1. [2] Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Doplňte podmienky, za ktorých sú nasledujúce úpravy matice elementárnymi riadkovými operáciami.

   a) $A_{i*} \to A_{i*} + \alpha A_{j*}$, $\underline{i \neq j}$ b) $A_{i*} \to \alpha A_{i*}$, $\underline{\alpha \neq 0}$

2. [3] $f(x) = x^{102} - x^{99} + 2x - 3$. Napíšte zvyšok r po delení $f(x) : (x+1)$ (odôvodnite). $r = \underline{f(-1) = -3}$

3. Ktoré z funkcií f_1, f_2, f_3 sú elementárne zlomky nad $\mathbb{R}$ (správne $+1$, nesprávne -1, odôvodnenie $+1$ bod).

   $f_1(x) = \dfrac{x}{(x-2)^3}$ nie je, lebo stupeň čitateľa je > 0

   $f_2(x) = \dfrac{x}{(x^2-2x+3)^2}$ áno je, lebo $D = 4 - 12 < 0$

   $f_3(x) = \dfrac{x}{(x^2-2x-3)^2}$ nie je, lebo $D = 4 + 12 > 0$

4. [2+3] Napíšte a odvoďte vzorec na výpočet kolmého priemetu vektora $\mathbf{u}$ do smeru nenulového vektora $\mathbf{v}$ (načrtnite obrázok). Označíme $\mathbf{u}_1 = \mathrm{P}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ a $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$. Potom $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{v}$ a dostaneme

   $\mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{v} \implies \exists t \in R$ také, že $\mathbf{u}_1 = t\mathbf{v}$

$\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{v} \implies \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$. Preto

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = t\mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \implies \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (t\mathbf{v} + \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} = t\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v} = t\|\mathbf{v}\|^2$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = t\,\|\mathbf{v}\|^2 \implies t = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \implies \mathbf{u}_1 = t\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$

---

5. Rozšírenú maticu sústavy upravte na redukovanú stupňovitú a napíšte množinu všetkých jej riešení.

   a) [7] $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$ b) [7] $\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ -5x_1 + 9x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$

   a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 8 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \text{ za postup } \mathbf{4\ body}$$

$P = \{(-5, 11, -7)\}$ (**3 body**)

   b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 1 \\ -5 & 9 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 9 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) [\mathbf{3\ b.}] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) [\mathbf{1\ b.}] P = \emptyset([\ \mathbf{3\ b.}])$$

---

6. [7] Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavu $\begin{aligned} -2ix_1 + x_2 &= 0 \\ -ix_1 + (i+1)x_2 &= i \end{aligned}$

   $d = \begin{vmatrix} -2i & 1 \\ -i & i+1 \end{vmatrix} = 2 - i$, $d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ i & i+1 \end{vmatrix} = -i$, $d_2 = \begin{vmatrix} -2i & 0 \\ 1 & i \end{vmatrix} = 2$,

$x_1 = \frac{-i}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{1-2i}{5}$, $x_2 = \frac{2}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{4+2i}{5}$ $P = \{(\frac{1-2i}{5}, \frac{4+2i}{5})\}$

   Za postup **(4)**, výsledok v algebraickom tvare **(3)**

7. [7] Vypočítajte maticu inverznú k $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 \qquad A^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 6 & 12 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Za postup **(4)**, výsledok **(3)**

---

8. [7] Funkciu $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^3+3x^2+3x+1}$ napíšte ako súčet elemetárnych zlomkov.

$x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3$ **(2)**, $\dfrac{x^2+2x}{x^3+3x^2+3x+1} = \dfrac{a}{(x+1)^3} + \dfrac{b}{(x+1)^2} + \dfrac{c}{x+1}$ **(2)**,
$x^2+2x = a + b(x+1) + c(x+1)^2$ **(1)**, $x^2+2x = cx^2 + (2c+b)x + a + b + c$
$\dfrac{x^2+2x}{x^3+3x^2+3x+1} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^3}$ **(2)**

---

9. [8] $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2$ napíšte ako súčin ireducibilných polynmov nad $\mathbb{R}$.

$c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}\}$ **(2)**, stačí skúšať záporné **(1)**, $f(-1) \neq 0$, $f(-2) = 0$ $f(-\frac{1}{2}) = 0$ **(2)**,
$f(x) = 2(x^2+x+1)(x+\frac{1}{2})(x+2)$, **(2)**, $D = 1 - 4 < 0$ **(1)**

---

10. [6] Nájdite všeobecnú rovnicu roviny, ktorá obsahuje body $A = (-1, 3, 2)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (3, 2, 1)$.

$\vec{AB} = 3, -2, -3)$, $\vec{AC} = (4, -1, -1)$, **(1)** $\vec{n} = (-1, -9, 5)$ **(1)** $\qquad \rho\colon\ -(x+1) - 9(y-3) + 5(z-2) = 0$ **(3)**
$\underline{x + 9y - 5z - 16 = 0}$ **(1)**

---

11. [5] Určte typ kvadratickej plochy danej rovnicou $-x^2 + y^2 - 4z^2 - 4x - 2y - 8z - 7 = 0$ a načrtnite ju.

$-x^2 + y^2 - 4z^2 - 4x - 2y - 8z - 7 = -(x+2)^2 + 4 + (y-1)^2 - 1 - 4(z+1)^2 + 4 - 7 = 0$ **(2)**

$-\dfrac{(x+2)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{4} - (z+1)^2 = 0 \implies$ (eliptická) kužeľová ploocha **(2)** obrázok **(1)**