kvadratické formy.

Dôležitým špeciálnym prípadom samoadjungovanej matice je $A \in R^{n\times n}$ taká, že $A^\top = A$. Označme $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ n-ticu vlastných čísel matice A (vrátane algebraických násobností). Pripomeňme, že

(1) $A^\top = A \iff \exists$ ortogonálna matica $P \in R^{n\times n}$ a diagonálna matica $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, pre ktoré $A = PDP^\top$.

(2) $A^\top = A \implies \sigma(A) \subset R$.

Podobné tvrdenia platia aj pre $A \in C^{n\times n}$, ak $A^* = A$.

Veta. *Nech $\lambda_1 \geq \lambda_\geq \cdots \geq \lambda_n$ sú vlastné čísla hermitovskej (reálnej symetrickej) matice $A \in C^{n\times n}$ ($A = A^\top \in R^{n\times n}$). Potom*

$$\lambda_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \mathbf{x}^* A\mathbf{x}\,, \qquad \lambda_n = \min_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \mathbf{x}^* A\mathbf{x}\,.$$

Dôkaz. Matica A sa dá napísať v tvare $A = UDU$, kde $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_, \dots, \lambda_n)$ a U je unitárna matica. Potom

$$\mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \mathbf{x}^* UDU^*\mathbf{x} = (U^*\mathbf{x})^* D(U^*\mathbf{x})\,, \quad \text{a} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = 1 \iff \|U^*\mathbf{x}\|_2 = 1\,.$$

Označme $\mathbf{y} = U^*\mathbf{x} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, dostaneme:

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} \mathbf{y}^* D\mathbf{y} = \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} \sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2 \leq \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} \lambda_1 \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \lambda_1\,.$$

Ak $\mathbf{x}$ je vlastný vektor, $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$ a $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$, tak $\lambda_1 = \mathbf{x}^* A\mathbf{x} \leq \max\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \mathbf{x}^* A\mathbf{x}$. Tým je prvá rovnosť dokázaná a druhá sa dokáže podobne.

Dôkaz nasledujúcej vety je v kapitole 7.5 (str. 550).

Veta (Courant-Fischer). *Nech $\lambda_1 \geq \lambda_\geq \cdots \geq \lambda_n$ sú vlastné čísla hermitovskej matice $A \in C^{n\times n}$. Potom*

$$\lambda_i = \max_{\dim V = i} \min_{\substack{\mathbf{x}\in V \\ \|\mathbf{x}\|_2=1}} \mathbf{x}^* A\mathbf{x}\,, \qquad \lambda_i = \min_{\dim V = n-i+1} \max_{\substack{\mathbf{x}\in V \\ \|\mathbf{x}\|_2=1}} \mathbf{x}^* A\mathbf{x}\,.$$

Kladne definitné matice $A \in R^{n\times n}$.

Definícia. Matica $A = A^\top \in R^{n\times n}$ sa nazýva kladne (pozitívne) definittná, ak pre každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in R^{n\times 1}$ platí

$$(A\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0\,.$$

Definícia. Nech $A \in R^{n\times n}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$. Determinant matice, ktorá vznikne z matice A vynechaním riadkov $A_{i_1*}, A_{i_2*}, \dots, A_{i_m*}$ a stĺpcov $A_{*i_1}, A_{*i_2}, \dots, A_{*i_m}$ sa nazýva hlavný subdeterminant matice A (v prípade $m = 0$ je to $\det A$). Determinanty $d_k = \det(a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$; $k = 1, 2, \dots, n$ sa nazývajú vedúce hlavné subdeterminanty matice A (vynechávame posledných $n-k$ riadkov a stĺpcov).

Veta. *Pre $\forall$ $A = A^\top \in R^{n\times n}$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivaalentné:*
(1) *A je kladne definitná matica.*
(2) $\lambda \in \sigma(A) \implies \lambda > 0$.
(3) *$\exists$ regulárna matica $B \in R^{n\times n}$, pre ktorú $A = B^\top B$.*
(4) *$\exists$ horná trojuholníková matica $U \in R^{n\times n}$ a dolná trojuholníková $L \in R^{n\times n}$ s kladnými prvkami na hlavnej diagonále ($u_{kk} > 0, l_{kk} > 0$), pre ktoré $A = LU$.*
(5) (Sylvestrovo kritérium) *Všetky vedúce hlavné subdeterminanty matice A sú kladné.*
(6) *Všetky hlavné subdeterminanty matice A sú kladné.*

Dôkaz. Matica A je symetrická, preto sú jej vlastné čísla reálne. Všeobecne vlastný vektor matice $A \in R^{n\times n}$ je nenulový vektor $\mathbf{x} \in C^{n\times n}$ také, že $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. V prípade reálneho vlastného čísla λ sa dá ľahko ukázať, že existuje $\mathbf{x} \in R^{n\times 1}$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$, pre ktoré $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Ak platí (1), tak pre tento vektor je

$$0 < \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^\top\mathbf{x} = \lambda\,.$$

Tým je dokázaná implikácia (1) $\implies$ (2).

(2) $\implies$ (3): Vieme, že sa matica A dá napísať v tvare $A = P\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)P^\top$, kde P je ortogonálna matica. Ak $B = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^\top$, tak B je regulárna matica a $B^\top B = P\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^\top = A$.

Dôkaz ekvivalencie (3) $\iff$ (4) vynecháme. Poznamenajme len, že podmienku (4) spĺňa Choleského faktorizácia $A = R^\top R$, (kde R je jednoznačne určená regulárna horná trojuholníková) matice A.

Dôkaz implikácií (3) $\implies$ (1) je veľmi ľahký a vynecháme ho.

(4) $\implies$ (5): Nech $A = LU$, $L = (l_{ij})$ je dolná a $U = (u_{ij})$ horná trojuholníková matica, $u_{ii} > 0$, $l_{ii} > 0$ pre $\forall$ $i = 1, 2, \dots n$. Označme $A_k = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$, $L_k = (l_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$, $U_k = (u_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$.

$$\left.\begin{aligned} p > i &\implies l_{ip} = 0 \\ p > j &\implies u_{pj} = 0 \end{aligned}\right\} \implies a_{ij} = \sum_{p=1}^n l_{ip}u_{pj} = \sum_{p=1}^{\min(i,j)} l_{ip}u_{pj}\,.$$

Z toho vidieť, že $A_k = L_k U_k$, a preto

$$d_k = \det A_k = \det(L_k U_k) = \det L_k \, \det U_k = (l_{11} l_{22} \dots l_{kk})(u_{11} u_{22} \dots u_{kk}) > 0 \, .$$

Tým je dokázaná implikácia (4) $\implies$ (5)

(1) $\implies$ (5) $\iff$ (6): Implikácia (6) $\implies$ (5) je triviálna.

Ak matica $A_1 = A_1^\top \in R^{n\times n}$ vznikne z kladne definitnej matice matice A zámenou riadkov $A_{i*} \leftrightarrow A_{j*}$ aj stĺpcov $A_{*i} \leftrightarrow A_{*j}$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ vznikne z vektora $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ zámenou $x_i \leftrightarrow x_j$, tak $\mathbf{x}^\top A_1 \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top A \mathbf{y}$, teda aj matica A_1 bude kladne definitná. Predpokladajme, že platí (6) a hlavný subdeterminant M vznikol z matice A vynechaním riadkov a stĺpcov $i_1, i_2, \dots, i_m$ ($1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n$). Ak $i_m < n$, tak vymeníme $A_{i_m *} \leftrightarrow A_{(i_m+1)*}$ aj $A_{*i_m} \leftrightarrow A_{*(i_m+1)}$. Dostaneme kladne definitnú maticu, v ktorej vynechaním riadkov a stĺpcov $i_1, i_2, \dots, i_m + 1$ vznikne ten istý hlavný subdeterminant M. Postup zopakujeme $(n - i_m)$-krát a získame maticu, v ktorej M vznikne vynechaním riadkov a stĺpcov $i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, n$. Takto postupne premiestnime aj $i_{m-1} \to (n-1)$, $i_{m-2} \to (n-2)$, … , $i_1 \to (n-m+1)$. Pritom riadky a stĺpce subdeterminantu M navzájom nevymieňame, teda dostaneme kladne definitnú maticu B, v ktorej je M vedúcim hlavným subdeterminantom a preto je kladný.

Implikáciu (5) $\implies$ (1) ukážeme pre maticu $A \in R^{3\times 3}$, rovnakým postupom by sa dal urobiť dôkaz pre $A \in R^{n\times n}$. Nech

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad d_1 = a_{11} > 0 \, , \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \, , \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \, .$$

Teraz na matici A vykonáme elementárne riadkové aj stĺpcové operácie tak, aby $R_1 = (a_{11}, 0, 0)$, $S_1 = (a_{11}, 0, 0)^\top$, t.j. $R_2 \to R_2 - (a_{12}/a_{11})R_1$, $R_3 \to R_3 - (a_{13}/a_{11})R_1$ aj $S_2 \to S_2 - (a_{12}/a_{11})S_1$, $S_3 \to S_3 - (a_{13}/a_{11})S_1$. Tieto operácie nezmenia d_1, d_2, d_3 a dajú sa urobiť pomocou násobenia $B = EAE^\top$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{12}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{13}/a_{11} & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{12}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{13}/a_{11} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = EAE^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $d_1 = a_{11} > 0$, $d_2 = a_{11} b_{22} > 0$, teda aj $b_{22} = (d_2/d_1) > 0$.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b_{23}/b_{22} & 1 \end{pmatrix} \implies FEAE^\top F^\top = (FE)A(FE)^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} = D \, , \quad c_{33} = d_3/d_2 > 0 \, .$$

Diagonálna matica D je kladne definitná, lebo $(x_1, x_2, x_3) D (x_1, x_2, x_3)^\top = a_{11} x_1^2 + b_{11} x_2^2 + c_{11} x_3^2$ a platí

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{12}/a_{11} & 1 & 0 \\ a_{13}/a_{11} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_{23}/b_{22} & 1 \end{pmatrix} \implies G = (FE)^{-1} = E^{-1} F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_{21} & 1 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom $D = FEA(FE)^\top \implies A = GDG^\top$ a $\forall$ nenulový vektor $\mathbf{x}$ platí:

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \big(GDG^\top\big) \mathbf{x} = \big(\mathbf{x}^\top G\big) D \big(G^\top \mathbf{x}\big) > 0 \, .$$

Tým je dôkaz dokončený.

Poznamenajme, že v dôkaze vzťahov $a_{11} = d_1$, $b_{22} = d_2/d_1$, $c_{33} = d_3/d_2$ sme použili len fakt, že $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $d_3 \neq 0$. Ak je matica A záporne definitná, tak je matica $-A$ kladne definitná a teda pre vedúce hlavné subdeterminanty matice A platí $(-1)^k d_k > 0$, pre $\forall \, k = 1, 2, \dots, n$. V tom prípade $a_{11} < 0$, $b_{22} < 0$, $c_{33} < 0$ (pre maticu $A \in R^{3\times 3}$). Ak sú všetky determinanty $d_k \neq 0$, ale neplatí $d_k > 0$ pre $\forall k$ ani $(-1)^k d_k > 0$ pre $\forall k$, tak $A = GDG^\top$, kde diagonálna matica D má na diagonále aj kladné aj záporné čísla. Odtiaľ sa ľahko ukáže, že exitujú vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, pre ktoré $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$, $\mathbf{y}^\top A \mathbf{y} < 0$, teda matica A je indefinitiná.

Definícia. $A = A^\top \in R^{n\times n}$ sa nazýva kladne semidefinitná,
$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \geq 0 \quad \text{pre} \quad \forall\, \mathbf{x} \in R^{n\times 1}\,.$$

Nasledujúcu vetu uvedieme bez dôkazu

Veta. *Nech $A = A^\top \in R^{n\times n}$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné.*
(1) *A je kladne semidefinitná.*
(2) $\lambda \in \sigma(A) \implies \lambda \geq 0$
(3) *Existuje $B \in R^{n\times n}$, pre ktoré $A = B^\top B$,* $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A$.
(4) *Všetky hlavné subdeterminanty matice A sú nezáporné.*

Kvdadratické formy a kvadratické plochy.

Definícia. Nech $A \in R^{n\times n}$. Funkcia $f\colon R^{n\times 1} \to R$ tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ sa nazýva kvadratická forma.

Matica A nie je určená jednoznačne, ale pre každú kvadratickú formu existuje jediná symetrická matica A, pre ktorú $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$. Odteraz budeme predpokladať, že $A = A^\top$. Vieme, že existuje diagonálna matica $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a ortogonálna matica P, pre ktorú $A = PDP^\top$. Substitúciou $\mathbf{y} = P^\top\mathbf{x}$ (t.j. $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$) dostaneme
$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top PDP^\top\mathbf{x} = (P^\top\mathbf{x})^\top D(P^\top\mathbf{x}) = \mathbf{y}^\top\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2\,.$$
Zoberme teraz $n = 3$ ($n = 2$). Zobrazenie $\mathbf{x} \to P\mathbf{y}$ ortogonálnou maticou zachováva dĺžky aj uhly vektorov, znamená teda otočenie súradnicovej sústavy. Teda pre $a \in R$ plocha
$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = a \quad \text{ je zhodná s } \quad \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = a$$
Typ plochy $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = a$ je určený znamienkami čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a$. Napríklad
Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, a > 0$, tak $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = a$ je rovnica elipsoidu.
Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, a < 0$, tak $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = a$ je rovnica prázdnej množiny.
Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, a > 0$, tak $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = a$ je rovnica jednodielneho hyperboloidu.
Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, a < 0$, tak $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = a$ je rovnica dvojdielneho hyperboloidu.
Ak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, a > 0$, tak $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = a$ je rovnica valcovej plochy.
Vidieť, že nasledujúci pojem môže byť užitočný.

Definícia. Nech $A = A^\top \in R^{n\times n}$. Nech má matica A ρ kladných, ν záporných a ζ nulových vlastných čísel (počítajúc násobnosti, $\rho + \nu + \zeta = n$). Trojica (ρ, ν, ζ) sa nazýva zotrvačnosť matice A.

Zotrvačnosť sa dá zistiť bez toho, aby sa počítali vlastné čísla matice A. Platí:

Veta (Sylvestrov zákon zotrvačnosti). *Ak $A = A^\top \in R^{n\times n}$, $B = B^\top \in R^{n\times n}$ a $C \in R^{n\times n}$ je regulárna matica. Ak $B = C^\top AC$, tak majú matice A, B tú istú zotrvačnosť.*

Dôkaz je v kapitole 7.6. Zavedieme najprv pojem

Definícia. Symetrické matice $A, B \in R^{n\times n}$ sa nazývajú kongruentné, ak existuje regulárna matica C, pre ktorú $B = C^\top AC$. Potom píšeme $A \cong B$.

$$\begin{matrix} A \cong B \\ B \cong D \end{matrix} \implies \left.\begin{matrix} B = C_1^\top DC_1 \\ A = C_2^\top BC_2 \end{matrix}\right\} \implies A = C_2^\top(C_1^\top DC_1)C_2 = (C_1C_2)^\top D(C_1C_2) \implies A \cong D\,.$$

Zo Sylvestrovho zákona zotrvačnosti vyplýva, že ak sa symetrická matica dá napísať v tvare $A = C^\top DC$, kde D je diagonálna, tak D má na diagonále ρ kladných, ν záporných a ζ nulových čísel, kde (ρ, ν, ζ) je zotrvačnosť matice A. Každá symetrická matica A sa tak dá napísať, lebo ak násobením elementárnou maticou E zľava vykonáme na matici A niektorú elementárnu riadkovú operáciu, tak násobením sprava maticou $E^\top$ vykonáme „tú istú" elementárnu stĺpcovú operáciu. Ukážeme si to na konkrétnom príklade:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{\substack{R_2-3R_1 \\ S_2-3S_1}} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{\substack{R_3+R_1 \\ S_3+S_1}} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{R_3\leftrightarrow R_2 \\ S_3\leftrightarrow S_2}} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}_{\substack{R_3-4R_2 \\ S_3-4S_2}} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}$$
Pomocou násobenia elementárnymi maticami sa to dá napísať:
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies GAG^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}$$
Teda zotrvačnosť matice A je trojica $(2, 1, 0)$.

Príklad. Zistite, či sú nasledujúce matice kladne alebo záporne (semi)definitná alebo indefinitná a určte ich zotrvačnosť.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Príklad. Nakreslite krivku, ktorej rovnica v rovine je
a. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$ b. $2x^2 - 4xy - 2y^2 - 4 = 0$