1. Sústavy lineárnych rovníc

1.1 Jedna rovnica s jednou neznámou.

$ax = b\,,\quad$ kde $a, b \in R$ sú dané čísla, máme nájsť všetky $x \in R$, ktoré spĺňajú danú rovnicu.

Riešenie:

a. Ak $a \neq 0$, tak $\exists!\, x = \frac{b}{a}$ (práve jedno riešenie),

b. Ak $a = 0 \wedge b \neq 0$, tak žiadne $x \in R$ nespĺňa $0 \cdot x = b$ (žiadne riešenie),

c. Ak $a = 0 \wedge b = 0$, tak každé $x \in R$ spĺňa $0 \cdot x = b$ (neklonečne veľa riešení).

Rovnaké tri možnosti sú pre počet riešení všetkých sústav s komplexnými (aj reálnymi) koeficientami.

V prípade reálnych koeficientov a, b, že pre vzájomú polohu priamok $p \equiv y = ax$ a $q \equiv y = b$ sú presne 3 možnosti:

1. môžu sa pretínať v jednom bode $p \cap q = \left[\frac{b}{a}, b\right]$,
2. môžu byť rovnobežné rôzne $(p \parallel q)$ alebo 3. totožné $(p = q)$

1.2 Sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi $m, n \in N$, $m \geq 1$, $n > 1$.

Nech $a_{ij} \in R$, $b_j \in R$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ sú dané čísla. Sústavou m lineárnych rovníc s n neznámymi nazývame:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{S}$$

Riešiť sústavu (S) znamená nájsť množinu P všetkých usporiadaných n-tíc reálnych (komplexných) čísel, pre ktoré po dosadení do každej rovnice zo sústavy (S) za $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vznikne rovnosť.

Definícia. R^n označuje množinu všetkých usporiadaných n-tíc reálnych čísel.
Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ a $\alpha \in R$. Potom

(i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ sa nazýva súčet n-tíc $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

(ii) $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ sa nazýva násobok n-tice $\mathbf{x}$ číslom α.

(iii) n-tica $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in R^n$ sa nazýva nulová n-tica.

(iv) $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ sa nazýva n-tica opačná k n-tici x.

Definícia. Tabuľku zostavenú z reálnych (komlexných) čísel a_{ij}, $i \in \{1, 2, \ldots m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots n\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq \leq n}}$$

nazývame matica typu $m \times n$. Množinu všetkých matíc typu $m \times n$ budeme označovať $R^{m \times n}$. Usporiadané n-tice $A_{i*} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$ sa nazývajú riadky a usporiadané m-tice $A_{*j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ sa nazývajú stĺpce matice A.

Pri riešení sústavy (S) budeme používať jej zápis pomocou matíc:

matica sústavy (S): $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

rozšírená matica sústavy (S): $$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

Potom sústavu (S), resp. jej rozšírenú maticu $\tilde{A}$ upravíme na maticu zodpovedajúcu sústave, ktorá má tú istú množinu P všetkých riešení, ale je pomocou nej jednoduchšie popísať množinu P.

Nasledujúce úpravy matice A nemenia množinu všetkých riešení zodpovedajúcej sústavy, nazývame ich elementárne riadkové operácie (ERO).

ERO1 Vzájomná výmena riadkov ($A_{i*} \leftrightarrow A_{j*}$, $i \neq j$), alebo stručne $R_i \leftrightarrow R_j$

ERO2 Násobenie niektorého riadku matice A nenulovým číslom ($A_{i*} \to \alpha A_{i*}$, $\alpha \neq 0$) alebo αR_i

ERO3 Pričítanie násobku niektorého riadka k inému riadku ($A_{i*} \to A_{i*} + \alpha A_{j*}$, $i \neq j$) alebo $R_i + \alpha R_j$.

Definícia. Prvý (zľava) nenulový prvok a_{ij} v riadku A_{i*} matice A sa nazýva vedúci prvok (pivot) riadku A_{i*}. Matica A sa nazýva stupňovitá, ak platí

1) pivot $(i+1)$-ého riadka je v stĺpci napravo od stĺpca, v ktorom je pivot i-teho riadka (v stĺpci pod každým pivotom sú iba nuly).
2) každý nulový riadok je pod každým nenulovým riadkom matice A (t.j. nulové riadky sú premiestnené do spodnej časti matice).

A sa nazýva redukovaná stupňovitá, ak je stupňovitá a navyše všetky jej pivoty sa rovnajú 1 a aj nad nimi sú v stĺpci len nuly.

Ľahko vidieť, že pomocou ERO vznikne matica sústavy so zhodnou množinou všetkých riešení. Budem teda upravovať rozšírenú maticu danej sústavy na stupňovitú alebo redukovanú stupňovitú. Dá sa tiež dokázať, že každá matica A typu $m \times n$ sa dá upraviť pomocou ERO na jednoznačne určenú redukovanú stupňovitú maticu B typu $m \times n$, budeme písať $A \sim B$ (matice A, B sú riadkovo ekvivalentné). Postup ukážeme na príklade sústavy a jej rozšírenej matice:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 7 \\ 11x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 10 \end{aligned} \to A = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ 11 & -4 & -3 & 10 \end{array}\right) \sim_{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \\ 11 & -4 & -3 & 10 \end{array}\right)$$

Pivot 1. riadka je teraz číslo 1 (to sme mohli dosiahnúť aj násobením $\frac{1}{3} \cdot R_1$, ale takto sa vyhneme zlomkom). Pomocou ERO $R_2 - 3R_1$ a $R_3 - 11R_1$ dostaneme

$$A \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -15 & 30 & -67 \end{array}\right) \sim_{R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -37 \end{array}\right) = B$$

B je stupňovitá matica, ktorej posledný riadok zodpovedá rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -37$ a je zrejmé, že nemá riešenie, teda $P = \emptyset$.

Pri úpravách sme postupovali "zľava a zhora" "doprava a dole". Na úpravu na redukovanú stupňovitú maticu budeme maticu B upravovať od posledného pivota vpravo dole naspäť vľavo hore.

$$B \sim_{-\frac{1}{37}R_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{-\frac{1}{5}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\substack{R_2 - 2R_3 \\ R_1 - 7R_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Posledná matica je už redukovaná stupňovitá.

Ak by sme poslednú rovnicu vynechali jej rozšírená matica sa pomocou ERO dá upraviť na

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim_{R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Teraz je ľahké napísať riešenie (za neznámu zodpovedajúca stĺpcu bez pivota zvolíme ľubovoľné číslo):

$$x_3 = a \in R\,,\; x_2 - 2a = 2 \implies x_2 = 2 + 2a\,,\; x_1 - a = 5 \implies x_1 = 5 + a \implies \underline{P = \{(5 + a, 2 + 2a, a)\; a \in R\}}$$

Popísaný postup sa v prípade, že úpravu matice ukončíme dosiahnutím stupňovitej matice, nazýva Gaussova eliminačná metóda (GEM). Ak pokračujeme po získanie redukovanej stupňnovitej matice, hovoríme o Gaussovej-Jordanovej eliminačnej metóde.

Príklad. Napíšte množinu P všetkých riešení sústavy, ktorej rozšírená matica je

$$\text{a)} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{b)} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 & -1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Riešenie a)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 &= -1 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 &= 2 \\ -x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Začneme od poslednej rovnice, v ktorj sú dve neznáme jednu zvolíme ľubovoľne, $\underline{x_5 = a} \implies \underline{x_4 = -1 + a}$,
dosadíme to do druhej rovnice: $x_2 + 3x_3 + (-1 + a) + 3a = 2$. Ak zvolíme $\underline{x_3 = b}$, dostaneme $x_2 + 3b - 1 + 4a = 2 \implies \underline{x_2 = 3 - 4a - 3b}$
nakoniec doteraz získané výsledky dosadíme do prvej rovnice: $2x_1 + (3-4a-3b) - (-1+a) + 3a = -1 \iff 2x_1 + 4 - 2a - 3b = -1 \implies x_1 = \frac{1}{2}(-5 + 2a + 3b)$ $\underline{x_1 - \frac{5}{2} + a + \frac{3}{2}b}$, teda

$$P = \left\{ \left(\frac{5}{2} + a + \frac{3}{2}b, 3 - 4a - 3b, b, -1 + a, a \right) \,:\, a, b \in R \right\}$$

Poznamenajme, že za voľné parametre a, b sme zvolili tie neznáme, ktoré zodpovedajú stĺpcom bez pivotov. Matica z príkladu b) je redukovaá stupňnovitá, na ktorú sme upravili prvú maticu. V tomto prípade môžeme množinu P napísať priamo z matice, lebo po zvolení parametrov obsahujú všetky tri rovnice sústavy už len jednu neznámu.

Definícia. Nech $A \in R^{m\times n}$ a nech je B stupňovitá matica riadkovo ekvivalentná s maticou A. Počet nenulových riadkov (pivotov) matice B sa nazýva hodnosť matice A.

Veta (Frobéniova). *Sústava (S) lineárnych rovníc má (aspoň jedno) riešenie vtedy a len vtedy, keď sa hodnosť matice sústavy (S) rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy (S).*

Pripojme ešte dve poznámky sspresňujúce Frobéniovu vetu.

1. Ak sa pravé strany všetkých rovníc sústavy rovnajú nule, tak sa nazýva homogénna. Homogénna sústava má vždy riešenie; buď práve jedno ($x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$) alebo nekonečne veľa.
2. Ak je v stupňovitej matici $B \in R^{(n+1)\times m}$, ktorá je rozšírenou maticou sústavy s n neznámymi p pivotov, tak na popísanie množiny P všetkých jej riešení potrebujeme $n-p$ voľných parametrov. Voľné parametre môžeme voliť za neznáme zodpovdajúce stĺpcom matice B, v ktorých nie sú pivoty.

2. Maticová algebra a determinnty

Najprv zavedieme pojem lineárnej závislosti a nezávislosti

2.1. Lineárna závislosť a nezávislosť v R^n.

Definícia. Nech $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in R^n$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in R$.

1. $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$ sa nazýva lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$.
2. Hovoríme, že k-tica $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ je linárne nezávislá, ak $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.
3. Ak nie je k-tica $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ lineárne nezávislá, tak sa nazýva lineárne závislá.

Podobne hovoríme o lineárnej kombinácii, závislosti a nezávislosti k-tice matíc, polynómov alebo, všeobecnjšie, funkcií.

2.2. súčet a súčin matíc.

Najprv definujeme sčítanie matíc rovnakého typu (je vlastne zhodné so sčítaním v R^{mn}:

Súčet matíc. Nech $m, n \in N$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in R^{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in R^{m\times n}$. Potom $A + B \in R^{m\times n}$ definujeme rovnosťou $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$

Príklad. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, ale $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ nie je definované.

Skôr, než definujeme súčin matíc zavedieme pojem matice $A^\top$ transponovanej k matici A. $A^\top$ vznikne „preklopením" matice A okolo hlavnej diagonály, resp. zámenou úloh stĺpcov a riadkov, napr.

$$(\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,)^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Všeobecne, ak $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$, tak $A^\top = B = (b_{ji}) \in R^{n\times m}$, pričom $b_{ji} = a_{ij}$ pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Súčin matíc. Najprv definujeme súčin matice A typu $m \times n$ a stĺpca x $(n \times 1)$:

pre $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ definujeme $Ax = x_1A_{*1} + x_2A_{*2} + \cdots + x_nA_{*n}$.

Pomocou vzťahu $x \mapsto Ax$ je tak definované jednoznačné priradenie (zobrazenie) stĺpca $Ax \in R^{m\times 1}$ k stĺpcu $x \in R^{n\times 1}$; napr. pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ je $Ax = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2+6 \\ -2+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ak namiesto jedného stĺpca x zobereme maticu B typu $n \times k$ a definujeme AB tak, že maticu A násobíme sprava každým stĺpcom matice B a zo sískaných stĺpcov „poskladáme" jednu maticu $AB = D = (d_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le k}}$.

Teda násobíme maticu $A \in R^{m\times n}$ sprava maticou $B \in R^{n\times k}$ a výsledok je matica $D \in R^{m\times k}$ s prvkami $d_{ij} = A_{i*}B_{*j}$ (i-ty riadok matice A krát j-ty stĺpec matice B). Ak sa počet riadkov matice A nerovná počtu stĺpcov matice B, tak nie je súčin AB definovaný.

Veta (vlastnosti súčtu a súčinu matíc.

1) Ak $A, B \in R^{m\times n}$, $D \in R^{n\times k}$, tak $(A + B)D = AD + BD$,
2) Ak $A, B \in R^{m\times n}$, $D \in R^{k\times m}$, tak $D(A + B) = DA + DB$,
3) Ak $A \in R^{m\times n}$, $B \in R^{n\times k}$, tak $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
4) Násobenie matíc nie je komutatívne, t.j. nemusí platiť $AB = BA$ (ani keď sú obe strany definované).

Definícia. Matice, ktoré majú rovnaký počet riadkov ako stĺpcov sa nazývajú *štvorcové*. Hovoríme, že prvky a_{ii}, $i = 1, 2, \dots n$ matice $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ tvoria *hlavnú diagonálu* matice A. Matica $I_n \in R^{n \times n}$, ktorá má všetky čísla na hlavnej diagonále rovné 1 a ostatné prvky nulové, sa nazýva *jednotková*.

Poznamenajme, že $A \in R^{m \times n}$, tak $I_m A = A I_n = A$, to vysvetľuje názov jednotková matica.

Podobne pre štvorcovú maticu $A \in R^{n \times n}$ definujeme inverznú maticu ako $B \in R^{n \times n}$, pre ktorú $AB = I_n$. K danej matici A existuje najviac jedna inverzná, navyše ak $AB = I_n$, tak aj $BA = I_n$.

2.3 Výpočet inverznej matice.

Postup vysvetlíme na maticiach typu 3×3, nech $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, hľadáme maticu $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$, pre ktorú platí

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ak označíme x, y, z prvý, druhý a tretí stĺpec neznámej matice B, máme vlastne riešiť tri sústavy rovníc

$$Ax = (1,0,0)^\top, \quad Ay = (0,1,0)^\top, \quad Az = (0,0,1)^\top,$$

ktoré majú tú istú maticu, ale rôzne pravé strany, t.j. rôzne rozšírené matice. Takže maticu A rozšírime o všetky tri pravé strany a upravíme na riadkovo ekvivalentnú redukovanú stupňovitú maticu, jej hodnosť sa rovná hodnosti pravej strany, t.j. n, teda buď majú všetky tri sústavy práve jedno riešenie, alebo aspoň jedna z nich nemá riešenie a inverzná matica neexistuje. Maticu inverznú k matici A označujeme A^{-1}

Príklad.. Nájdite A^{-1} pre $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim_{\substack{-R_2 \\ -R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim_{\substack{R_2 - 2R_3 \\ R_1 - 2R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim_{R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Teda upravili sme $\left(A \,|\, I_3\right) \sim \left(I_3 \,|\, A^{-1}\right)$. Dostali sme $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (overte $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$).

Ukážte, že k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ neexistuje inverzná matica.

Veta. *Nech $A \in R^{n \times n}$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné.*
a) existuje matica A^{-1},
b) A má hodnosť n,
c) riadky matice A sú lineárne nezávislé,
d) stĺpce matice A sú lineárne nezávislé.

Definícia. Štvorcová matica, ktorá má inverznú sa nazýva *regulárna.*

3.4. Determinanty štvorcových matíc.

Determinant štvorcovej matice A je číslo $\det A$, určené nasledujúcou (induktívnou) definícíou.

Definícia. Nech $A \in R^{n\times n}$, $n \in N$.
1. Ak $n = 1$, $A = (a_{11})$, tak $\det A = a_{11}$
2. Ak $n > 1$ označíme A_{ij} maticu, ktorá vznikne z matice A odstránením stĺpca A_{*j} a riadka A_{i*}. $\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$ (rozvoj podľa prvého riadku).

Podľa bodu 2) sa počíta determinant, ak vieme počítať determinanty matíc typu $(n-1)\times(n-1)$, teda

Ak $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, tak $\det A = a_{11}\det(a_{22}) - a_{12}\det(a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
Determinant označujeme aj ako maticu ohraničenú kolmými čiarami namiesto zátvoriek, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Pre $n = 2$ teda je determinant súčin čísel na hlavnej diagonále mínus súčin čísel na vedľajšej diagonále.

Ak $n = 3$. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$
$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - -(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$.

Pre determinant matice 3×3 sa dá sformulovať Sarusovo pravidlo. Prvé dva stĺpce pripíšeme ako štvrtý a piaty a determinant je súčet všetkých troch súčinov na hlavných diagonálach zľava hore doprava dole minus súčest súčinov na 3 vedľajších diagonálach.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \qquad \det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Pre väčšie matice žiadne analogické pravidlo neexistuje a najvhodnejší je spôsob výpočtu pomocou ERO.

Najprv dfinujeme ďalšie špecialne typy matíc.

Definícia. Matica $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ sa nazýva
- (i) dolná trojuholníková, ak $j > i \implies a_{ij} = 0$ (všetky prvky nad hlavnou diagonálov sú nulové),
- (ii) horná trojuholníková, ak $j < i \implies a_{ij} = 0$ (všetky prvky pod hlavnou diagonálov sú nulové),
- (iii) trojuholníková, ak je dolná alebo horná trojuholníková,
- (iV) diagonálna, ak $j \neq i \implies a_{ij} = 0$ (všetky prvky mimo hlavnej diagonály sú nulové).

Vlastnosti determinantu zhrnieme v nasledujúcej vete, ktorej dôkaz sa dá urobiť matematickou indukciou.

Veta. *Nech $A \in R^{n\times n}$. Potom platí*
1.

$$\forall\, i \in \{a,\dots,n\} \;\; \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij} \quad (\textit{rozvoj podľa i-teho riadku}),$$

$$\forall\, j \in \{a,\dots,n\} \;\; \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij} \quad (\textit{rozvoj podľa j-teho stĺpca}).$$

2. *Ak $B \sim A$ vznikla z matice A pomocou* ERO

2.1. *násobenia niektorého riadka číslom* α, *tak* $\det B = \alpha \det A$,
2.2. *vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak* $\det B = -\det A$,
2.3. *pričítaním násobku niektorého riadka k inému riadku, tak* $\det B = \det A$,
3. $\det A^\top = \det A$

Dôsledok.
(i) *Determinant trojuholníkovej matice sa rovná súčinu jej prvkov na hlavnej diagonále.*
(ii) *Ak má matica* A *dva rovnaké riadky alebo stĺpce, tak* $\det A = 0$.
(iii) $A, B \in R^{n\times n} \implies \det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Prvé dôsledky sa pomocou predchádzajúcej vety dajú dokázať jednoducho, dôkaz tvrdenia o determinante súčinu je podstatne náročnejší.

3.5 Výočet inverznej matice pomocou determinantov a Cramerovo pravidlo.
Pre maticu $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ označíme $\tilde a_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$. $\tilde a_{ij}$ sa nazýva algebraický doplnok prvku a_{ij} v matici A, výstižnejie by bolo povedať algebraický doplnok pozície (ij), lebo od hodnoty samotného prvku a_{ij} ani od čísel v celom riadku A_{i*} a stĺpci A_{*j} číslo $\tilde a_{ij}$ nezávisí.
Počítajme teraz súčin matíc

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde a_{11} & \tilde a_{12} & \tilde a_{13}\\ \tilde a_{21} & \tilde a_{22} & \tilde a_{23}\\ \tilde a_{31} & \tilde a_{32} & \tilde a_{33}\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde a_{11} & \tilde a_{21} & \tilde a_{31}\\ \tilde a_{12} & \tilde a_{22} & \tilde a_{32}\\ \tilde a_{13} & \tilde a_{23} & a_{33}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}\tilde a_{11} + a_{12}\tilde a_{12} + a_{13}\tilde a_{13}) & (a_{11}\tilde a_{21} + a_{12}\tilde a_{22} + a_{13}\tilde a_{23}) & (a_{11}\tilde a_{31} + a_{12}\tilde a_{32} + a_{13}\tilde a_{33})\\ (a_{21}\tilde a_{11} + a_{22}\tilde a_{12} + a_{23}\tilde a_{13}) & (a_{21}\tilde a_{21} + a_{22}\tilde a_{22} + a_{23}\tilde a_{23}) & (a_{21}\tilde a_{31} + a_{22}\tilde a_{32} + a_{23}\tilde a_{33})\\ (a_{31}\tilde a_{11} + a_{32}\tilde a_{12} + a_{33}\tilde a_{13}) & (a_{31}\tilde a_{21} + a_{32}\tilde a_{22} + a_{33}\tilde a_{23}) & (a_{31}\tilde a_{31} + a_{32}\tilde a_{32} + a_{33}\tilde a_{33})\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0\\ 0 & \det A & 0\\ 0 & 0 & \det A\end{pmatrix} = (b_{ij})_{1\le i,j\le n} = (\det A) I_3\,.$$

Čísla na hlavnej diagonále $b_{11} = b_{22} = b_{33} = \det A$ sú rozvoje $\det A$ podľa prvého, druhého a tretieho riadka. Na ostatných miestach sú rozvoje determinaantov matíc, ktoré majú dva rovnaké riadky, napr

$$\text{rozvoj podľa druhého riadka}\qquad 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = (a_{11}\tilde a_{21} + a_{12}\tilde a_{22} + a_{13}\tilde a_{23}) = b_{12}$$

(algebraické doplnky druhého riadka posledného determinantu sú rovnaké ako v matici A).
Ak je $\det A \neq 0$, tak z predchádzajúcich výpotčov vyplýva

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\tilde a_{ij})^\top = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix}.$$

Pre matice typu 3×3 sme tým dokázali nasledujúcu vetu, pre matice $n\times n$ sa dá dokázať analogicky.

Veta. *Nech* $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ *a nech* $\operatorname{adj} A = (\tilde a_{ij})^\top$ *(matica adjungovaná k matici* A*). Potom platí*

$$A(\operatorname{adj} A) = (\det A) I_n\,.$$

Ak, navyše, $\det A \neq 0$, *tak*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A\,.$$

Tým je súčasne dokázané aj tvrdenie

Veta. *$A \in R^{n\times n}$ je regulárna vtedy a len vtedy, keď $\det A \neq 0$.*

Priamym dôsledkom vzťahu $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$ je

Cramerovo pravidlo. *Ak $A \in R^{n\times n}$ je regulárna matica a $\mathbf{b} \in R^{n\times 1}$, tak má sústava lineárnych rovníc*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

práve jedno riešenie $\mathbf{x} = \left(\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, \ldots, \frac{d_n}{d}\right)$, kde $d = \det A$ a d_j $(j = 1, 2, \ldots n)$ je determinant matice, ktorá vznikne z matice A zámenou stĺpca A_{*j} za $\mathbf{b}$ (pravú stranu).