Cvičenie — 7. týždeň

1. Rozhodnite, či je zobrazenie T lineárne. V prípadoch, keď je T lineárne, napíšte jeho maticu vzhľadom na štandardné bázy ($\mathcal{E}$, presnejšie $\mathcal{E}_n$ štand. báza v R^n).
   a. $T\colon R^3 \to R^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3)$
   b. $T\colon R^3 \to R^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2, x_2 + x_3)$
   c. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3)$
   d. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$
   e. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$

Výsledky: a. $T_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, c. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ b.,e.: T nie je linerny opertor

2. Napíšte matice lineárneho operátora $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$, Je niektorý z vektorov báz $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ vlastným vektorom operátora T?
   a. $T\colon R^2 \to R^2$, $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$; $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, $\mathbf{b}_1 = (-1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -2)$.
   b. $T\colon R^2 \to R^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + x_2)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade a.
   c. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + x_2 + x_3, 0)$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$; $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 0)$
   d. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade c.
   e. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - 2x_3, x_2 - x_3)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade c.
   f. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -2x_1 + x_3)$, $\mathcal{E}$ je rovnaká ako v príklade c., $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 2, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 1, 1)$.

a. $T_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b. $T_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

c. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

e. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3. Pre lineárne zobrazenia z príkladov 1 a 2 určte dimenziu jadra a oboru hodnôt.

$(\dim \operatorname{Ker} T, \dim \operatorname{Ran} T)$ = 1a (1,2); 1c (0,3); 1d (0,3)
2a (0,2); 2b (0,2); 2c (1,2); 2d (0,3); 2e (0,3); 2f (0,3)

4. Rozhodnite, či je $\mathbf{u} \in R^{4\times 1}$ vlastný vektor matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ak áno, napíšte príslušné vlastné číslo.

a. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $[\lambda=2]$ b. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^\top$, [nie je]

c. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}^\top$, $[\lambda=4]$ d. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^\top$, [nie je]