Lineárne operátory.

$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\dots,0); \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\dots,0); \dots; (0,0,0,\dots,0,1)\}$ sa nazýva štandardná báza priestoru C^n.

1. Rozhodnite, či je $T\colon R^2 \to R^2$ lineárny operátor. Ak áno, napíšte jeho maticu vzhľadom na štandardnú bázu.
   a. $T(x_1,x_2) = (x_1, x_2^2)$,
   b. $T(x_1,x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$,
   c. $T(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1x_2)$.
2. Nech $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1 = (2,1); \mathbf{b}_2 = (1,0)\}$ a $T\colon R^2 \to R^2$ je lineárny operátor. Napíšte matice operátora $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$,
   a. $T(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1)$
   b. $T(x_1,x_2) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_1)$
   c. $T(x_1,x_2) = (0, 3x_2 - x_1)$
   d. $T(x_1,x_2) = (x_1, x_2)$
3. Napíšte maticu otočenia o orientovaný uhol α vektora v R^2 okolo počiatku.
4. Nech $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1 = (0,2,1); \mathbf{b}_2 = (0,1,0); \mathbf{b}_3 = (1,1,1)\}$ je báza priestoru R^3 a $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1 = (1,1); \mathbf{d}_2 = (1;-1)$ je báza priestoru R^2. $T\colon R^3 \to R^2$ je lineárny operátor. Napíšte maticu $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$
   a. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_2 - x_3, x_3)$
   b. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_3, x_2 + x_3)$
   c. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_3)$
   d. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + x_3)$
5. Pre oprátory z cvičenia 4 určte dimenziu jadra a oboru hodnôt.
6. Vypočítajte $2AB + CD - 3(A+2D)E$, ak
   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. Vypočítajte maticu unverznú k matici A.
   a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. Nájddite matice $A, B \in C^{n\times n}$, pre ktoré $AB \neq BA$
   a. pre $n = 2$, b. pre $n = 3$.

Výsledky.

1. a) nie je (napr. $T(0,2) \neq 2T(0,1)$), b) $[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, c) nie je (pre $x = (1,1)$ $T(2x) \neq 2Tx$)
2. a) $[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$
   b) $[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$
   c) $[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
   d) $[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $[T_\alpha]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
4. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ -2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
5. a),b),c) $\dim \operatorname{Ker} T = 1$, $\dim \operatorname{Ran} T = 2$; d) $\dim \operatorname{Ker} T = 2$, $\dim \operatorname{Ran} T = 1$
6. a) $\begin{pmatrix} -13 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, b) nedefinované
7. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & -3 \\ 2 & -5 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$