

Determinanty.

1. Permutáciu $p \in P_7$ napíšte ako zloženie transpozícií a určte jej paritu a počet inverzií.

a) $p = (1, 2, 3, 7, 6, 5, 4)$

b) $p = (3, 1, 7, 2, 5, 4, 6)$

2. Vypočítajte

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 5 d) $\begin{vmatrix} 1-i & -2i \\ 1+i & i+3 \end{vmatrix}$

3. Napíšte hodnotu determinantu

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -10 & 3 & -10 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 15 & 1 & 0 \\ 20 & 18 & -1 \end{vmatrix}$

4. Pre ktoré hodnoty $a \in C$ je $\det(A) = 0$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ (a+1) & 3 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1-a & 12 \\ 3 & 1-a \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Pomocou $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ vyjadrite

a) $D_a = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 & 3d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$, b) $D_b = \begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 & -d_1 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 & 3d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$, c) $D_c = \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 - 3d_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & 2b_2 - 3d_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & 2b_3 - 3d_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & 2b_4 - 3d_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$

d) $D_d = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 & b_1 \\ 3a_2 & 3d_2 & 3c_2 & 3b_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 & b_3 \\ a_4 & d_4 & c_4 & b_4 \end{vmatrix}$, e) $D_e = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 & 3d_2 \\ -a_1 & -b_1 & -c_1 & -d_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$, f) $D_f = \begin{vmatrix} -a_1 & 2b_1 - 3d_1 & c_1 & d_1 \\ -a_2 & 2b_2 - 3d_2 & c_2 & d_2 \\ -a_3 & 2b_3 - 3d_3 & c_3 & d_3 \\ -a_4 & 2b_4 - 3d_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Pomocou determinantov vypočítajte A^{-1} .

b) Maticu A napíšte ako súčin elementárnych matic.

c) Riešte rovnicu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

7. Vypočítajte

a. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -6 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}$

8. Vypočítajte všetky algebraické doplnky a matice inverzné k maticiam z príkladu 7.

9. Pomocou determinantov vypočítajte maticu unverznu k matici A .

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Riešte pomocou Cramerovho pravidla sústavy

a) $2x + y = -1$ b) $2x + 4y + z = -1$ c) $3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$
 $x + 2y + z = 3$ $x + y + 3z = 1$ $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$
 $y + z = -4$ $x + 2y + z = -4$ $-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$
 $5x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -1$

11. Riešte sústavu funkcionálnych rovníc

a) $e^x f_1(x) + 2e^{2x} f_2(x) = 1$ $f_1(x) + \cos x f_2(x) - f_3(x) = \cos x$
 $-e^x f_1(x) + e^{2x} f_2(x) = e^x$ b) $f_1(x) + \sin x f_2(x) - f_3(x) = 0$
 $2f_1(x) - f_2(x) - f_3(x) = 0$

Výsledky.

1. a) $p = t(5, 6) \circ t(4, 7)$, $\sigma(p) = 1$, $n_{inv} = 6$, b) $T(6, 4) \circ t(2, 4) \circ T(2, 7) \circ t(3, 2) \circ t(1, 2)$, $\sigma(p) = -1$, $n_{inv} = 7$

2. a) 7, b) 0, c) -5, d) 2.

3. a), b) 0; c) 1.

4. $a = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, b) $a_1 = 7$, $a_2 = -5$, c) $a_{1,2} = 1$, $a_3 = -2$,

5. $D_a = 3D$, $D_b = -3D$, $D_c = 2D$, $D_d = -3D$, $D_e = 3D$, $D_f = -2D$,

$$6. \text{ a) } \det(A) = -1, A^{-1} = - \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = (-1 \ 0 \ 1)^\top$$

$$7. \text{ a) } 13, \text{ b) } -33, \text{ c) } 792$$

$$8. \text{ a) } \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & -8 & 10 & -2 \\ -11 & 25 & -15 & 3 \end{pmatrix}, \text{ b) } \frac{-1}{33} \begin{pmatrix} -6 & 18 & -12 & -9 \\ 0 & -11 & -11 & 0 \\ -9 & 5 & -7 & 3 \\ -12 & -19 & 20 & 15 \end{pmatrix} \text{ c) } \frac{-1}{792} \begin{pmatrix} 152 & -264 & -96 & 46 \\ 128 & 132 & -60 & -29 \\ 216 & 0 & 72 & -18 \\ -264 & 0 & 0 & 66 \end{pmatrix}$$

$$9. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ b) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ c) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & -3 \\ 2 & -5 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10. \text{ a) } x = -8, y = 15, z = -19, \text{ b) } \{(41, -19, -7)\}, \frac{1}{11}(1, 0, 7, 13)$$

$$11. \text{ a) } f_1(x) = \frac{1-2e^x}{3e^x}, f_2 = \frac{e^x+1}{3e^{2x}}, x \in \mathbb{R},$$

$$\text{b) } f_1(x) = \frac{-\cos x - \sin x \cos x}{\sin x - \cos x}, f_2(x) = \frac{-\cos x}{\sin x - \cos x}, f_3(x) = \frac{2 \sin x \cos x - \cos x}{\sin x - \cos x}, x \notin \{\frac{\pi}{4} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$$