Lineárne priestory.

1. Rozhodnite, či je lineárny priestor nad poľom R (odôvodnite).
   a. $(R^2,+,\cdot)$; ak $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in R^2$, $\forall \alpha\in R$:
   $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, $\quad \alpha\cdot(x_1,x_2)=(\alpha x_1,x_2)$
   b. $(R^2,\oplus,\odot)$; ak $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in R^2$, $\forall \alpha\in R$:
   $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(x_1+y_1,0)$, $\quad \alpha\odot(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)$
   c. Množina $P_n(R)$ všetkých polynómov stupňa najviac n s obvyklými operáciami sčítania a násobenia konštantou.
2. Rozhodnite, či je množina M podpriestor lineárneho priestoru $(R^2,+,\cdot)$.
   a. $M=\{(x_1,x_2)\colon x_1+2x_2=0\}$
   b. $M=\{(x_1,x_2)\colon x_1x_2\geq 0\}$
   c. $M=\{(x_1,x_2)\colon x_1+2x_2=1\}$
   d. $M=\{(x,x)\colon x\geq 0\}$
3. Zistite, či patrí $\mathbf{e}$ do lineárneho obalu množiny M.
   Ak $\mathbf{e}\in \operatorname{span} M$, tak vyjadrite $\mathbf{e}$ ako lineárnu kombináciu prvkov množiny M.
   a. $\mathbf{e}=(-1,2,1,1)$, $M=\{(2,1,0,2),(1,1,-1,0),(1,1,1,1)\}\subset R^4$
   b. $\mathbf{e}=(-1,-1,-1,1)$, $M=\{(2,1,0,2),(1,1,-1,0),(1,1,1,1)\}\subset R^4$
   c. $\mathbf{e}=(0,1,1,0)$, $M=\{(1,2,2,1),(-1,1,-1,1),(0,2,0,2)\}\subset R^4$
   d. $\mathbf{e}=(1+i,1+i\sqrt{3})$ $M=\{(1,0),(1,1+i\sqrt{3})\}\subset C^2$
4. Zistite, či je množina $M\subset R^4$ lineárne závislá alebo nezávislá.
   a. $M=\{(3,2,1,0),(1,1,2,-1),(-1,1,3,1)\}$
   b. $M=\{(3,2,1,0),(1,1,2,-1),(-1,1,3,1),(1,0,1,0)\}$
   c. $M=\{(3,2,1,0),(1,1,2,-1),(-1,1,3,1),(1,0,1,0),(2,-1,-1,0\}$
5. Zistite, či je lineárne nezávislá množina funkcií
   a. $\{1+x,1-x,x\}$
   b. $\{\sin x,\sin 2x,\cos x,\cos 2x\}$
   c. $\{\sin^2 x,\cos^2 x,\sin 2x,\cos 2x\}$
6. Nech $\mathcal{B}=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4\}$ je usporiadaná báza lineárneho priestoru $(L,+,\cdot)$. Napíšte súradnice $\mathbf{x}_\mathcal{B}$ pre
   a. $\mathbf{x}=\mathbf{b}_1-2\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3$
   b. $\mathbf{x}=2\cdot(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_3)-3\cdot(\mathbf{b}_3+2\cdot\mathbf{b}_4)+\mathbf{b}_2$
   c. $\mathbf{x}=\mathbf{b}_4-(2\cdot\mathbf{b}_1-2\cdot\mathbf{b}_2)+3\cdot(\mathbf{b}_3-2\cdot\mathbf{b}_4)$

7 $\mathcal{B}=\{(1,2,3),(0,1,1),(0,1,-1)\}$. Zistite, či je $\mathcal{B}$ báza priestoru R^3 a vypočítajte súradnice $[\mathbf{e}]_\mathcal{B}$, $[\mathbf{f}]_\mathcal{B}$.
   a. $\mathbf{e}=(-1,0,-3)$, $\mathbf{f}=(1,2,3)$
   b. $\mathbf{e}=(-1,1,1)$, $\mathbf{f}=(0,1,-1)$

8. Určte bázu a dimenziu podpriestoru
   a. $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in C^4\colon 2x_1+x_2-x_3+(1+i)x_4=0\}$
   b. $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in C^4\colon x_2+x_3-x_4=2x_1+x_2-3x_4=0\}$
   c. $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in C^4\colon x_1=x_2-x_3=0\}$
   d. $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in C^4\colon (2+i)x_1-x_3=x_2+2x_4=0\}$
9. Nech $(L,+,\cdot)$ je lineárny priestor. Dokážte, že
   a. v lineárnom priestore L existuje jediný nulový prvok $\mathbf{0}$.
   b. $0\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ pre každý prvok $\mathbf{x}\in L$.

Výsledky.

1. a. Nie je, $(1+2)\cdot(0,1)=(0,1)\neq 1\cdot(0,1)+2\cdot(0,1)=(0,2)$;
   b. Nie je, neexistuje nulový prvok. napr. $(1,1)\oplus(a,b)=(1+a,0)\neq(1,1)$, teda žiadne (a,b) nie je nulový prvok.
   c. Áno, je.
2. a) áno, b) nie, c) nie, d) nie.
3. a) nie, b) nie, c) $\mathbf{e}=(1,2,2,1)+(-1,1,-1,1)-(0,2,0,2)$, d) $\mathbf{e}=i(1,0)+(1,1+i\sqrt{3})$.
4. a) LNZ, b) LNZ, c) LZ
5. a) LZ, b) LNZ, c) LZ
6. a) $(1,-2,1,0)^\top$, b) $(2,1,-1,-6)^\top$, c) $(-2,2,3,-5)^\top$
7. a) $[\mathbf{e}]_\mathcal{B}=(-1,1,1)^\top$, $[\mathbf{f}]_\mathcal{B}=(1,0,0)^\top$
   b) $[\mathbf{e}]_\mathcal{B}=(-1,7/2,-1/2)^\top$, $[\mathbf{f}]_\mathcal{B}=(0,0,1)^\top$
8. a) $\mathcal{B}=\{(1,0,2,0);(0,1,1,0);0,0,1+i,1)\}$, $\dim M=3$,
   b) $\mathcal{B}=\{(-1,2,1,0);(1,1,0,1)\}$, $\dim M=2$,
   c) $\mathcal{B}=\{(0,1,1,0);(0,0,0,1)\}$, $\dim M=2$,
   d) $\mathcal{B}=\{(0,-2,0,1);(1,0,2+i,0)\}$ alebo $\mathcal{B}=\{(0,-2,0,1);(\frac{1}{2+i},0,1,0)\}$, $\dim M=2$.