8. Vektory v 3-rozmernom priestore.

1. Vypočítajte skalárny súčin $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ a zistite, či je ich uhol α ostrý, tupý alebo pravý.

a. $\mathbf{u}=(1,-1,2)$, $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$

b. $\mathbf{u}=(1,1,1)$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$

c. $\mathbf{u}=(2,-2,1)$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$

2. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $\mathbf{u}$ do smeru vektora $\mathbf{v}$ a nájdite zložku kolmú na $\mathbf{v}$.

a. $\mathbf{u}=(3,-5,2)$, $\mathbf{v}=(-3,0,4)$,

b. $\mathbf{u}=(-1,2,1)$, $\mathbf{v}=(2,2,1)$

3. Ukážte, že $A=(2,-1,1)$, $B=(3,2,-1)$ a $C=(7,0,-2)$ sú vrcholy pravouhleho trojuholníka. Pri ktorom vrchole je pravý uhol? Vypočítajte jeho obsah P_{ABC}.

4. Vypočítajte $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

a. $\mathbf{u}=(1,-2,-1)$, $\mathbf{v}=(0,1,1)$.

b. $\mathbf{u}=(-2,1,3)$, $\mathbf{v}=(4,-2,-6)$

5. Nájdite vektor dĺžky 1 kolmý aj na $\mathbf{u}$ aj na $\mathbf{v}$.

a. $\mathbf{u}=(1,1,-1)$, $\mathbf{v}=(0,3,1)$

b. $\mathbf{u}=(2,1,0)$, $\mathbf{v}=(0,1,2)$

6. Nájdite obsah trojuholníka ABC.

a. $A=(2,0,1)$, $B=(3,-1,2)$, $C=(-3,4,2)$

b. $A=(1,3,2)$, $B=(5,3,1)$, $C=(-3,1,2)$

7. Nájdite objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

a) $A=(-2,3,1)$, $B=(1,-2,3)$,
$C=(2,1,0)$, $D=(3,2,1)$

b) $A=(-1,4,2)$, $B=(2,3,4)$,
$C=(0,4,2)$, $D=(3,6,3)$

8. Vypočítajte $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$, ak

a. $\|\mathbf{a}\|=3$, $\|\mathbf{b}\|=2$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je $60°$

b. $\|\mathbf{a}\|=5$, $\|\mathbf{b}\|=8$ a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=24$

9. Vypočítajte $\|(3\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-3\mathbf{b})\|$, ak

a. $\|\mathbf{a}\|=3$, $\|\mathbf{b}\|=5$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je $\frac{\pi}{6}$,

b. $\|\mathbf{a}\|=2$, $\|\mathbf{b}\|=3$ a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-3\sqrt{3}$

Výsledky

1. a) 0, pravý, b) -1, tupý, c) 3, ostrý
2. a) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=-\frac{1}{25}(-3,0,4)$, $(3,-5,2)+\frac{1}{25}(-3,0,4)$,
   b) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{1}{3}(2,2,1)$, $(-1,2,1)-\frac{1}{3}(2,2,1)$.
3. Pri vrchole B. $P_{ABC}=\frac{7\sqrt{6}}{2}$.

4a) $(-1,-1,1)$, b) $(0,0,0)$

5a) $\frac{\pm1}{\sqrt{26}}(4,-1,3)$, b) $\frac{\pm1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$

6a) $\frac{1}{2}\sqrt{62}$, b) $\sqrt{21}$.

7a) 34, b) 5

8a)

a. $3\sqrt{3}$, b) 32

9a) $\frac{15}{2}$, b) 3

9. Priamky a roviny v priestore

1. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny s normálovým vektorom $\mathbf{n}$, ktorá prechádza bodom P.

a. $P=(1,2,3)$, $\mathbf{n}=(2,-3,1)$

b. $P=(-2,3,5)$, $\mathbf{n}=(3,7,-2)$

2. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu cez body A,B,C.

a. $A=(1,0,-1)$, $B=(0,2,3)$, $C=(-2,1,1)$

b. $A=(-1,3,2)$, $b=(2,1,-1)$, $C=(3,2,1)$

3. Rozhodnite, či roviny sú rovnobežné.

a. $2x-y+3z+3=0$, $-4x+2y+9z+1=0$

b. $-x+3y+2z+1=0$, $2x-6y-4z+5=0$

4. Rozhodnite, či priamka p a rovina ρ sú rovnobežné.

a. $p\colon x=1+2t, y=3-t, z=-1-4t,\ t\in R$;
$\rho\colon 3x+2y+5z-7=0$

b. $p\colon x=t, y=2t, z=2t,\ t\in R$; $\rho\colon 2x+4y-5z+3=0$

5. Rozhodnite, či sú priamka p a rovina ρ kolmé.

a. $p\colon x=1+2t, y=3-t, z=-1-4t,\ t\in R$;
$\rho\colon -4x+2y+8z+3=0$

b. $p\colon x=4+3t, y=1-2t, z=-1+4t,\ t\in R$;
$\rho\colon x-5y+2z-7=0$

6. Nájdite parametrické rovnice priamky p, ktorá je priesečnicou rovín

a) $\rho_1\colon -2x+3y+7z+2=0$, $\rho_2\colon x+2y-3z+5=0$

b) $\rho_1\colon 3x-5y+2z=0$, $\rho_2\colon x+z=0$

7. Nájdite rovnicu roviny prechadzajúcej cez bod $(-1,4,-3)$, ktorá je kolmá na priamku
$x=2+t, y=-3+2t, z=-t,\ t\in R$.

8. Nájdite rovnicu roviny ρ prechadzajúcej cez bod $(-1,2,4)$, ktorá je rovnobežná s rovinou

a. xy, b. xz, c. $x+y+z+1=0$.

9. Nájdite rovnicu roviny, prechádzajúcej cez bod $(-1,4,2)$, ktorá obsahuje priesečnicu rovín
$4x-y+z-2=0$ a $2x+y-2z-3=0$.

10. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovinou súmernosti bodov (2, - 1, 1) a (3, 1, 5).

11. Nájdite priesečník priamok

a. $p\colon x=-1+4t, y=3+t, z=1,\ t\in R$ a
$q\colon x=-13+12t, y=1+6t, z=2+3t,\ t\in R$.

b. $p\colon x=-1+4t, y=3+t, z=1,\ t\in R$ a
$q\colon x=-13+12t, y=1+6t, z=1+3t,\ t\in R$.

Výsledky

1a) $2x-3y+z+1=0$, b) $3x+7y-2z-5=0$.

2a) $2y-z-1=0$, b) $x+9y-5z-16=0$.

3a) rôznobežné, b) rovnoben.

4a) nie, b) áno $p\parallel\rho$.

5a) áno, $p\perp\rho$, b) nie.

6a) $p\colon x=-41-5t, y=t, z=-12-t,\ t\in R$,
b) $p\colon x=5t, y=t, z=-5t,\ t\in R$.

7. $\rho\colon (x+1)+2(y-4)-(z+3)=0$

8a) $\rho\colon z=4$, b) $\rho\colon y=2$,
c) $\rho\colon (x+1)+(y-2)+(z-4)=0$.

9. $4x-13y+21z-14=0$.

10. $\left(x-\frac{5}{2}\right)+y+4(z-3)=0$

11a) $p\cap q=(-17,-1,1)$, b) $p\cap q=\emptyset$.