

1. Vypočítajte minimálny polynóm matice $A \in C^{n \times n}$

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [\lambda^2 - 2\lambda] \quad$ b. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [\lambda^2 - 2]$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [\lambda^2 - 2\lambda]$

 2. Vypočítajte minimálny polynóm vektora $\mathbf{b}$ vzhľadom na maticu $A \in C^{n \times n}$

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1]$

b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\lambda^4] \quad$ c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [-2\lambda + \lambda^2]$

 3. Vypočítajte minimálny polynóm matice $A \in Z_2^{n \times n}$

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [\lambda^2] \quad$ b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [\lambda^2 + 1]$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [\lambda^2]$

 4. Vypočítajte minimálny polynóm vektora $\mathbf{b}$ vzhľadom na maticu $A \in Z_2^{n \times n}$

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1]$

b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\lambda^4] \quad$ c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [\lambda^2]$

 5. Nájdite všetky vlastné čísla a vlastné vektory matice A

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z_2^{3 \times 3} \quad [\lambda_1 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = (0, 1, 1)^\top; \lambda_2 = 1 \implies \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)^\top],$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in Z_3^{3 \times 3} \quad \left[\lambda_1 = 1 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 2\mathbf{v}_1; \lambda_2 = 2 \implies \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 2\mathbf{v}_2 \right]$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_2^{3 \times 3} \quad \left[\lambda_1 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \lambda_2 = 1 \implies \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_3^{3 \times 3} \quad \left[\lambda_1 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, r, s \in Z_3, (r, s) \neq (0, 0) \right]$

 6. Vypočítajte stopu, vlastné čísla a vlastné vektory matice $A \in C^{n \times n}$

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left[\text{trace}(A) = 2; \lambda_1 = 0, \mathbf{v}_1 = p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p \neq 0; \lambda_2 = 2, \mathbf{v}_2 = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p \neq 0 \right]$

b. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left[\text{trace} = 0; \lambda_1 = \sqrt{2}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = -\sqrt{2}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \right] \quad [\lambda^2 - 2\lambda]$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left[\lambda_{1,2} = 0, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = p\mathbf{v}_1 + q\mathbf{v}_2, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 3, \mathbf{v} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p \neq 0 \right]$

7. Napíšte maticu $A \in K^{n \times n}$, ktorej minimálny polynóm je $f(\lambda) \in P(K)$.

- a. $K = \mathbb{Z}_2, n = 4, f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \lambda + 1$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$
- b. $K = \mathbb{Z}_2, n = 4, f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda + 1$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$
- c. $K = \mathbb{C}, n = 4, f(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 5$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$
- d. $K = \mathbb{C}, n = 4, f(\lambda) = 3\lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 5$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \right]$

8. Vypočítajte stopu a vlastné čísla matice A a rozhodnite, či je diagonalizovateľná

- a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [je diagonalizovateľná $A \approx D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$]
- b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [nie je diagonalizovateľná]
- c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [je diagonalizovateľná $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$]

9. Rozhodnite, či je matica $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ diagonalizovateľná. Ak je, tak nájdite diagonálnu maticu D a regulárnu maticu P , pre ktorú $A = PDP^{-1}$.

- a) $A = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- e) $A = \begin{pmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{pmatrix}$ nie je
- f) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ nie je h) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nie je i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ nie je