

Sústavy v poliach R a C .

1. Napíšte množinu všetkých riešení sústavy rovníc s komplexnými neznámymi

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases} \quad [(1, 1)] \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = i \\ 3x_1 + 4x_2 = -7i \end{cases} \quad [(-i, -i)]$$

$$\text{c. } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases} \quad [\emptyset]$$

2. Rozhodnite, či sú dané matice stupňovité, prípadne redukované stupňovité

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Napíšte množinu P všetkých riešení sústavy, ktorej rozšírená matica je

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

4. Riešte sústavu lineárnych rovníc, ktorých rozšírená matica je

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array} \right) & P = \emptyset \\ \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -3 & 13 & -8 \end{array} \right) & P = \emptyset \\ \text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 5 \end{array} \right) & P = \{(7, -4, 0)\} \\ \text{d) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 1 \end{array} \right) & P = \{(-3a, 1 + 5a, a), a \in R\} \\ \text{e) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{array} \right) & P = \{(9, a - 14, a, 0), a \in R\} \\ \text{f) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 9 \end{array} \right) & P = \{(3 + a - 2b, 3 + a + b, a, b), a, b \in R\}. \end{array}$$

5. a) Riešte sústavu rovníc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad P = \{(a - 5, a + 3, a), a \in R\}$$

b) Sú $\bar{u} = (-1, 7, 4)$, $\bar{v} = (5, 3, 0)$ riešeniami predchádzajúcej sústavy rovníc?

6. a) Riešte sústavu rovníc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \quad P = \{(7 + a, 5 + 2a, a), a \in R\}$$

b) Napíšte hodnotu matice a rozšírenej matice predchádzajúcej sústavy.

Sústavy v poliach Z_2 a Z_3 .

7. Riešte sústavy lineárnych rovníc (v poli Z_2)

a.

$$\begin{aligned}x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\x_1 + x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

$$\{(1,1,1,0);(1,0,0,1)\}$$

b.

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\x_1 + x_3 + x_4 &= 1\end{aligned}$$

$$\{(0,0,0,1);(1,1,1,1)\}$$

c.

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 + x_2 &= 0 \\x_2 + x_3 + x_4 &= 1\end{aligned}$$

$$\{(1,1,0,0);(0,0,1,0)\}$$

d.

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\x_3 + x_4 &= 1\end{aligned}$$

$$\{(0,1,1,0);(1,1,0,1)\}$$

e.

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 1 \\x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

$$\{(0,0,1)\}$$

f.

$$\begin{aligned}x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_2 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

$$\{(0,0,1,0);(0,1,0,1)\}$$

8. Riešte sústavy s neznámymi zo Z_3 .

a.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2\end{aligned}$$

$$\{(2,0,1,0);(1,0,0,1);(0,0,2,2)\}$$

b.

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\2x_3 + 2x_4 &= 1\end{aligned}$$

$$\{(0,1,2,0);(1,1,1,1);(2,1,0,2)\}$$

c.

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\x_2 + 2x_3 &= 0 \\2x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

$$\{(1,0,0,0);(1,2,1,1);(1,1,2,2)\}$$

d.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\2x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1\end{aligned}$$

$$\{(1,0,0,1);(2,1,1,1);(0,2,2,1)\}$$

e.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\x_1 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

$$\{(2,2,1)\}$$

f.

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\2x_2 + x_3 &= 1 \\x_3 + 2x_4 &= 1 \\2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2\end{aligned}$$

$\emptyset$, bez 4. rovnice

$$\{(0,0,1,0);(0,1,2,1);(0,2,0,2)\}$$

Determinanty.

9. Vypočítajte determinanty

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 1+i & 2 \\ i & 1-i \end{vmatrix} [2-2i], \quad \text{b. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 12 & 0 & 12 \end{vmatrix} [0], \quad \text{c. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} [-24],$$

$$\text{d. } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} [-4], \quad \text{e. } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} [-6]$$

10. Pomocou determinantov vypočítajte maticu inverznú k matici

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \left[A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 16 & 2 \\ 6 & 18 & 0 \\ 4 & 13 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

11. Riešte rovniciu v poli C

$$\text{a. } \begin{vmatrix} (x-2) & (2-x)^2 \\ 1-x & x-1 \end{vmatrix} = 0 \quad [x_{1,2} = 1, x_3 = 2]$$

$$\text{b. } \begin{vmatrix} 1 & -1 & x+2 \\ x-1 & 1-x & -2 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad [x_{1,2} = 0, x_3 = -1]$$