LA1 —— PRÍKLADY 1

1. SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

1. Riešte systémy lineárnych rovníc.

a. $$\begin{aligned} x_1+2x_2&=-3\\ 3x_2&=-6\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 3x_1+x_2+2x_3&=11\\ -3x_2+x_3&=-3\\ 7x_3&=21\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+3x_3&=5\\ -x_2+x_3&=i\\ 2x_3&=2+2i\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3&=-4\\ x_2-x_3&=2\end{aligned}$$

2. Napíšte sústavu lineárnych rovníc a množinu všetkých jej riešení, ak jej rozšírená matica je

a. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)$ b. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right)$

c. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & 1 & 1 & 1\\ 0 & i & 2 & i\\ 0 & 0 & 1 & 1+i\end{array}\right)$ d. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)$

e. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$ f. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$

3. Rozhodnite, či je daná matica stupňovitá.

a. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 20\end{pmatrix}$

4. Riešte sústavy lineárnych rovníc

a. $$\begin{aligned} x_1-x_2&=-2\\ -3x_1+2x_2&=3\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 12x_1-x_2+5x_3&=30\\ 3x_1-13x_2+2x_3&=21\\ 7x_1+2x_2+3x_3&=15\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} 7x_1+3x_2-2x_3&=1\\ -x_1+6x_2-3x_3&=2\\ -10x_1+15x_2-11x_3&=4\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} 2x_1-x_2-4x_3&=1\\ x_1-x_2+x_3&=2\\ 4x_1-x_2-2x_3&=5\end{aligned}$$

e. $$\begin{aligned} 3x_1-x_2-6x_3-4x_4&=2\\ 3x_1+4x_2+3x_3-2x_4&=12\\ 4x_1+3x_2-3x_3+4x_4&=-1\\ 5x_1+4x_2-9x_3&=5\end{aligned}$$

f. $$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+2x_3-6x_4&=1\\ 2x_1+2x_2-6x_3+2x_4&=2\\ 2x_1-6x_2+2x_3+2x_4&=3\\ -6x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=4\end{aligned}$$

g. $$\begin{aligned} 2x_1+(2-i)\,x_2&=9\\ -x_1+x_2&=i\end{aligned}$$

h. $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3&=2+i\\ x_1+4x_2+7x_3&=14-3i\\ x_1+3x_2+4x_3&=8-2i\end{aligned}$$

5. Riešte dva systémy s rovnakou maticou pomocou eliminácie na matici 3×5.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-2x_3&=1 \qquad & x_1+2x_2-2x_3&=9\\ 2x_1+5x_2+x_3&=9 \qquad & 2x_1+5x_2+x_3&=9\\ x_1+3x_2+4x_3&=9 \qquad & x_1+3x_2+4x_3&=-2\end{aligned}$$

6. Riešte homogénne sústavy lineárnych rovníc

a. $$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3+x_4&=0\\ x_1-x_2+x_3+x_4&=0\\ 3x_1+x_2+2x_3&=0\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3+x_4&=0\\ x_1-x_2+x_3+x_4&=0\\ 3x_1+x_2+2x_3&=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=0\end{aligned}$$

Výsledky

1. a) $(1,-2)$, b) $(1,2,3)$, c) $(-i,1,1+i)$
   d) $\{(-3+a,2+a,a)\colon a\in R\}$
2. a) $\{(2+p,p,0,-1)\colon p\in R\}$, b) $\emptyset$,
   c) $(-1-2i,-1+2i,1+i)$, d) $\{(a,-2,0,-1)\colon a\in R\}$,
   e) $\{(1+b-a,b,0,a)\colon a,b\in R\}$,
   f) $\left\{\left(\frac{1-3p-q}{2},1-p,p,q\right)\colon p,q\in R\right\}$
3. a) áno, b) nie, c) áno
4. a) $(1,3)$, b) $(2,-1,1)$, c) $\left(\frac{1}{60},\frac{83}{180},\frac{1}{4}\right)$
   d) $\left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, e) $\left(0,2,\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)$, f) $\emptyset$, g) $(2,2+i)$,
   h) $(i,-i,2)$
5. $(-1,2,1)$, $(3,1,-2)$
6. a) $\{a(-2,4,1,5)\colon a\in R\}$, b) $\{(0,0,0,0)\}$

2. LINEÁRNA ZÁVISLOSŤ A NEZÁVISLOSŤ V R^n

1. Rozhodnite, či sú nasledujúce podmnožiny C^3 lineárne nezávislé.

a. $\{(1,1,1),(1,1,-1)\}$,
b. $\{(1,1,1),(1,1,-1),(0,0,2)\}$,
c. $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$,

2. Zistite, či sa vektor $\mathbf{b}$ dá vyjadri ako lineárna kombinácia prvkov množiny $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$, ak

a. $\mathbf{b}=(1,2,3)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$
   $\mathbf{b}_2=(1,1,-1)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,2)\}$.

b. $\mathbf{b} = (1,2,3)\,,\ \mathbf{b}_1 = (1,1,1)$
$\mathbf{b}_2 = (1,1,0)\,,\ \mathbf{b}_3 = (0,1,1)\}\,.$

c. $\mathbf{b} = (1,2,3)\,,\ \mathbf{b}_1 = (1,2,0)$
$\mathbf{b}_2 = (1,2,-1)\,,\ \mathbf{b}_3 = (0,0,1)\}\,.$

3. Určte hodnosť matice:

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$

b. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 5 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$

d. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Výsledky

1. a) nezávislá, b) závislá, c) nezávislá
2. a) nedá, b) dá, c) dá,
3. a) 3, b) 3, c) 4, d) 3, e) 2

3. MATICOVÉ OPERÁCIE

1. Vypočítajte $2A$, $A+B$, AB, BA (ak existujú) pre matice:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$

2. K danej matici nájdite inverznú maticu.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ h. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

i. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

j. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ k. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3*. Nech $n \in N, n > 1$. Nájdite takú maticu E, aby pre každú maticu $A \in R^{3\times n}$ platilo

a. $B = EA$ vznikne z matice A pomocou ERO $A_{2*} := A_{2*} + 3A_{1*}$ (pričítania $3R_1$ k R_2),

b. EA vznikne z matice A zámenou $A_{1*} \leftrightarrow A_{3*}$,

c. EA vznikne z matice A zámenou $A_{*1} \leftrightarrow A_{*3}$.

4*. Matice z príkladu 2 a k nim inverzné matice vyjadrite ako súčin elementárnych matíc (t.j. matíc, ktoré vznikli z jednotkovej matice pomocou jednej ERO).

Výsledky

1. a) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$
$A+B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ AB \not\exists,\ BA \not\exists$
b) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix},\ A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$
$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$
c) $2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$
$A+B \not\exists,\ BA \not\exists$
d) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$
$A+B \not\exists,\ BA \not\exists$
2. a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$ c) $\not\exists$,
d) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$ e) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ -6 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix},$
f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$ g) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$
h) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$ i) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$

j) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$,

k) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. DETERMINANTY

1. Vypočítajte nasledujúce determinanty.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 2+i & 2 \\ 5 & 5-i \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} a-2 & a+2 \\ b-2 & b+2 \end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

2. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Vypočítajte hodnoty $\det A_{31}$, $\det A_{32}$, $\det A_{33}$, kde A_{ij} je matica, ktorá vznikne z matice A vynechaním riadku R_i a stĺpca S_j.

(b) Vypočítajte hodnoty algebraických doplnkov $\tilde{a}_{31}$, $\tilde{a}_{32}$, $\tilde{a}_{33}$.

(c) Pomocou výsledkov z častí a), b) vypočítajte det A

3. Platí tvrdenie: Ak $A, B \in R^{3\times 3}$, tak $\det(A+B) = \det a + \det B$? Svoje tvrdenie odôvodnite.

4. Napíšte hodnotu determinantu

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5. Vypočítajte determinanty

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & b & a & b \\ c & d & c & d \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

6. Vypočítajte determinanty matíc stupňa $n, n > 1$

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Výsledky

1. a) -4, b) 0, c) $1+3i$, d) 4, e) $4(a-b)$, f) 1
2. (a) 11, 1, -4, (b) 11, -1, -4, c) -3
3. Nie. Návod na odôvodnenie: nájdite maticu $A \in C^{3\times 3}$, pre ktorú $\det 2A \neq 2\det A$.
4. a) 0, b) 0, c) -25, d) 45, e) -15, f) 1.
5. a) 0, b) $(ad-bc)^2$, c) -48, d) -4, e) 19×6^4
6. a) $(-1)^{n+1}n$, b) $\prod\limits_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$

5. KOMPLEXNÉ ČÍSLA

1. Nájdite výsledok operácie v algebraickom tvare, t.j. $x + yi$, kde $x, y \in R$.

a. $3 + 7i - (5-2i)(4-i)$

b. $i(1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)$

c. $\frac{(1-7i)}{(2+3i)}$ d. $\frac{a+bi}{a-bi}$, $a, b \in R$ e. $\frac{i(2+3i)}{3+5i}$

2. Nájdite $x, y \in R$ také, že

a. $(2x+3y) + i(x-y) = -1+2i$

b. $(ix+y)(2x-3iy) = 2i$

c. $\dfrac{-y+ix}{1-2i} + \dfrac{x+iy}{2+3i} = 1$

3. Dané komplexné číslo znázornite a nájdite jeho goniometrický tvar.

a. -5 b. $1-i$ c. $\sqrt{3}-i$

d. $-5i$ e. $2+3i$ f. $-3-7i$

4. Vypočítajte $zu, \frac{z}{u}, z^n$.

a. $z = \sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5})$, $u = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, $n = 5$

b. $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $u = 6(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$, $n = 2004$

5. V obore komplexných čísel riešte rovnicu. Vsledok napíte v algebraickom aj goniometrickom (alebo exponenciálnom) tvare a znázornite.

a. $z^4 = 4$ b. $z^4 = -4$ c. $z^3 = -8i$

d. $z^4 = -1 - i\sqrt{3}$ e. $z^5 = i$

6. Vypočítajte. a) i^{101}, b) $(1+i)^4$ c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$

Výsledky

1. a) $-15+20i$, b) $10i$, c) $-\frac{19}{13} - \frac{17}{13}i$, d) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$, e) $\frac{1}{34} + \frac{21}{34}i$
2. a) $x = 1$, $y = -1$, b) $x = \pm 1$, $y = 0$, c) $x = -4$, $y = \frac{1}{2}$

3. a) $5(\cos\pi + i\sin\pi)$, b) $\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$,
   c) $2(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi)$, d) $5(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)$,
   e) $\sqrt{13}\big(\cos\big(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\big) + i\sin\big(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\big)\big)$
   f) $\sqrt{58}\big(\cos\big(\pi + \operatorname{arctg}\frac{7}{3}\big) + i\sin\big(\pi + \operatorname{arctg}\frac{7}{3}\big)\big)$
4. a) $2\sqrt{3}(\cos\frac{26}{15}\pi + i\sin\frac{26}{15}\pi)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{16}{15}\pi + i\sin\frac{16}{15}\pi)$, $-9\sqrt{3}$
   b) $18\big(\cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi\big)$, $\frac{1}{2}\big(\cos\frac{1}{8}\pi - i\sin\frac{1}{8}\pi\big)$, -3^{2004}
5. a) $z_k = \sqrt{2}\big(\cos k\frac{\pi}{2} + i\sin k\frac{\pi}{2}\big)$, $k = 0,1,2,3$.
   b) $z_k = \sqrt{2}\big(\cos\big(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\big) + i\sin\big(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\big)\big)$, $k = 0,1,2,3$.
   c) $z_k = 2\big(\cos\big(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}\big) + i\sin\big(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}\big)\big)$, $k = 0,1,2$.

d) $z_k = \sqrt[4]{2}\big(\cos\big(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\big) + i\sin\big(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\big)\big)$, $k = 0,1,2,3$.

e) $z_k = e^{i(\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5})}$, $k = 0,1,2,3,4$

6. a) i, b) -4, c) 1

6. CRAMEROVO PRAVIDLO

1. Použite determinanty na nájdenie inverznej matice

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

2. Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavy:

a. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -3 \\ 3x_1 + 8x_2 &= 2 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 5i - 3 \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 11x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

e. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= -4 \end{aligned}$$

f. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3.* Dokážte tvrdenie: Ak $A, B \in R^{n\times n}$ a $\det(A) = 0$ alebo $\det(B) = 0$, tak aj $\det(AB) = 0$ (t.j. V takom prípade platí $\det(AB) = \det(A)\det(B)$).

4.* Platí tvrdenie $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pre každú dvojicu matíc $A, B \in R^{n\times n}$? (pomcka: najprv ukážte, že to platí, ak je A elementárna matica).

Výsledky

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & -5 \\ -3 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

2a) $(-2,1)^\top$, b) $\frac{1}{5}(2,7)^\top$, c) $(i, 1-i)^\top$

d) $\big(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{1}{11}\big)^\top$, e) $\big(-\frac{26}{11}, \frac{23}{11}, -\frac{7}{11}\big)^\top$, f) $\big(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\big)^\top$

7. POLYNÓMY

1. Určte stupeň polynómu $f(x)$
   a. $f(x) = 1 + x + ix$
   b. $f(x) = 3x + 2 - 5x^3$
   c. $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots x^n$, $n \in N$.
2. Vynásobte a nájdite stupeň súčinu $f(x)\cdot g(x)$
   a. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 - 1$
   b. $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = (x - i)$
3. Deľte (určte podiel a zvyšok).
   a. $(x^4 + 1) : (x - 1)$,
   b. $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$
   c. $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$
4. Daný polynóm rozložte na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad R a nad C.
   a. $2x^2 - x - 1$
   b. $2x^2 - x + 1$
   c. $3x^3 - x^2 + 3x - 1$
   d. $x^4 + 4$ (overte najprv, že $1 + i$ je koreň)
   e. $2x^3 - x - 1$
   f. $2x^4 - x^3 + 7x^2 - 4x - 4$
   g. $2x^5 - x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 4x$
5. Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte hodnotu $f(c)$, ak
   a. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $c = 4$
   b. $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 4x + 2$, $c = -\frac{1}{3}$
   c. $f(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7$, $c = -2 - i$
6. Nájdite takú hodnotu parametra a, že c bude koreňom polynómu $f(x)$.
   a. $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2$, $c = 3$
   b. $f(x) = 2x^6 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a$, $c = -1$
7. Nájdite násobnosť koreňa c polynómu $f(x)$.
   a. $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8$, $c = 2$
   b. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $c = 2$
   c. $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $c = -2$
   d. $f(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 - x^2 + 2ix + 1$, $c = i$
8. Nájdite všetky racionálne korene polynómu
   a. $2x^7 - 13x^6 + 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 22x + 3$
   b. $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$
   c* $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$
   d. $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$
9. Daný polynóm rozložte na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad R, najprv overte, či je $c \in C$ jeho koreňom.
   a. $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 8x - 5$, $c = -1 - 2i$
   b. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 10$, $c = 1 + i$
   c. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25$, $c = 2 + i$
   d. $f(x) = x^6 - 7x^5 + 18x^4 - 24x^3 + 23x^2 - 17x + 6$, $c = i$

Výsledky

1. a) 1, b) 3, c) n
2. a) $x^5+x^3-x^2-1$, 5, b) $x^4-ix^3+x^2+(1-i)x-i$, 4
3. a) $(x^4+1)=(x-1)(x^3+x^2+x+1)+2$, (zv. 2)
   b) $(x^3+x^2+x+1)=(x+1)(x^2+1)$, (zv. 0),
   c) $(x^3+x^2+x+1)=(x^2+1)(x+1)$, (zv. 0)
4. Nad R:
   a) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, b) $2x^2-x+1$, c) $(x^2+1)(3x-1)$,
   d) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$, e) $(2x^2+2x+1)(x-1)$,
   f) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x^2+4)$, g) $2x(x-1)(x+\frac{1}{2})(x^2+4)$
   nad C:
   a) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, b) $2(x-\frac{1+i\sqrt{7}}{4})(x-\frac{1-i\sqrt{7}}{4})$,
   c) $(x+i)(x-i)(3x-1)$,
   d) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$,
   e) $2(x-1)(x+\frac{1}{2}+i\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}-i\frac{1}{2})$,
   f) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+2i)(x-2i)$,
   g) $2x(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+2i)(x-2i)$
5. a) 136, b) 1 c) $-1-44i$
6. a) $\frac{47}{3}$, b) -1
7. a) 2, b) 3, c) 4, d) 3,
8. a) $1,1,-\frac{3}{2}$, b) $-\frac{2}{3},2$, c) $\emptyset$, d) $-1,-1,-1,-1,3$
9. a) $2(x^2+2x+5)(x^2+1)(x-\frac{1}{2})$,
   b) $(x^2-2x+2)(x^2+4x+5)$, c) $(x^2-4x+5)^2$
   d) $(x-1)^2(x-3)(x-2)(x^2+1)$

8. RACIONÁLNE FUNKCIE

1. Napíšte, či je daná funkcia elementárnym zlomkom nad R.
   a. $\dfrac{2x+1}{x^2+5x+6}$
   b. $\dfrac{2x+1}{(x^2+4x+5)^n}$, $n\in N$
   c. $\dfrac{2x+1}{(x-2)^2}$
   d. $\dfrac{1}{(x-2)^2}$
2. Danú racionálnu funkciu napíšte v tvare súčtu polynómu a elementárnych zlomkov nad R.
   a. $\dfrac{x^4+2x^3+4x^2+2x+1}{x^3+x^2-2}$
   b. $\dfrac{x^2+2x}{x^3+3x^2+3x+1}$
   c. $\dfrac{x^2-6x+7}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}$
   d. $\dfrac{3x^3-12x^2+12x-1}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}$
   e. $\dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$
   f. $\dfrac{2x^3+7x^2+14x+8}{(x^2+2x+2)^2}$
3. Napíšte tvar rozkladu danej racionálnej funkcie na súčet elementárnych zlomkov.
   a. $\dfrac{f(x)}{(2x+1)^3(x-1)^2(2x^2-2x+1)}$, $\deg f(x)=6$
   b. $\dfrac{x}{(x^2+1)^3(x^2-1)^3}$

Výsledky

1. a) $D=5^2-4\cdot 6=1>0 \implies$ nie je,
   b) $D=-4<0$, $\mathrm{st}(2x+1)=1 \implies$ áno, c) nie je,
   d) áno
2. a) $(x+1)+\frac{2}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ b) $\frac{-1}{(x+1)^3}+\frac{1}{x+1}$,
   c) $\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}$ d) $\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}$,
   e) $\frac{2x+3}{x^2+2x+2}$ je el. zlomok f) $\frac{2x+3}{x^2+2x+2}+\frac{4x+2}{(x^2+2x+2)^2}$
3. a) $\frac{a}{(2x+1)^3}+\frac{b}{(2x+1)^2}+\frac{c}{2x+1}++\frac{d}{(x-1)^2}+\frac{e}{x-1}+\frac{fx+g}{2x^2-2x+1}$,
   $a,b,c,d,e,f,g\in R$
   b) $\frac{ax+b}{(x^2+1)^3}+\frac{cx+d}{(x^2+1)^2}+\frac{ex+f}{x^2+1}+\frac{g}{(x-1)^3}+\frac{h}{(x-1)^2}+\frac{k}{x-1}+$
   $\frac{l}{(x+1)^3}+\frac{m}{(x+1)^2}+\frac{n}{x+1}$, $a,b,c,d,e,f,g,h,k,l,m,n\in R$

9. VEKTORY V 3–ROZMERNOM PRIESTORE.

1. Vypočítajte skalárny súčin $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ a zistite, či je ich uhol α ostrý, tupý alebo pravý.
   a. $\mathbf{u}=(1,-1,2)$, $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$
   b. $\mathbf{u}=(1,1,1)$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$
   c. $\mathbf{u}=(2,-2,1)$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$
2. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $\mathbf{u}$ do smeru vektora $\mathbf{v}$ a nájdite zložku kolmú na $\mathbf{v}$.
   a. $\mathbf{u}=(3,-5,2)$, $\mathbf{v}=(-3,0,4)$,
   b. $\mathbf{u}=(-1,2,1)$, $\mathbf{v}=(2,2,1)$
3. Ukážte, že $A=(2,-1,1)$, $B=(3,2,-1)$ a $C=(7,0,-2)$ sú vrcholy pravoúhleho trojuholníka. Pri ktorom vrchole je pravý uhol? Vypočítajte jeho obsah P_{ABC}.
4. Vypočítajte $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.
   a. $\mathbf{u}=(1,-2,-1)$, $\mathbf{v}=(0,1,1)$.
   b. $\mathbf{u}=(-2,1,3)$, $\mathbf{v}=(4,-2,-6)$
5. Nájdite vektor dĺžky 1 kolmý aj na $\mathbf{u}$ aj na $\mathbf{v}$.
   a. $\mathbf{u}=(1,1,-1)$, $\mathbf{v}=(0,3,1)$
   b. $\mathbf{u}=(2,1,0)$, $\mathbf{v}=(0,1,2)$
6. Nájdite obsah trojuholníka ABC.
   a. $A=(2,0,1)$, $B=(3,-1,2)$, $C=(-3,4,2)$
   b. $A=(1,3,2)$, $B=(5,3,1)$, $C=(-3,1,2)$
7. Nájdite objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.
   a) $A=(-2,3,1)$, $B=(1,-2,3)$, $C=(2,1,0)$, $D=(3,2,1)$
   b) $A=(-1,4,2)$, $B=(2,3,4)$, $C=(0,4,2)$, $D=(3,6,3)$
8. Vypočítajte $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$, ak
   a. $\|\mathbf{a}\|=3$, $\|\mathbf{b}\|=2$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je $60°$
   b. $\|\mathbf{a}\|=5$, $\|\mathbf{b}\|=8$ a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=24$
9. Vypočítajte $\|(3\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-3\mathbf{b})\|$, ak
   a. $\|\mathbf{a}\|=3$, $\|\mathbf{b}\|=5$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je $\frac{\pi}{6}$,
   b. $\|\mathbf{a}\|=2$, $\|\mathbf{b}\|=3$ a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-3\sqrt{3}$

Výsledky

1. a) 0, pravý, b) -1, tupý, c) 3, ostrý
2. a) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = -\frac{1}{25}(-3,0,4)$, $(3,-5,2) + \frac{1}{25}(-3,0,4)$,
   b) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2,2,1)$, $(-1,2,1) - \frac{1}{3}(2,2,1)$.
3. Pri vrchole B. $P_{ABC} = \frac{7\sqrt{6}}{2}$.

4a) $(-1,-1,1)$, b) $(0,0,0)$
5a) $\frac{\pm 1}{\sqrt{26}}(4,-1,3)$, b) $\frac{\pm 1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$
6a) $\frac{1}{2}\sqrt{62}$, b) $\sqrt{21}$.
7a) 34, b) 5
8a)
a. $3\sqrt{3}$, b) 32
9a) 75, b) 30

10. PRIAMKY A ROVINY V PRIESTORE

1. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny s normálovým vektorom $\mathbf{n}$, ktorá prechádza bodom P.
   a. $P = (1,2,3)$, $\mathbf{n} = (2,-3,1)$
   b. $P = (-2,3,5)$, $\mathbf{n} = (3,7,-2)$
2. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu cez body A, B, C.
   a. $A = (1,0,-1)$, $B = (0,2,3)$, $C = (-2,1,1)$
   b. $A = (-1,3,2)$, $B = (2,1,-1)$, $C = (3,2,1)$
3. Rozhodnite, či roviny sú rovnobežné.
   a. $2x - y + 3z + 3 = 0$, $-4x + 2y + 9z + 1 = 0$
   b. $-x + 3y + 2z + 1 = 0$, $2x - 6y - 4z + 5 = 0$
4. Rozhodnite, či priamka p a rovina ρ sú rovnobežné.
   a. $p\colon x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = -1 - 4t,\ t \in R$;
   $\rho\colon 3x + 2y + 5z - 7 = 0$
   b. $p\colon x = t, y = 2t, z = 2t,\ t \in R$; $\rho\colon 2x + 4y - 5z + 3 = 0$
5. Rozhodnite, či sú priamka p a rovina ρ kolmé.
   a. $p\colon x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = -1 - 4t,\ t \in R$;
   $\rho\colon -4x + 2y + 8z + 3 = 0$
   b. $p\colon x = 4 + 3t, y = 1 - 2t, z = -1 + 4t,\ t \in R$;
   $\rho\colon x - 5y + 2z - 7 = 0$
6. Nájdite parametrické rovnice priamky p, ktorá je priesečnicou rovín
   a) $\rho_1\colon -2x + 3y + 7z + 2 = 0$, $\rho_2\colon x + 2y - 3z + 5 = 0$
   b) $\rho_1\colon 3x - 5y + 2z = 0$, $\rho_2\colon x + z = 0$
7. Nájdite rovnicu roviny prechadzajúcej cez bod $(-1,4,-3)$, ktorá je kolmá na priamku $x = 2 + t, y = -3 + 2t, z = -t,\ t \in R$.
8. Nájdite rovnicu roviny ρ prechadzajúcej cez bod $(-1,2,4)$, ktorá je rovnobežná s rovinou
   a. xy, b. xz, c. $x + y + z + 1 = 0$.
9. Nájdite rovnicu roviny, prechádzajúcej cez bod $(-1,4,2)$, ktorá obsahuje priesečnicu rovín $4x - y + z - 2 = 0$ a $2x + y - 2z - 3 = 0$.
10. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovinou súmernosti bodov (2, - 1, 1) a (3, 1, 5).
11. Nájdite priesečník priamok
    a. $p\colon x = -1 + 4t, y = 3 + t, z = 1,\ t \in R$ a
    $q\colon x = -13 + 12t, y = 1 + 6t, z = 2 + 3t,\ t \in R$.
    b. $p\colon x = -1 + 4t, y = 3 + t, z = 1,\ t \in R$ a
    $q\colon x = -13 + 12t, y = 1 + 6t, z = 1 + 3t,\ t \in R$.
12. Vypočítajte vzdialenosť bodu A od priamky p
    a. $A = (2,1,3)$,
    $p\colon x = 1 + t,\ y = -3 + 2t,\ z = -t,\ t \in R$
    b. $A = (3,-1,0)$,
    $p\colon x = 2 + 3t,\ y = -1 + t,\ z = 1 - t,\ t \in R$
13. Vypočítajte vzdialenosť bodu A od roviny ρ
    a. $A = (1,-2,3)$, $\rho\colon 2x - 2y + 4 = 0$
    b. $A = (0,1,5)$, $\rho\colon 3x + 6y - 2z - 5 = 0$
    c. $A = (1,1,1)$,
    $\rho\colon x = 1 - t + 3s,\ y = -1 + t + s,\ z = 2t - s$
14. Nájdite bod Q symetrický s bodom $P = (9,-6,6)$ vzhľadom na rovinu $2x - y + z - 12 = 0$
15. Nájdite priamku p kolmú na rovinu
    $\rho\colon x = 1 + s, y = t, z = 1 + t + s,\ t, s \in R$
    a prechádzajúcu bodom $A = (0,1,2)$.

Výsledky

1a) $2x - 3y + z + 1 = 0$, b) $3x + 7y - 2z - 5 = 0$.
2a) $2y - z - 1 = 0$, b) $x + 9y - 5z - 16 = 0$.
3a) rôznobežné, b) rovnobežné
4a) nie, b) áno $p \parallel \rho$.
5a) áno, $p \perp \rho$, b) nie.
6a) $p\colon x = -41 + 23t, y = -t, z = -12 + 7t,\ t \in R$,
b) $p\colon x = 5t, y = t, z = -5t,\ t \in R$.
7. $\rho\colon (x+1) + 2(y-4) - (z+3) = 0$
8a) $\rho\colon z = 4$, b) $\rho\colon y = 2$,
c) $\rho\colon (x+1) + (y-2) + (z-4) = 0$.
9. $4x - 13y + 21z + 14 = 0$.
10. $\left(x - \frac{5}{2}\right) + 2y + 4(z-3) = 0$
11a) $p \cap q = (-17,-1,1)$, b) $p \cap q = \emptyset$.
12a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6/11}$
13a) $5/\sqrt{2}$, b) $9/7$, c) $6/5\sqrt{2}$
14) $Q = (-3,0,0)$
15) $p\colon x = t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - t,\ t \in R$

11. KVADRATICKÉ PLOCHY

1. Určte typ a načrtnite kvadratickú plochu
   a) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 4y + 8z + 9 = 0$ (guľová plocha, $S = (1,-1,-2)$, $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$)
   b) $-x^2 + y^2 - 4z^2 - 4x - 2y - 8z - 7 = 0$ (eliptická kužeľová plocha, $V = (-2,1,-1)$)
   c) $4x^2 - 2y^2 + z^2 + 8x + 4y + 6z + 7 = 0$ (jednodielny hyperboloid, $S = (-1,1,-3)$)
   d) $9y^2 - 4z^2 + 18y - 16z - 43 = 0$ (hyperbolická valcová plocha)
   e) $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 16x - 18y - 4z + 28 = 0$ (elipsoid, stred $S = (-2,1,2)$)
   f) $x^2 + 4z^2 + 2x + 8y - 8z + 9 = 0$ (eliptický paraboloid $V = (-1,-1/2,1)$)
   g) $2x^2 - y^2 + 12x + 4z + 14 = 0$ (hyperbolický paraboloid $V = (-3,0,1)$)
   h) $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 8x + 2y + 8z + 5 = 0$ (dvojdielny hyperboloid, $S = (1,-1,1)$)
   i) $y^2 + 4z^2 + 2y - 8z + 1 = 0$ (eliptická valcová plocha)