æ

1. Komplexné čísla

Najprv pripomenieme niektoré známe vlastnosti reálnych čísel.

Veta 1. *Nech $a, b, c \in R$ potom platí:*

(i) $a + b = b + a$ *(komutatívnosť sčítania)*

(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *(asociatívny zákon)*

(iii) $a + 0 = a$

(iv) $a + (-a) = 0$

(v) $ab = ba$ *(komutatívnosť násobenia)*

(vi) $a(bc) = (ab)c$ *(asociatívny zákon)*

(vii) $1 \cdot a = a$

(viii) *Ak* $a \neq 0$, *tak* $\exists \frac{1}{a} \in R$ *a platí* $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

(ix) $a(b + c) = ab + ac$ *(distributívny zákon)*

Vieme, že neexistuje $x \in R$, pre ktoré by $x^2 = -1$. Tento „nedostatok" reálnych čísel odstránili matematici tak, že si také číslo vymysleli. Volá sa imaginárna jednotka a označovať ho budeme písmenom i (v elektrotechnických aplikáciách je zaužívané aj označenie j).

Definícia. Nech $x, y \in R$. Výraz tvaru iy sa nazýva *imaginárne číslo*, výraz tvaru $x + iy$ sa nazýva *komplexné číslo* (*algebraický tvar* komplexného čísla). Množinu všetkých komplexných čísel budeme označovať C.

V množine všetkých komplexných čísel sú operácie sčítania a násobenia určené vzťahom $i^2 = -1$ a vlastnosťami (i)–(ix). Teda ak $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$, tak

$$
\begin{aligned}
a + ib = 0 &\iff a = b = 0 \\
(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\
(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2) \\
-(a + ib) &= (-a) + i(-b) \\
(a + ib)(a - ib) &= a^2 + b^2 \in R \\
\text{ak } a + ib \neq 0 \text{ tak } \frac{1}{a + ib} &= \frac{1}{a + ib}\,\frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

Predchádzajúce vzťahy sa ľahko overia priamym výpočtom, napr.:

$$
\begin{aligned}
(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1(a_2 + ib_2) + ib_1(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 = \\
(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)
\end{aligned}
$$

Ukázali sme, že sčítaním, násobením a delením dvoch komplexných čísel dostaneme znova komplexné číslo (t.j. výraz tvaru $x + iy$, kde $x, y \in R$ a tieto operácie sme definovali tak, že aj komplexné čísla spĺňajú vlastnosti (i)–(ix) reálnych čísel.

Definícia. Nech $x, y \in R$, $z = x + iy \in C$. Potom sa x nazýva *reálna časť* a y *imaginárna časť* komplexného čísla z, označujeme: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, číslo $\overline{z} = x - iy$ sa nazýva číslo *komplexne združené* s číslom z.

Priamym výpočtom sa dá overiť, že platí

Veta 4. *Nech $z, z_1, z_2 \in C$. Potom platí*
(i) $\overline{\overline{z}} = z$,
(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
(iii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$,
(iv) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Príklad. Vypočítajte (t.j. napíšte v tvare $x + iy$, $x \in R, y \in R$) čísla
a) i^{23} b) $\frac{1}{i}$ c) $\frac{2+3i}{i}$
d) $\frac{1+i}{2-i}$ e) $\frac{(2-i)^2}{1+i}$ f) $(1-i)^6$

Riešenie. a) Všimnime si, že $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, potom dostaneme $i^{23} = i^{5\cdot 4+3} = (i^4)^5 i^3 = 1^5(-i) = -i$,
b) $\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$,
c) $\frac{2+3i}{i} = \frac{1}{i}(2+3i) = -i(2+3i) = -2i - 3i^2 = 3 - 2i$,
d) $\frac{1+i}{2-i} = \frac{1+i}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2+i)}{4+1} = \frac{2+i+2i+i^2}{5} = \frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$,
e) $\frac{(2-i)^2}{1+i} = \frac{4-4i+i^2}{1+i} = \frac{(3-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-4i+4i^2}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{7}{2}$
f) $(1-i)^6 = ((1-i)^2)^3 = (1-2i+i^2)^3 = (-2i)^3 = (-2)^3 i^3 = -8(-i) = 8i$.

Geometrická interpretácia komplexných čísel.

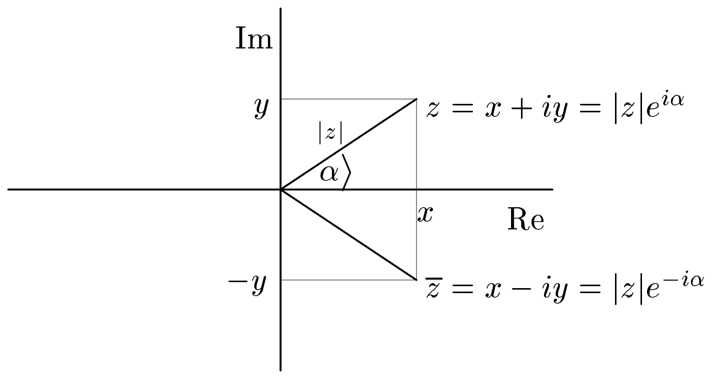
Komplexné číslo je určené usporiadanou dvojicou reálnych čísel. Teda k $z \in C$ môžeme priradiť dvojicu reálnych čísel ($x = \mathrm{Re}\, z, y = \mathrm{Im}\, z$) a tej zasa bod v rovine. Je tým tiež určený vektor v rovine, ktorého počiatočný bod je $(0, 0)$ a koncový bod je (x, y).

Komplexné číslo $z = x + iy$ stotožníme s týmto vektorom. Pritom aj obvyklé sčítanie vektorov v rovine zodpovedá sčítaniu komplexných čísel. Používame pravouhlé súradnice v rovine, ale na zdôraznenie, že v nej kreslíme komplexné čísla budeme os x nazývať reálna os a os y imaginárna os.

Dĺžka tohoto vektora sa nazýva absolútna hodnota komplexného čísla z. Ak je $z \neq 0$ je tento vektor jednoznačne určený svojou dĺžkou a orientovaným uhlom, ktorého počiatočným ramenom je vektor $(1, 0)$ (teda kladná časť reálnej osi) a koncovým ramenom je vektor $z = (x, y)$ Pripomeňme, že orientácia uhla je kladná ak sa jeho počiatočné rameno dostane do koncového rameno otáčaním okolo vrchola proti smeru hodinových ručičiek. Veľkosť orientovaného uhla $\varphi > 0$ budeme určovať v oblúkovej miere, radiánoch, teda je určená dĺžkou cesty, ktorú prejde koncový bod vektora dĺžky 1 pri otáčaní o uhol φ proti smeru hodinových ručičiek, záporné uhly rovnako zodpovedajú otáčaniu v smere hodinových ručičiek.

Tabuľka hodnôt $\cos\alpha$ a $\sin\alpha$

stupne	α	360	180	90	60	45	30
radiány	$\frac{2\pi}{360}\alpha$	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
cos	$\cos\alpha$	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
sin	$\sin\alpha$	0	0	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$



Obr. 1 Geometrická interpretácia komplexného čísla.

Definícia. Nech $z = x + iy \in C$, $x, y \in R$.

(i) Nezáporné číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ sa nazýva *absolútna hodnota* komplexného čísla z,

(ii) Ak je navyše $z \neq 0$, tak orientovaný uhol φ, pre ktorý $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, nazývame *argument* komplexného čísla z.

(iii) $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sa nazýva *goniometrický tvar* komplexného čísla z.

Poznamenajme, že ak φ je argument čísla z, tak je $\varphi + 2k\pi$ pre $\forall k \in Z$ tiež argumentom čísla z. Vyjadrenie čísla z v goniometrickom tvare je vlastne len preformulovaním definície funkcie $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ pre orientované uhly. Goniometrický tvar komplexného čísla sa skrátene zapisuje v exponenciálnom tvare:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}\,, \quad \text{kde číslo } e \text{ je základ prirodzeného logaritmu.}$$

Oprávnenosť tohoto zápisu je vidieť z geometrickej interpretácie násobenia komplexných čísel:

Veta 2. *Ak $\alpha, \beta \in R$, tak*

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\,.$$

Toto tvrdenie sa dá dokázať pomocou geometrických úvah a je ekvivalentné so súčtovými vzorcami známymi zo strednej školy (overte si to):

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,, \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,, \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,.$$

Geometrická interpretácia vety 2 hovorí: pri násobení komplexných čísel sa ich argumenty sčítajú. Absolútne hodnoty sa násobia, čo je jedným z tvrdení nasledujúcej vety:

Veta 3. *Pre $\forall z, w \in C$ platí:*

(i) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(trojuholníková nerovnosť)*

(ii) $|zw| = |z||w|$.

Obe tvrdenia sa dajú ľahko overiť výpočtom. Ak nie sú vektory z, w rovnobežné, tak je vektor $z + w$ uhlopriečka vo vhodnom rovnobežníku (nakreslite ho) nerovnosť (i) je známe tvrdenie, že strana trojuholníka je kratšia ako súčet dĺžok zvyšných dvoch strán.

Veta 2 má nasledujúci dôsledok, ktorý je známy ako

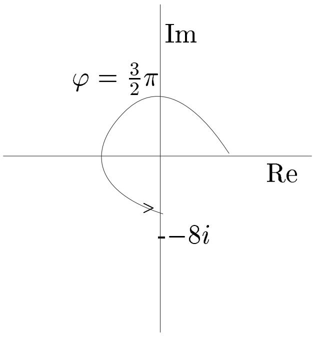
Moivreova veta. *Ak $r, \phi \in R$, $r > 0$, $n \in N$, tak*

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)] \quad \textit{alebo v exponenciálnom tvare} \quad \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Moivreova veta sa používa na riešenie rovnice $z^n = c$, kde $c \neq 0$ je známe komplexné číslo, $n \in N$ a neznáma z sa hľadá v množine C. Popíšeme teraz ako sa binomická rovnica rieši:

1. pravú stranu vyjadríme v goniometrickom tvare a riešime rovnicu
$$z^n = |c|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |c|[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)]\,, \quad k \in Z\,.$$
2. Neznámu z budeme hľadať v goniometrickom tvare, teda hľadáme kladné číslo r a uhol $\alpha \in R$, tak aby $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ bolo riešenie rovnice $z^n = c$, t.j.
$$r^n[\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = |c|[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)]\,, \quad k \in Z\,.$$
3. Vidieť, že predchádzajúca rovnosť platí pre $r = \sqrt[n]{|c|}$ a $\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$, $k \in Z$ a teda
$$z_k = \sqrt[n]{|c|}\Big[\cos\big(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\big) + \sin\big(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\big)\Big]\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$
je n rôznych riešení danej binomickej rovnice.
4. $\frac{\varphi}{n} + (k+n)\frac{2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n} + 2\pi \implies z_{n+k} = z_k$, teda takto viac riešení nevyrátame. Platí tvrdenie, že riešenie iného tvaru rovnica nemá, ale nebudeme ho teraz dokazovať. Poznamenajme ešte, že riešenia binomickej rovnice ležia na kružnici so stredom v bode 0 a polomerom $\sqrt[n]{|c|}$ a tvoria vrcholy pravidelného n-uholníka.

Príklad. Riešte rovnicu $z^3 = -8i$ a výsledok napíšte v algebraickom tvare a znázornite.



Najprv pravú stranu znázorníme a z obrázku určíme absolútnu hodnotu $|-8i| = 8$ a argument $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ a teda riešime rovnicu

$$z^3 = 8\big[\cos\big(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\big) + i\sin\big(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\big)\big]$$

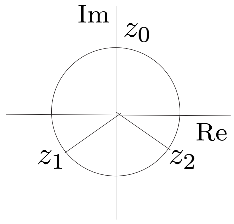
Odmocnením absolútnej hodnoty a delením argumentu dostaneme riešenie:

$$z_k = 2\big[\cos\frac{1}{3}\big(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\big) + i\sin\frac{1}{3}\big(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\big)\big]\,, k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 2\big[\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi\big] = 2i$$

$$z_1 = 2\big[\cos\big(\frac{1}{2}\pi + \frac{2\pi}{3}\big) + i\sin\big(\frac{1}{2}\pi + \frac{2\pi}{3}\big)\big] = 2\big[\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\big] = -\sqrt{3} - i$$

$$z_2 = 2\big[\cos\big(\frac{1}{2}\pi + \frac{4\pi}{3}\big) + i\sin\big(\frac{1}{2}\pi + \frac{4\pi}{3}\big)\big] = 2\big[\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\big] = \sqrt{3} - i$$



Úlohy.

1. Nájdite výsledok operácie v tvare $x + yi$, kde $x, y \in R$.
   a. $3 + 7i - (5 - 2i)(4 - i)$
   b. $i(1 + i)(1 - i)(1 + 2i)(1 - 2i)$
   c. $\frac{(1-7i)}{(2+3i)}$
   d. $\frac{a+bi}{a-bi}$, $a, b \in R$
   e. $\frac{i(2+3i)}{3+5i}$
2. Nájdite všetky $x, y \in R$ také, že
   a. $(2x + 3y) + i(x - y) = -1 + 2i$
   b. $(ix + y)(2x - 3iy) = 2i$
   c. $\dfrac{-y + ix}{1 - 2i} + \dfrac{x + iy}{2 + 3i} = 1$
3. Dané komplexné číslo znázornite a nájdite jeho goniometrický tvar.
   a. -5 b. $1 - i$ c. $\sqrt{3} - i$ d. $-5i$ e. $2 + 3i$ f. $-3 - 7i$
4. Vypočítajte zu, $\frac{z}{u}$, z^n.
   a. $z = \sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5})$, $u = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, $n = 5$
   b. $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $u = 6(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$, $n = 2004$
5. V obore komplexných čísel riešte rovnicu. Výsledok vyjadrite v algebraickom aj goniometrickom tvare a znázornite.
   a. $z^4 = 4$
   b. $z^4 = -4$
   c. $z^3 = -8i$
   d. $z^4 = -1 - i\sqrt{3}$
6. Vypočítajte.
   a. i^{101} b. $(1 + i)^4$ c. $\big(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\big)^8$

Polynómy s reálnymi a komplexnými koeficientami

Definícia. Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$. Výraz $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ sa nazýva *polynóm* s koeficientami $a_0, a_1, \dots, a_n$. Ak $a_n \neq 0$, tak sa číslo n sa nazýva *stupeň* polynómu $f(x)$ ($n = \deg f$). Ak $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, tak $\deg f = -\infty$. Množinu všetkých polynómov s reálnymi koeficientami budeme označovať $P(R)$.

Podobne, množinu všetkých polynómov s celočíselnými koeficientami budeme označovať $P(Z)$.

Polynóm $f \in P(R)$ určuje funkciu $x \mapsto f(x)$, pre polynómy s reálnymi koeficientami platí aj veta o jednoznačnosti:

Veta. *Nech $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in P(R)$, $g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0 \in P(R)$ učujú tú istú funkciu, t.j. pre každé $x \in R$ platí $f(x) = g(x)$.*

Potom sa rovnajú aj koeficienty polynómov f, g, t.j.

$$m = n, \quad a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n\,.$$

Definícia.

1) Polynóm $f(x) \in P(R)$ sa nazýva *ireducibilný*, ak neexistujú $g(x), h(x) \in P(R)$, stupňa aspoň 1, pre ktoré $f(x) = g(x)h(x)$.
2) $c \in R$ je *koreň* polynómu $f(x) \in P(R)$, ak je hodnota $f(c) = 0$.

Veta. *Ak $f(x) \in P(R)$ a $c \in R$, tak zvyšok po delení $f(x) : (x - c)$ je hodnota $f(c)$; špeciálne, ak c je koreň polynómu f, tak sa dá deliť $f(x) : (x - c)$ bezo zvyšku (píšeme aj $(x - c) \mid f(x)$).*

Dôkaz. Delením dostaneme podiel $g(x)$ a zvyšok je polynóm $r(x)$, $\deg r(x) < deg(x-c) = 1$. Teda $r(x) = r \in R$, a teda $f(x) = (x - c)g(x) + r \implies f(c) = (c - c)g(c) + r = r$.

Teraz môžeme ešte spresniť definíciu koreňa polynómu z $P(R)$

Definícia. Nech $f(x) \in P(R)$, $k \in N$. Číslo $c \in R$ sa nazýva *koreň násobnosti k* (k-násobný koreň) polynómu f, ak $(x - c)^k | f(x)$, ale $(x - c)^{k+1}$ nie je deliteľom polynómu f. Všeobecnejšie, ireducibilný polynóm $g(x)$ sa nazýva *k-násobný ireducibilný deliteľ* polynómu f, ak $[g(x)]^k \mid f(x)$, ale g^{k+1} nie je deliteľom polynómu f.

Inými slovami $\exists\, h(x) \in P(R)$ také, že $f(x) = [g(x)]^k h(x)$ a polynóm $g(x)$ nie je deliteľom polynómu $h(x)$.

Hornerova schéma. Delenie $f(x) : (x - c) = g(x)$ so zvyškom r sa dá napísať do nasledujúcej tabuľky

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0	koeficienty polynómu f	
c		cb_{n-1}	cb_{n-2}	$\dots$	cb_1	cb_0		
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	$r = f(c)$	koeficienty polynómu g	zvyšok

V treťom riadku je súčet čísel v prvých dvoch riadkoch.

Platnosť Hornerovej schémy ukážeme na príklade $\deg f = 3$; $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$.

$$f(x) = (x - c)(b_2x^2 + b_1x + b_0) + r = b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x - cb_2x^2 - cb_1x - cb_0 + r\,,$$

$$\begin{aligned} \text{teda} \qquad f(x) &= a_3x^3 + \quad a_2 \quad x^2 + \quad a_1 \quad x + \quad a_0 \\ &= b_2x^3 + (b_1 - cb_2)x^2 + (b_0 - cb_1)x + (r - cb_0) \end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov dostaneme

$$\begin{aligned} b_2 &= a_3 \\ b_1 - cb_2 = a_2 &\implies b_1 = a_2 + cb_2 \\ b_0 - cb_1 = a_1 &\implies b_0 = a_1 + cb_1 \\ r - cb_0 = a_0 &\implies r = a_0 + cb_0\,. \end{aligned}$$

Rozklad na súčin ireducibilných polynómov.

Komplexné čísla sme zaviedli tak, aby mal polynóm x^2+1 koreň. Pre polynómy s komplexnými koeficientami (teda špeciálne aj z $P(R)$) platí viac:

Veta (Základná veta algebry)**.** *Každý polynóm s komplexnými koeficientami stupňa aspoň 1 má koreň $c \in C$.*

Veta (o komplexných koreňoch reálnych polynómov)**.** *Ak je $c \in C$ koreňom polynómu $f \in P(R)$, tak je aj kemplexne združené číslo $\overline{c}$ koreňom polynómu f.*

Dôkaz. Ak $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in P(R)$ a $c \in C$ je koreeň polynómju f, tak

$$0 = f(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n \implies 0 = \overline{0} = \overline{a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n}\,.$$

Pretože $\overline{c^k} = (\overline{c})^k$ a $a_k \in R \implies \overline{a_k} = a_k$ dostaneme

$$f(\overline{c}) = a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n = \overline{a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n} = \overline{f(c)} = 0\,.$$

Zo základnej vety algebry vyplýva, že ireducibilné polynómy v $P(C)$ majú stupeň 1. Pre polynómy $f \in P(R)$ dostaneme:

Ak $c = a + ib$ je koreň polynómu $f \in P(R)$, tak aj $\overline{c} = a - ib$ je jeho koreň. Preto je $(x-c)(x-\overline{c}) = (x-a-ib)(x-a+ib) = (x-a)^2 + b^2$ deliteľom polynómu $f(x)$. Teda v $P(R)$ sú ireducibilnými len polynómy stupňa 1 alebo polynómy stupňa 2, ktoré nemajú reálne korene (t.j. majú záporný diskriminant). Teda každý polynóm $f \in P(R)$, $\deg f = n$, sa dá rozložiť na súčin ireducibilných polynómov

(i) v $P(C)$: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_0 = a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_m)^{k_m}$, kde $c_1, c_2, \ldots, c_m \in C$ sú korene polynómu f násobnosti $k_1, k_2, \ldots, k_m \in N$ pričom platí $\sum\limits_{a=1}^{m} k_a = \deg f$.

(ii) v $P(R)$: $f(x) = a_n(x-c_1)^{k_1}\cdots(x-c_g)^{k_g}(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1}\cdots(x^2+p_hx+q_h)^{\ell_h}$, $\sum\limits_{a=1}^{g} k_a + 2\sum\limits_{b=1}^{h} \ell_b = \deg f$ a $p_j^2 - 4q_j < 0$ pre všetky $j = 1, 2, \ldots, h$, $c_1, c_2, \ldots, c_g$ sú reálne korene polynómu f násobnosti $k_1, k_2, \ldots, k_g \in N$

Racionálne korene polynómu $f \in P(Z)$**.**

Veta. *Nech $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in P(Z)$, $a_n \neq 0$. Nech $c = \frac{p}{q}$, kde $q \in N$, $p \in Z$ a čísla p, q sú nesúdeliteľné (t.j. zlomok sa nedá krátiť). Ak je c koreň polynómu f, tak je p deliteľom čísla a_0 a q deliteľom čísla a_n.*

Dôkaz. Ak je $\frac{p}{q}$ koreň polynómu $f(x)$ tak

$$\begin{aligned}
0 = f\big(\tfrac{p}{q}\big) &= a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 \ \Big/ \cdot q^n \\
\implies 0 &= a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n \\
\implies -a_0q^n &= a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} \\
-a_0q^n &= p\underbrace{\big(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1q^{n-1}\big)}_{a} = pa\,,\ a \in Z
\end{aligned}$$

Teda číslo p je deliteľom čísla a_0q^n a pretože p a q sú nesúdeliteľné musí byť p deliteľom čísla a_0.

Podobne

$$\begin{aligned}
0 &= a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n \ \Big/ - a_np^n \\
-a_np^n &= a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n \\
&= q\big(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}\big) \\
&\implies q \mid a_n\,.
\end{aligned}$$

Príklad. Nájdite všetky racionálne korene polynómu $f(x) = 4x^6+6x^5-10x^4-7x^3+6x^2-5x+6$ a napíšte ho ako súčin ireducibilných polynómov v $P(R)$.

Riešenie:
Ak $\frac{p}{q}$ je koreň $f(x)$, tak $p \in Z$, $p \mid 6$ a $q \mid 4$, teda $p \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$, $q \in \{1, 2, 4\}$, čiže možné racionálne korene sú z množiny $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}\}$. Teraz stačí týchto 16 čísel dosadiť do daného polynómu a zistiť, pre ktoré z nich výjde hodnota 0. Urobíme to pomocou Hornerovej schémy a zisťujeme aj násobnosť koreňa:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 4 & 6 & -10 & -7 & 6 & -5 & 6 \\
 & & 4 & 10 & 0 & -7 & -1 & 6 \\ \hline
1 & 4 & 10 & 0 & -7 & -1 & -6 & |\underline{0} \quad \Longrightarrow \ f(x) = (x-1)(4x^5+10x^4-7x^2-x-6) \\
 & & 4 & 14 & 14 & 7 & 6 & \\ \hline
1 & 4 & 14 & 14 & 7 & 6 & |\underline{0} & \quad \Longrightarrow \ f(x) = (x-1)^2(4x^4+14x^3+14x^2+7x+6) \\
 & & 4 & 18 & 32 & 39 & & \\ \hline
1 & 4 & 18 & 32 & 39 & |\underline{45 \neq 0} & &
\end{array}
$$

Teraz stačí hľadať korene polynómu $4x^4+14x^3+14x^2+7x+6$, ktorý má iba kladné koeficienty, preto môže mať len záporné korene. Teda budeme už skúšať iba $c \in \{-2, -3, -6, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\}$ znova pomocou Hornerovej schémy.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 4 & 14 & 14 & 7 & 6 \\
 & & -8 & -12 & -4 & -6 \\ \hline
-2 & 4 & 6 & 2 & 3 & |\underline{0} \quad \Longrightarrow \ f(x) = (x-1)^2(x+2)(4x^3+6x^2+2x+3) \\
 & & -8 & 4 & -12 & \\ \hline
-2 & 4 & -2 & 6 & |-9 \neq 0 &
\end{array}
$$

Teraz stačí hľadať korene polynómu $g(x) = 4x^3+6x^2+2x+3$, ktorý môže mať korene $\{-3, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\}$
Pomocou Hornerovej schémy dostaneme $g(-3) \neq 0$, $g(-\frac{1}{2}) \neq 0$,

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & 6 & 2 & 3 \\
 & & -6 & 0 & -3 \\ \hline
-\frac{3}{2} & 4 & 0 & 2 & |\underline{0} \quad \Longrightarrow \ g(x) = 2(x+\frac{3}{2})(2x^2+1)
\end{array}
$$

<u>Výsledok</u>: $f(x) = 4(x-1)^2(x+2)(x+\frac{3}{2})(x^2+\frac{1}{2})$ má racionálne korene $c_{1,2} = 1$, $c_3 = -2$, $c_4 = -\frac{3}{2}$.
Okrem toho má dvojicu komplexných koreňov $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Racionálne funkcie

Definícia. Nech $p, q \in P(C)$, $q \neq 0$. Fuunkcia tvaru $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ sa nazýva *racionálna funkcia*.
Definovaná je v každom komplexnom čísle, ktoré nie je koreňom menovateľa $q(x)$.

Ak je $\deg p < \deg q$, tak hovoríme, že $f(x)$ je *rýdzoracionálna*.

Ak je $\deg p \geq \deg q$, tak delením $p(x) : q(x)$ dostaneme $p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, $\deg r < \deg q$.
Odtiaľ dostávame

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{g(x) \cdot q(x) + r(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

a teda platí

Veta. *Každá racionálna funkcia f je súčtom polynómu g a rýdzoracionálnej funkcie (ak je f rýdzoracionálna tak je polynóm g nulový).*

„Najjdenoduchšie" rýdzoracionálne funkcie, ktorých menovateľom je mocnica ireducibilného polynómu sa nazývajú elementárne zlomky.

Definícia. *Elementárnym zlomkom nad C* sa nazýva funkcia tvaru

(i) $\dfrac{a}{(x-c)^k}$, kde $a, c \in C$, $k \in N$.

Elementárnym zlomkom nad R sa nazýva funkcia jedného z typov

(ii) $\dfrac{a}{(x-c)^k}$, kde $a, c \in R$, $k \in N$,

(iii) $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$, kde $a, b, p, q \in R$, $k \in N$, $p^2 - 4q < 0$.

Úloha. Rozhodnite, či je daná funkcia elementárnym zlomkom nad R.

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$,

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$,

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+1}$,

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+2}$,

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$,

f) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}\right)^3$,

Veta. *Každá racionálna funkcia f nad C (nad R) sa dá jednoznačne až na poradie sčítancov napísať ako súčet polynómu a konečného počtu elementárnych zlomkov nad C (nad R).*

Naznačíme iba, ako sa matematickou indukciou (vzhľadom na stupeň menovateľa) dokáže táto veta nad poľom C. Predpokladajme preto, že $c \in C$ je k-násobný koreň menovateľa rýdzoracionálnej funkcie, t.j

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-c)^k g(x)}\,, \quad k \in N\,,\ g(c) \neq 0\,, \quad k + \deg g > \deg f\,.$$

Potom $\exists a \in C$ také, že $p(c) - ag(c) = 0$, t.j. $a = \dfrac{p(c)}{g(c)}$. Inými slovami c je koreň polynómu $p(x) - ag(x)$ a preto $p(x) - ag(x) = (x-c)h(x)$, $h \in P(C)$. Teda

$$\frac{p(x)}{(x-c)^k g(x)} = \frac{(p(x)-ag(x)) + ag(x)}{(x-c)^k g(x)} = \frac{(x-c)h(x) + ag(x)}{(x-c)^k g(x)} = \frac{h(x)}{(x-c)^{k-1} g(x)} + \frac{a}{(x-c)^k}$$

Rozklad na súčet elementárnych zlomkov sa dá urobiť metódou neurčitých koeficientov, ak poznáme kanonický rozklad menovateľa na súčin ireducibilných polynómov. Ukážeme to na príklade:

Úloha. Funkciu $f(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ rozložte na súčet polynómu a elementárnych zlomkov.

Riešenie. Funkcia nie je rýdzoracionálna (stupeň čitateľa je väčší ako stupeň menovateľa). Najprv delením dostaneme

$$(2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 1) : (x^3 - 2x^2 - x + 2) = 2x + 1\,, \qquad \text{zvyšok } 2x^2 - 7x + 3$$

teda

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Menovateľa rozložíme na súčin $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$, teraz hľadáme čísla a, b, c také, aby

$$\frac{2x^2 - 7x + 3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

Obe strany predchádzajúcej rovnosti násobíme menovateľom $(x-1)(x+1)(x-2)$ a dostaneme

$$2x^2 - 7x + 3 = a(x+1)(x-2) + b(x-1)(x-2) + c(x-1)(x+1)\,.$$

Čísla a, b, c podľa predchádzajúcej vety sú jednoznačne určené. V tomto prípade ich najrýchlejšie určíme tak, že do oboch strán predchádzajúcej rovnosti dosadíme vhodné čísla (korene menovateľa):

$$\begin{array}{lll}
x = 1\colon & -2 = a\cdot(1+1)(1-2) + b\cdot 0 + c\cdot 0 = -2a & \Longrightarrow\ a = 1\\
x = -1\colon & 12 = a\cdot 0 + b\cdot(-1-1)(-1-2) + c\cdot 0 = 6b & \Longrightarrow\ b = 2\\
x = 2\colon & -3 = a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot(2-1)(2+1) = 3c & \Longrightarrow\ c = -1
\end{array}$$

Druhá možnosť je pravú stranu roznásobiť:

$$2x^2-7x+3 = a(x+1)(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)(x+1) = (a+b+c)x^2+(-a-3b)x+(-2a+2b-c)$$

a použiť fakt, že polynómy sa rovnajú, ak majú tie isté koeficienty, teda riešiť sústavu s neznámymi a, b, c:

$$\begin{aligned}
a + b + c &= 2\\
-a - 3b &= -7\\
-2a + 2b - c &= 3
\end{aligned}$$

Pravidlá ako určujeme tvary elementárnych zlomkov pri rozklade rýdzoracionálnych funkcií.

1. **Počet neznámych neurčitých koeficientov** sa rovná **stupňu menovateľa**.
2. Ak je v rozklade menovateľa mocnina $(x-c)^k$, tak k nej hľadáme elementárne zlomky (k neurčitých koeficientov)

$$\frac{a_1}{(x-c)^k}\,,\quad \frac{a_2}{(x-c)^{k-1}}\,,\ldots,\quad \frac{a_{k-1}}{(x-c)^2}\,,\quad \frac{a_k}{(x-c)}\,.$$

3. Podobne Ak je v rozklade menovateľa mocnina $(x^2+px+q)^k$, $p^2-4q<0$, tak hľadáme $2k$ neurčitých koeficientov v zlomkoch

$$\frac{a_1x+b_1}{(x^2+px+q)^k}\,,\quad \frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}\,,\ldots\frac{a_{k-1}x+b_{k-1}}{(x^2+px+q)^2}\,,\quad \frac{a_kx+b_k}{(x^2+px+q)}\,.$$

Príklad. Napíšeme teraz tvar rozkladu na elementárne zlomky nad R niektorých rýdzoracionálnych funkcií, t.j. predpokladáme, že stupeň menovateľa je väčší ako stupeň čitateľa ($A, B, C, \ldots$ sú neurčité koeficienty z R):

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{(x-2)^4} &= \frac{A}{(x-2)^4} + \frac{B}{(x-2)^3} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)}\\
\frac{p(x)}{(x-2)^2(x+1)^2} &= \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)}\\
\frac{p(x)}{(x^2-3x+3)^2(x+1)^2} &= \frac{Ax+B}{(x^2-3x+3)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2-3x+3)} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{(x+1)}
\end{aligned}$$

Úloha. Danú racionálnu funkciu napíšte ako súčet polynómu a elementárnych zlomkov nad R.

a) $\dfrac{2x^3+4x^2+5x+1}{(x^2+2x+2)^2}$

b) $\dfrac{-x^2-2x+1}{x^3+6x^2+12x+8}$

c) $\dfrac{1}{2x^2+5x-12}$

d) $\dfrac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}$

e) $\dfrac{5x^2-14x+17}{(x-5)^2(x-1)^2}$

f) $\dfrac{4x^2+3x+3}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$