

Otázky na skúšku z LA2

1. Definícia normy, príklady noriem $\|\mathbf{x}\|_p$, $p \geq 1$.
2. Definícia vnútorného súčinu v $C^{n \times 1}$, $R^{n \times 1}$.
3. Cauchy-Bunjakovského-Schwarzova nerovnosť (aj dôkaz).
4. Ortonormálne množiny a bázy. Besselova nerovnosť a Parsevalova rovnosť (V konečnorozmernom priestore aj dôkaz).
5. Gramm-Schmidtov ortogonalizačný proces (popísať algoritmus).
6. Ortogonálne a unitárne matice (definícia a ekvivalentné podmienky).
7. Vlastné číslo a vlastný vektor lineárneho operátora (matice)
8. Charakteristický polynóm matice a súvislosť s vlastnými číslami.
9. Veta o delení polynómov $f(x) : (x - c)$ (sformulovať, dokázať).
10. Algoritmus na hľadanie racionálnych koreňov polynómu s celočíselnými koeficientami.
11. Podobnosť matíc, diagonalizovateľné matice (definícia a súvislosť s vlastnými vektormi).
12. Zovšeobecnené vlastné vektory.
13. Definícia Jordanovho bloku, súvislosť s vlastnými a zovšeobecnenými vlastnými vektormi.
14. Definícia minimálneho polynómu matice, Cayley-Hamiltonova veta, vzťah medzi minimálnym a charakteristickým polynómom matice.
15. Definícia a vlastnosti stopy matice.
16. Definícia a príklady maticových noriem.
17. Definícia spektrálneho polomeru matice a vzorec na jeho výpočet.
18. Definícia normálnej matice. Dôkaz tvrdenia: $A^*A = AA^* \implies \|A\mathbf{x}\|_2 = \|A^*\mathbf{x}\|_2 \implies \|A^2\mathbf{x}\|_2 = \|A\mathbf{x}\|_2^2$.
19. Ukázať, že normálna matica je diagonalizovateľná.
20. Vysvetliť vzťah medzi $\rho(A^*A)$ a $\|A\|_2$.
21. Definícia samoadjungovanej (hermitovskej) matice. Vlastnosti spektra $\sigma(A)$, ak $A = A^*$.
22. Definícia kladne definitnej matice a ekvivalentné podmienky.
23. Sylvestrov kritérium. Dôkaz implikácie $d_1 > 0, d_2 > 0, d_3 > 0 \implies A$ je kladne definitná pre maticu $A \in R^{3 \times 3}$.
24. Sylvestrov zákon zotrvačnosti (definovať potrebné pojmy a sformulovať tvrdenie).