

Lineárne operátory a ich maticová reprezentácia

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$, $(M, +, \cdot)$ sú lineárne priestory nad tým istým poľom F ($F = R$ alebo $F = C$). Zobrazenie $T: L \rightarrow M$ sa nazýva lineárna transformácia (lineárny operátor), ak

- (LO1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ platí $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (T\mathbf{x}) + (T\mathbf{y})$,
 (LO2) $\forall \mathbf{x} \in L, \alpha \in F$ platí $T(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot (T\mathbf{x})$.

Úloha. Napíšte po 2 príklady zobrazení $T: R^2 \rightarrow R^2$, ktoré sú a ktoré nie sú lineárne.

Z definície ľahko vyplýva nasledujúca veta:

Veta. Nech $T: L \rightarrow M$ je lineárna transformácia a $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\} \subset L$. Potom pre $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ platí

- 1) $T(\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n) = \alpha_1 T\mathbf{b}_1 + \alpha_2 T\mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n T\mathbf{b}_n$,
- 2) Ak je $\{T\mathbf{b}_1, T\mathbf{b}_2, \dots, T\mathbf{b}_n\}$ lineárne nezávislá množina tak aj $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je lineárne nezávislá.
- 3) $\dim \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\} \geq \dim \text{span}\{T\mathbf{b}_1, T\mathbf{b}_2, \dots, T\mathbf{b}_n\}$
- 4) Ak je $\dim L = n$, a B je báza priestoru L , tak obor hodnôt operátora T je $TL = \text{span}\{T\mathbf{b}_1, T\mathbf{b}_2, \dots, T\mathbf{b}_n\}$ a $\dim TL \leq n$

Vidno, že lineárne zobrazenie T je jednoznačne určené svojimi hodnotami na prvkoch hociktovej bázy priestoru L . Pre prípad, keď $L = R^{3 \times 1}$, $M = R^{2 \times 1}$ a $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ je usporiadaná báza priestoru L , $D = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ je usporiadaná báza priestoru M , $T: L \rightarrow M$ je ľubovoľné lineárne zobrazenie a $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + x_3 \mathbf{b}_3$ dostávame:

$$\begin{aligned} T\mathbf{b}_1 &= a_{11} \mathbf{d}_1 + a_{21} \mathbf{d}_2 \\ T\mathbf{b}_2 &= a_{12} \mathbf{d}_1 + a_{22} \mathbf{d}_2 \\ T\mathbf{b}_3 &= a_{13} \mathbf{d}_1 + a_{23} \mathbf{d}_2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} T\mathbf{x} &= T(x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + x_3 \mathbf{b}_3) = x_1 T\mathbf{b}_1 + x_2 T\mathbf{b}_2 + x_3 T\mathbf{b}_3 \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \mathbf{d}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \mathbf{d}_2 \end{aligned}$$

Ak zadefinujeme súčin matice $A = (a_{ij}) \in R^{2 \times 3}$ a stĺpca $\mathbf{x} \in R^{3 \times 1}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 A_{*1} + x_2 A_{*2} + x_3 A_{*3} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix},$$

tak sa lineárny operátor T dá vzjadriť pomocou súradníc vyhládom na bázy B, D :

$$[T\mathbf{b}_i]_D = A[\mathbf{b}_i]_B.$$

Pre ľubovoľné konečnorozmenné priestory to vedie k pojmu matica lineárnej transformácie:

Definícia. Nech $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je usporiadaná báza lineárneho priestoru L , $D = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_m\}$ je usporiadaná báza lineárneho priestoru M a $T: L \rightarrow M$ je lineárna transformácia.

Matica $A = [T]_{BD} \in C^{m \times n}$, ktorej stĺpce sú

$$A_{*1} = [T\mathbf{b}_1]_D, A_{*2} = [T\mathbf{b}_2]_D, \dots, A_{*n} = [T\mathbf{b}_n]_D$$

sa nazýva matica lineárnej transformácie vzhľadom na bázy B a D .

Veta. Pri označeniach z predchádzajúcej definície platí $[T\mathbf{x}]_D = [T]_{BD}[\mathbf{x}]_B$ pre $\forall \mathbf{x} \in L$.

Definícia. Nech L je n -rozmerný lineárny priestor. Nech B a D sú usporiadané bázy priestoru L , $I: L \rightarrow L$ je identický operátor (t.j. $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pre $\forall \mathbf{x} \in L$). Matica $[I]_{BD}$ sa nazýva matica zmeny bázy B na bázu D .

Zmysel predchádzajúcej definície je vidieť zo vzťahu $[I]_{BD}[\mathbf{x}]_B = \mathbf{x}_D$.

Definícia. Nech $T: L \rightarrow M$ je lineárna transformácia. Potom sa podpriestor $\ker T = \{\mathbf{x} \in L: T\mathbf{x} = 0\} \subset L$ nazýva jadro lineárnej transformácie T . Podpriestor $TL = \text{ran } T \subset M$ sa nazýva obor hodnôt lineárnej transformácie T .

Príklad. Ak $T: C^{4 \times 1} \rightarrow C^{2 \times 1}$ je určené maticou $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$ ($T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$), tak $\ker T$ je množina všetkých riešení sústavy lineárnych rovníc, ktorej matica je A a platí $\text{ran } T = \text{span}\{A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}, A_{*4}\}$.

Vieme, že sa riešenie tejto sústavy nezmení, ak maticu A upravíme pomocou ERO na redukovanú stupňovitú B . T aj $\text{ran } T$ sa síce zmení, ale nezmení sa $\dim \text{ran } T$. Pritom sa ľahko ukáže, že $\dim \text{ran } T$ sa rovná počtu pivotov (nenulových riadkov) stupňovitej matice B a dimenzia $\ker T$ sa rovná počtu parametrov, ktoré potrebujeme na popísanie množiny všetkých riešení homogénnej sústavy, t.j. počtu stĺpcov, v ktorých nie sú pivoty. Teda $\dim \ker T + \dim \text{ran } T = 4$.

Všeobecne platí

Veta. Nech L, M sú lineárne priestory a $\dim L = n$. Ak $T: L \rightarrow M$ je lineárny operátor, tak platí

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{ran} T = n.$$

Predchádzajúca veta sa niekedy nazýva základná veta lineárnej algebry. Pre prípad $L = M$ z nej ľahko dokážeme, že platí

Veta. Nech $(L, +, \cdot)$ je konečnorozmerný lineárny priestor, $\dim L = n$, nech $T: L \rightarrow L$ je lineárny operátor. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- (1) $\ker T = \{0\}$ (t.j. $\ker T = \{0\}$).
- (2) $\operatorname{ran} T = L$
- (3) T je injektívny (prostý)
- (4) T je bijektívny (prostý aj na)
- (5) $\exists S: L \rightarrow L$, pre ktorý $TS = ST = I$
- (6) Pre všetky bázy B, D operátora T sú matice $[T]_{BD}$ regulárne a $\det[T]_{BD} \neq 0$.

Príklad 1.. Nech $T: R^3 \rightarrow R^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3)$. Nájdite

- a. maticu lin. operátora T , vzhľadom na štandardné bázy
- b. $[T]_{BD}$, ak $B = \{\mathbf{b}_1 = (1, -1, 1), \mathbf{b}_2 = (1, 1, 1), \mathbf{b}_3 = (0, 1, 1)\}$, $D = \{\mathbf{d}_1 = (1, 1), \mathbf{d}_2 = (1, -1)\}$
- c. určte $\dim \ker T$, $\dim \operatorname{ran} T$ a rozhodnite, či je operátor T injektívny a či je surjektívny.

Riešenie. a) Nech $\mathcal{E}_n$ označuje štandardnú bázu priestoru R^n . Vypočítame obrazy prvkov štandardnej bázy: $T(1, 0, 0) = (2, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$, $T(0, 0, 1) = (0, -1)$. Hodnoty sú už vyjadrené pomocou štandardnej bázy,

teda môžeme priamo napísať výsledok: $[T]_{\mathcal{E}_3 \mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- b) $T\mathbf{b}_1 = (1, -1)$, $T\mathbf{b}_2 = (3, 1)$, $T\mathbf{b}_3 = (1, 0)$ a určíme stĺpce matice $[T]_{BD}$, t.j. $(T\mathbf{b}_1)_D$, $(T\mathbf{b}_2)_D$, $(T\mathbf{b}_3)_D$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim_{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim_{-\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim_{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

a výsledok je: $[T]_{BD} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) Výmenou $R_1 \leftrightarrow R_2$ v matici $[T]_{BD}$ dostaneme stupňovitú maticu, ktorá má dva pivoty. Preto $\dim \operatorname{ran} T = 2$ a $\dim \operatorname{ran} T + \dim \ker T = 3 \implies \dim \ker T = 1$. $\dim \operatorname{ran} T = 2 = \dim R^2 \implies \operatorname{ran} T = R^2$, teda T je surjektívny. T nie je injektívny, lebo $\dim \ker T \neq 0$.

Príklad 2.. Nech $T: R^3 \rightarrow R^2$, je lineárny operátor. Nájdite

- a. maticu lin. operátora T , vzhľadom na štandardné bázy
- b. maticu lin. operátora T , vzhľadom na usporiadané bázy $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ priestoru R^3 a $D = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ priestoru R^2
- c. určte $\dim \ker T$, $\dim \operatorname{ran} T$ a rozhodnite, či je operátor T injektívny a či je surjektívny.

Pre prípad:

- (i) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 2x_3)$, $\mathbf{b}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 1)$; $\mathbf{d}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{d}_2 = (0, 1)$.
- (ii) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 2x_3)$, $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 0, 1)$; $\mathbf{d}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{d}_2 = (2, 1)$.
- (iii) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1)$, $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 0, 1)$; $\mathbf{d}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{d}_2 = (2, 1)$.

Príklad 3.. Nech $T: R^2 \rightarrow R^2$, je lineárny operátor. Nájdite

- a. maticu lin. operátora T , vzhľadom na štandardnú bázu
- b. maticu lin. operátora T , vzhľadom na usporiadané bázy $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ a $D = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ priestoru R^2
- c. určte $\dim \ker T$, $\dim \operatorname{ran} T$ a rozhodnite, či je operátor T injektívny a či je surjektívny.

Pre prípad:

- (i) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, $\mathbf{b}_1 = (2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0)$; $\mathbf{d}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{d}_2 = (0, 1)$.
- (ii) $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2 - 2x_1)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$; $\mathbf{d}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{d}_2 = (2, 1)$.
- (iii) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 1)$; $\mathbf{d}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{d}_2 = (1, 1)$.
- (iv) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 - 2x_2)$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{d}_1 = (3, 1)$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{d}_2 = (0, 1)$.

Príklad 3.. Nech $T: R^3 \rightarrow R^3$, je lineárny operátor. Nájdite

- a. maticu lin. operátora T , vzhľadom na štandardnú bázu
- b. maticu lin. operátora T , vzhľadom na usporiadanú bázu $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$
- c. určte $\dim \ker T$, $\dim \operatorname{ran} T$ a rozhodnite, či je operátor T injektívny a či je surjektívny.

Pre prípad:

- (i) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 5x_2 + 2x_3, 5x_1 - 7x_2 + 3x_3, 6x_1 - 9x_2 + 4x_3)$, $\mathbf{b}_1 = (-1, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 1)$.
- (ii) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, -x_1 - 2x_3)$, $\mathbf{b}_1 = (0, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 0)$; $\mathbf{b}_3 = (1, 1, -1)$.