M1 —— PRÍKLADY 1

1. KOMPLEXNÉ ČÍSLA

1. Nájdite výsledok operácie v tvare $x+yi$, kde $x, y \in R$.
   a. $3+7i-(5-2i)(4-i)$
   b. $i(1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)$
   c. $\frac{(1-7i)}{(2+3i)}$
   d. $\frac{a+bi}{a-bi}$, $a, b \in R$
   e. $\frac{i(2+3i)}{3+5i}$
2. Nájdite $x, y \in R$ také, e
   a. $(2x+3y)+i(x-y)=-1+2i$
   b. $(ix+y)(2x-3iy)=2i$
   c. $\dfrac{-y+ix}{1-2i}+\dfrac{x+iy}{2+3i}=1$
3. Dané komplexné číslo znázornite a nájdite jeho goniometrický tvar.
   a. -5
   b. $1-i$
   c. $\sqrt{3}-i$
   d. $-5i$
   e. $2+3i$
   f. $-3-7i$
4. Vypočítajte $zu, \frac{z}{u}, z^n$.
   a. $z=\sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5})$, $u=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$, $n=5$
   b. $z=3(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, $u=6(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8})$, $n=2004$
5. V obore komplexných čísel riešte rovnicu.
   a. $z^4=4$
   b. $z^4=-4$
   c. $z^3=-8i$
   d. $z^4=-1-i\sqrt{3}$
6. Vypočítajte.
   a. i^{101}
   b. $(1+i)^4$
   c. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$

Výsledky

1. a) $-15+20i$, b) $10i$, c) $-\frac{19}{13}-\frac{17}{13}i$,
   d) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$, e) $\frac{1}{34}+\frac{21}{34}i$
2. a) $x=1$, $y=-1$, b) $x=\pm1$, $y=0$, c) $x=-4$, $y=\frac{1}{2}$
3. a) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$, b) $\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)$,
   c) $2(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi)$, d) $5(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi)$,
   e) $\sqrt{13}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)\right)$
   f) $\sqrt{58}\left(\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{7}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{7}{3}\right)\right)$
4. a) $2\sqrt{3}(\cos\frac{26}{15}\pi+i\sin\frac{26}{15}\pi)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{16}{15}\pi+i\sin\frac{16}{15}\pi)$, $-9\sqrt{3}$
   b) $18\left(\cos\frac{5}{8}\pi+i\sin\frac{5}{8}\pi\right)$, $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{8}\pi-i\sin\frac{1}{8}\pi\right)$, -3^{2004}
5. a) $z_k=\sqrt{2}\left(\cos k\frac{\pi}{2}+i\sin k\frac{\pi}{2}\right)$, $k=0,1,2,3$.
   b) $z_k=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $k=0,1,2,3$.
   c) $z_k=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $k=0,1,2$.
   d) $z_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $k=0,1,2,3$.
6. a) i, b) -4, c) 1

2. SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

1. Riešte systémy lineárnych rovníc.

a.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2&=-3\\ 3x_2&=-6 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 3x_1+x_2+2x_3&=11\\ -3x_2+x_3&=-3\\ 7x_3&=21 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+3x_3&=5\\ -x_2+x_3&=i\\ 2x_3&=2+2i \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3&=-4\\ x_2-x_3&=2 \end{aligned}$$

2. Napíšte sústavu lineárnych rovníc a množinu všetkých jej riešení, ak jej rozšírená matica je

a. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ b. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

c. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & 1 & 1 & 1\\ 0 & i & 2 & i\\ 0 & 0 & 1 & 1+i \end{array}\right)$ d. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

e. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ f. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

3. Rozhodnite, či je daná matica stupňovitá.

a. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

4. Riešte sústavy lineárnych rovníc

a.
$$\begin{aligned} x_1-x_2&=-2\\ -3x_1+2x_2&=3 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 12x_1-x_2+5x_3&=30\\ 3x_1-13x_2+2x_3&=21\\ 7x_1+2x_2+3x_3&=15 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 7x_1+3x_2-2x_3&=1\\ -x_1+6x_2-3x_3&=2\\ -10x_1+15x_2-11x_3&=4 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2-4x_3&=1\\ x_1-x_2+x_3&=2\\ 4x_1-x_2-2x_3&=5 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} 3x_1-x_2-6x_3-4x_4&=2\\ 3x_1+4x_2+3x_3-2x_4&=12\\ 4x_1+3x_2-3x_3+4x_4&=-1\\ 5x_1+4x_2-9x_3&=5 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

g.
$$\begin{aligned} 2x_1 + (2-i)\,x_2 &= 9 \\ -x_1 + x_2 &= i \end{aligned}$$

h.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_2 &= 2 + i \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 14 - 3i \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8 - 2i \end{aligned}$$

5. Riešte dva systémy s rovnakou maticou pomocou eliminácie na matici 3×5.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \qquad & x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \qquad & 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \qquad & x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

6. Riešte homogénne sústavy lineárnych rovníc

a.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledky

1. a) $(1,-2)$, b) $(1,2,3)$, c) $(-i,1,1+i)$
   d) $\{(-3+a, 2+a, a) \colon a \in R\}$
2. a) $\{(2+p, p, 0, -1) \colon p \in R\}$, b) $\emptyset$,
   c) $(-1-2i, -1+2i, 1+i)$, d) $\{(a,-2,0,-1) \colon a \in R\}$,
   e) $\{(1+b-a, b, 0, a) \colon a, b \in R\}$,
   f) $\left\{\left(\frac{1+p+q}{2}, 1-p, p, q\right) \colon p, q \in R\right\}$
3. a) áno, b) nie, c) áno
4. a) $(1,3)$, b) $(2,-1,1)$, c) $\left(\frac{1}{60}, \frac{83}{180}, \frac{1}{4}\right)$
   d) $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, e) $\left(0, 2, \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right)$, f) $\emptyset$, g) $(2, 2+i)$,
   h) $(i, -i, 2)$
5. $(-1,2,1)$, $(3,1,-2)$
6. a) $\{a(-2,4,1,5) \colon a \in R\}$, b) $\{(0,0,0,0)\}$

3. MATICOVÉ OPERÁCIE

1. Vypočítajte $2A$, $A+B$, AB, BA (ak existujú) pre matice:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

2. K danej matici nájdite inverznú maticu.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ h. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

i. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

j. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ k. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Výsledky

1. a) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,
   $A+B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $AB \not\exists$, $BA \not\exists$
   b) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,
   $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
   c) $2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,
   $A+B \not\exists$, $BA \not\exists$
   d) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
   $A+B \not\exists$, $BA \not\exists$
2. a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\not\exists$,
   d) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ -6 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, g) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

h) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, i) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

j) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$,

k) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. DETERMINANTY

1. Vypočítajte nasledujúce determinanty.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 2+i & 2 \\ 5 & 5-i \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} a-2 & a+2 \\ b-2 & b+2 \end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

2. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Vypočítajte hodnoty $\det A_{31}$, $\det A_{32}$, $\det A_{33}$, kde A_{ij} je matica, ktorá vznikne z matice A vynechaním riadku R_i a stĺpca S_j.
   (b) Vypočítajte hodnoty algebraických doplnkov $\tilde{a}_{31}$, $\tilde{a}_{32}$, $\tilde{a}_{33}$.
   (c) Pomocou výsledkov z častí a), b) vypočítajte $\det A$
3. Platí tvrdenie: Ak $A, B \in C^{3\times 3}$, tak $\det(A+B) = \det a + \det B$? Svoje tvrdenie odôvodnite.
4. Napíšte hodnotu determinantu

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5. Vypočítajte determinanty

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & b & a & b \\ c & d & c & d \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

6. Vypočítajte determinanty matíc stupňa $n, n > 1$

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Výsledky

1. a) -4, b) 0, c) $1+3i$, d) 4, e) $4(a-b)$, f) 1
2. (a) 11, 1, -4, (b) 11, -1, -4, c) -3
3. Nie. Návod na odôvodnenie: nájdite maticu $A \in C^{3\times 3}$, pre ktorú $\det 2A \neq 2 \det A$.
4. a) 0, b) 0, c) -30, d) 45, e) -15, f) 1.
5. a) 0, b) $(ad-bc)^2$, c) -48, d) -2, e) 19×6^4
6. a) $(-1)^{n+1}n$, b) $\prod\limits_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$

5. CRAMEROVO PRAVIDLO

1. Použite determinanty na nájdenie inverznej matice

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

2. Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavy:

a. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -3 \\ 3x_1 + 8x_2 &= 2 \end{aligned}$ b. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 5i - 3 \end{aligned}$ d. $\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 11x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= -4 \end{aligned}$ f. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

Výsledky

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & -5 \\ -3 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

2a) $(-2, 1)^\top$, b) $(2/5, 7/5)^\top$, c) $(i, 1-i)^\top$

d) $\left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{1}{11}\right)^\top$, e) $\left(-\frac{26}{11}, \frac{23}{11}, -\frac{7}{11}\right)^\top$, f) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^\top$

6. LINEÁRNA ZÁVISLOSŤ A NEZISLOSŤ V C^n

1. Rozhodnite, či sú nasledujúce podmnožiny C^3 lineárne nezávislé, tie ktoré sú nezávislé doplňte na bázu C^3.
a. $\{(1,1,1),(1,1,-1)\}$,
b. $\{(1,1,1),(1,1,-1),(0,0,2)\}$,
c. $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$,
2. Zistite, či $\mathbf{b}$ patrí do linerneho obalu množiny $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$, ak
a. $\mathbf{b}=(1,2,3)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$
$\mathbf{b}_2=(1,1,-1)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,2)\}$.
b. $\mathbf{b}=(1,2,3)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$
$\mathbf{b}_2=(1,1,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,1,1)\}$.
c. $\mathbf{b}=(1,2,3)$, $\mathbf{b}_1=(1,2,0)$
$\mathbf{b}_2=(1,2,-1)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,1)\}$.
3. Určte hodnosť matice:
a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,
b. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 5 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,
d. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
4. Zistite aká je dimenzia podpriestoru $M \subset R^4$ tak, že ho vyjadríte ako lineárny obal lineárne nezávislej množiny.
a. $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4\colon x_1+2x_2-x_3+x_4=0\}$
a. $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4\colon x_1+2x_2-x_3+x_4=0,$
$x_3+x_4=0\}$.

Výsledky

1. a) nezávislá, b) zvisl, c) nezávislá
2. a) nepatrí, b) patrí, c) patrí,
3. a) 2, b) 3, c) 4, d) 3, e) 2
4a. $M=\{(-2a+b-c,a,b,c)\colon a,b,c\in R\}=$
$\mathrm{Lo}\{(-2,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$, $\dim M=3$.
b. $M=\mathrm{Lo}\{(-2,1,0,0),(-2,0,-1,1)\}$, $\dim M=2$.

7. VEKTORY V 3–ROZMERNOM PRIESTORE.

1. Vypočítajte skalrny súčin $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ a zistite, i je ich uhol α ostrý, tupý alebo pravý.
a. $\mathbf{u}=(1,-1,2)$, $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$
b. $\mathbf{u}=(1,1,1)$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$
c. $\mathbf{u}=(2,-2,1)$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$
2. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $\mathbf{u}$ do smeru vektora $\mathbf{v}$ a nájdite zložku kolmú na $\mathbf{v}$.
a. $\mathbf{u}=(3,-5,2)$, $\mathbf{v}=(-3,0,4)$,
b. $\mathbf{u}=(-1,2,1)$, $\mathbf{v}=(2,2,1)$
3. Ukážte, že $A=(2,-1,1)$, $B=(3,2,-1)$ a $C=(7,0,-2)$ sú vrcholy pravoúhleho trojuholníka. Pri ktorom vrchole je pravý uhol? Vypočítajte jeho obsah P_{ABC}.
4. Vypočítajte $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.
a. $\mathbf{u}=(1,-2,-1)$, $\mathbf{v}=(0,1,1)$.
b. $\mathbf{u}=(-2,1,3)$, $\mathbf{v}=(4,-2,-6)$
5. Nájdite vektor dĺžky 1 kolmý aj na $\mathbf{u}$ aj na $\mathbf{v}$.
a. $\mathbf{u}=(1,1,-1)$, $\mathbf{v}=(0,3,1)$
b. $\mathbf{u}=(2,1,0)$, $\mathbf{v}=(0,1,2)$
6. Nájdite obsah trojuholníka ABC.
a. $A=(2,0,1)$, $B=(3,-1,2)$, $C=(-3,4,2)$
b. $A=(1,3,2)$, $B=(5,3,1)$, $C=(-3,1,2)$
7. Nájdite objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.
a) $A=(-2,3,1)$, $B=(1,-2,3)$,
$C=(2,1,0)$, $D=(3,2,1)$
b) $A=(-1,4,2)$, $B=(2,3,4)$,
$C=(0,4,2)$, $D=(3,6,3)$
8. Vypočítajte $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$, ak
a. $\|\mathbf{a}\|=3$, $\|\mathbf{b}\|=2$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je 60°
b. $\|\mathbf{a}\|=5$, $\|\mathbf{b}\|=8$ a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=24$
9. Vypočítajte $\|(3\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-3\mathbf{b})\|$, ak
a. $\|\mathbf{a}\|=3$, $\|\mathbf{b}\|=5$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je $\frac{\pi}{6}$,
b. $\|\mathbf{a}\|=2$, $\|\mathbf{b}\|=3$ a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-3\sqrt{3}$

Výsledky

1. a) 0, pravý, b) -1, tupý, c) 3, ostrý
2. a) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=-\frac{1}{25}(-3,0,4)$, $(3,-5,2)+\frac{1}{25}(-3,0,4)$,
b) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{1}{3}(2,2,1)$, $(-1,2,1)-\frac{1}{3}(2,2,1)$.
3. Pri vrchole B. $P_{ABC}=\frac{7\sqrt{6}}{2}$.
4a) $(-1,-1,1)$, b) $(0,0,0)$
5a) $\frac{\pm1}{\sqrt{26}}(4,-1,3)$, b) $\frac{\pm1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$
6a) $\frac{1}{2}\sqrt{62}$, b) $\sqrt{21}$.
7a) 34, b) 5
8a)
a. $3\sqrt{3}$, b) 32
9a) $\frac{15}{2}$, b) 3

9. PRIAMKY A ROVINY V PRIESTORE

1. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny s normálovým vektorom $\mathbf{n}$, ktorá prechádza bodom P.
a. $P=(1,2,3)$, $\mathbf{n}=(2,-3,1)$
b. $P=(-2,3,5)$, $\mathbf{n}=(3,7,-2)$
2. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu cez body A,B,C, vypočítajte obsah trojuholníka ABC a vzdialenosť bodu C od priamky AB.
a. $A=(1,0,-1)$, $B=(0,2,3)$, $C=(-2,1,1)$
b. $A=(-1,3,2)$, $B=(2,1,-1)$, $C=(3,2,1)$
3. Rozhodnite, či roviny sú rovnobežné.
a. $2x-y+3z+3=0$, $-4x+2y+9z+1=0$
b. $-x+3y+2z+1=0$, $2x-6y-4z+5=0$
4. Rozhodnite, či priamka p a rovina ρ sú rovnobežné.
a. $p\colon x=1+2t, y=3-t, z=-1-4t,\ t\in R$;
$\rho\colon 3x+2y+5z-7=0$
b. $p\colon x=t, y=2t, z=2t,\ t\in R$; $\rho\colon 2x+4y-5z+3=0$
5. Rozhodnite, či sú priamka p a rovina ρ kolmé.
a. $p\colon x=1+2t, y=3-t, z=-1-4t,\ t\in R$;
$\rho\colon -4x+2y+8z+3=0$
b. $p\colon x=4+3t, y=1-2t, z=-1+4t,\ t\in R$;
$\rho\colon x-5y+2z-7=0$
6. Nájdite parametrické rovnice priamky p, ktorá je priesečnicou rovín
a) $\rho_1\colon -2x+3y+7z+2=0$, $\rho_2\colon x+2y-3z+5=0$
b) $\rho_1\colon 3x-5y+2z=0$, $\rho_2\colon x+z=0$
7. Nájdite rovnicu roviny prechadzajúcej cez bod $(-1,4,-3)$, ktorá je kolmá na priamku $x=2+t, y=-3+2t, z=-t,\ t\in R$.
8. Nájdite rovnicu roviny ρ prechadzajúcej cez bod $(-1,2,4)$, ktorá je rovnobežná s rovinou
a. xy, b. xz, c. $x+y+z+1=0$.
9. Nájdite rovnicu roviny, prechádzajúcej cez bod $(-1,4,2)$, ktorá obsahuje priesečnicu rovín $4x-y+z-2=0$ a $2x+y-2z-3=0$.
10. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovinou súmernosti bodov (2, - 1, 1) a (3, 1, 5).
11. Nájdite priesečník priamok
a. $p\colon x=-1+4t, y=3+t, z=1,\ t\in R$ a
$q\colon x=-13+12t, y=1+6t, z=2+3t,\ t\in R$.
b. $p\colon x=-1+4t, y=3+t, z=1,\ t\in R$ a
$q\colon x=-13+12t, y=1+6t, z=1+3t,\ t\in R$.
12. Dokážte, že body $A=(1,0,-1)$, $B=(5,10,-3)$, $C=(0,1,3)$, $D=(0,0,2)$ ležia v jednej rovine a jej všeobecnú rovnicu.
13. Nájdite parametrické rovnice priamky, ktorá prechádza cez bod $A=(5,0,-2)$ a je rovnobežná s rovinami $x-4y+2z=0$ a $2x+3y-z+1=0$.
14. Nájdite rovnicu roviny prechádzajúcej cez bod $A=(1,2,-1)$, ktorá je kolmá na priesečnicu rovín $2x+y+z=2$ a $x+2y+z=3$.

Výsledky

1a) $2x-3y+z+1=0$, b) $3x+7y-2z-5=0$.
2a) $2y-z-1=0$, $P_\triangle=\frac{5}{2}\sqrt{5}$, $d(C,AB)=5\sqrt{\frac{5}{21}}$
2b) $x+9y-5z-16=0$, $P_\triangle=\frac{\sqrt{107}}{2}$, $d(C,AB)=\sqrt{\frac{107}{22}}$.
3a) rôznobežné, b) rovnoben.
4a) nie, b) áno $p\parallel\rho$.
5a) áno, $p\perp\rho$, b) nie.
6a) $p\colon x=-41-5t, y=t, z=-12-t,\ t\in R$,
b) $p\colon x=5t, y=t, z=-5t,\ t\in R$.
7. $\rho\colon (x+1)+2(y-4)-(z+3)=0$
8a) $\rho\colon z=4$, b) $\rho\colon y=2$,
c) $\rho\colon (x+1)+(y-2)+(z-4)=0$.
9. $4x-13y+21z-14=0$.
10. $\left(x-\frac{5}{2}\right)+y+4(z-3)=0$
11a) $p\cap q=(-17,-1,1)$, b) $p\cap q=\emptyset$.
12. $3x-y+z-2=0$.
13. $(x,y,z)=(5,0,-2)+t(-2,5,11)$, $t\in R$.
14. $-(x-1)+3(y-2)-(z+1)=0$.