Riešenie

Teoretické otázky (odpovede napíšte priamo do zadania)

1. Dané sú matice
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&1&3\\0&0&1&3\\0&1&2&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&0&1&3\\0&1&1&3\\0&0&0&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&0&1&3\\1&0&1&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}.$$
Doplňte (za správnu maticu +1 bod, nesprávnu −1 bod)

Z nich sú stupňovité: A, C

redukované stupňovité: A

---

2. [4] Napíšte množinu všetkých riešení sústavy, ktorej rozšírená matica je $\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&-1&0&-1\\0&0&1&-3&2&3\end{array}\right)$

Matica je redukovaná stupňovitá, za neznáme, ktoré zodpovedajú stĺpcom bez pivotov zvolíme parametre $x_2=a$, $x_4=b$, $x_5=c$

$\{(-1-2a+b\,,\ a\,,\ 3+3b-2c\,,\ b\,,\ c)\colon a,b,c\in R\}$

---

3. [4] $f(x)=(x^{20}-2x^{10}+3x+2)$. Doplňte: zvyšok po delení $f(x):(x+1)$ je $r=$ ____.

Zvyšok po delení $f(x):(x-c)$ je hodnota $f(c)$, v našom prípade $c=-1$.

$r=f(-1)=1-2-3+2=\boxed{-2}$

---

4. [4] Vieme, že $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\sqrt{3}$, $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=2$. Doplňte: uhol $\measuredangle(\vec{u}\vec{v})=$

$$-\sqrt{3}=\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\measuredangle(\vec{u}\vec{v})\implies\cos\measuredangle(\vec{u}\vec{v})=\frac{-\sqrt{3}}{2}\implies\measuredangle(\vec{u}\vec{v})=\pi-\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{5}{6}\pi$$

Príklady

5. Riešte sústavy

a) [7b.]
$$\begin{aligned}2x_1-x_2-4x_3&=0\\x_1-x_2+x_3&=1\\4x_1-x_2-2x_3&=4\end{aligned}$$

b) [8b.]
$$\begin{aligned}2x_1-x_2-4x_3-2x_4&=0\\x_1-x_2+x_3&=1\\4x_1-x_2-2x_3+2x_4&=4\end{aligned}$$

Riešenie: a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-4&0\\1&-1&1&1\\4&-1&-2&4\end{array}\right)\sim_{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\2&-1&-4&0\\4&-1&-2&4\end{array}\right)\sim_{\substack{r_2-2r_1\\r_3-4r_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&1&-6&-2\\0&3&-6&0\end{array}\right)\sim_{r_3-3r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&1&-6&-2\\0&0&12&6\end{array}\right)\qquad\begin{aligned}x_3&=\tfrac{1}{2},\\x_2-3=-2&\implies x_2=1\\x_1-1+\tfrac{1}{2}=1&\implies x_1=\tfrac{3}{2}\end{aligned}\qquad\underline{P=\{(\tfrac{3}{2},1,\tfrac{1}{2})\}}$$

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim_{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim_{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-4r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim_{r_3-3r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & 6 \end{array}\right) \sim_{r_3/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim_{r_2-r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$x_4 = a$, $6x_3 + 4a = 3 \implies x_3 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}a$, $x_2 = 1 - 2a$,
$x_1 - (1-2a) + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}a = x_1 - 1 + 2a + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}a = 1 \implies x_1 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3}a.$
$\underline{P = \{(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}a, 1-2a, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}a, a) \colon a \in R\}}$

---

6. [5] Určte hodnosť matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -13 & -8 & -3 \end{pmatrix} \sim_{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -16 & -10 & -4 \end{pmatrix} \sim_{r_3-2r_2}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies h(A) = 2$$

---

7. [10] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Vypočítajte A^{-1} a $\det A$.

$$\det A = 1, \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ -1 \cdot r_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Teda $A^{-1} = A$.

---

8. [10] Racionálnu funkciu $f(x) = \dfrac{6x^2 + 4x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 1}$ napíšte ako súčet elementárnych zlomkov nad R.

Je to rýdzoracionálna funkcia, najprv treba rozložiť menovateľa:

$c = \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & & -2 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & |\underline{0} \end{array}$$

$D = 1 + 8 = 9$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

$2x^3 + 3x^2 - 1 = (x+1)(2x^2 + x - 1) = 2(x+1)^2(x - \frac{1}{2}) = (x+1)^2(2x-1)$

$$\frac{6x^2 + 4x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x-1}$$
$$6x^2 + 4x + 1 = a(2x-1) + b(x+1)(2x-1) + c(x+1)^2$$

$x = -1\colon\ 3 = -3a \implies a = -1$
$x = \frac{1}{2}\colon\ \frac{3}{2} + 2 + 1 = \frac{9}{4}c \implies c = 2$
$x = 0\colon\ 1 = -a - b + c = 1 - b + 2 = 3 - b \implies b = 2$

$$\underline{f(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{2x-1}}$$

9. [15] Dané sú body $A = [1, -1, 0]$, $B = [2, -1, 1]$, $C = [2, 0, 1]$, $D = [1, 0, 1]$.

a. Vypočítajte obsah $P_{\triangle ABC}$ trojuholníka ABC.

b. Určte všeobecnú rovnicu roviny ρ, v ktorej ležia body A, B, C.

c. Vypočítajte vzdialenosť bodu D od roviny ABC

d. Zistite, či je trojuholník ABC pravouhlý. Pri ktorom vrchole má pravý uhol?

$$\vec{u} = \vec{AB} = B - A = (1, 0, 1)$$
$$\vec{v} = \vec{AC} = C - A = (1, 1, 1)$$
$$\vec{w} = \vec{BC} = C - B = (0, 1, 0)$$

a) $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\} = \frac{1}{2}\|(-1, 0, 1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1)+z \qquad \rho\colon ax+by+cz+d = -(x-1)+z = -x+z+1 = 0$

c) $d(D, \rho) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-1+1+1|}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

d) Pravý uhol je pri vrchole B lebo $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$